DEMOSTRACION DEL ISOMORFISMO $H^p \cong H^p \times H^p$

por RAQUEL SANTINELLI
Universidad Nacional de La Plata

INTRODUCCION

Es sabido que no todo espacio de Banach es isomorfo a su cuadrado v. (2) y (3)) y que, por el contrario, esa propiedad es válida para muchos espacios de Banach clásicos, entre ellos los espacios L^p. Con referencia a los espacios de Hardy, notados H^p, R. P. Boas (*) demostró en 1955 que si p es finito y mayor que 1, H^p es isomorfo a L^p, con un argumento no trivial: el teorema sobre funciones conjugadas de M. Riesz. En esta nota se prueba el isomorfirmo de H^p con su cuadrado de manera elemental, para $1 \leqq p \leqq \infty$.

1. *Preliminares*: Sea $T = \{ z \in C, \mid z \mid = 1 \}$ la circunferencia unidad. Si F es una función sobre T y si f está definida sobre R^1 por $f(t) = F(c^{it})$, entonces f es una función periódica de período 2π. Recíprocamente, si f es una función periódica de período 2π sobre R^1, existe una función F sobre T que verifica $f(t) = F(e^{it})$. En consecuencia identificaremos las funciones sobre T con las funciones sobre R^1 de período 2π, y por comodidad escribiremos $f(t)$ en lugar de $f(e^{it})$.

Con esta convención, definimos $L^p(T) = L^p(-\pi, \pi)$ para $0 < p < \infty$ como la clase de todas las funciones complejas, medibles Lebesgue, de período 2π sobre R^1 para las cuales la norma

$$\| f \|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | f(t) |^p \, dt \right\}^{1/p}$$

es finita.

(*) Boas, R. P. — *"Isomorphism between H^p and L^p"*, Amer. J. Math., 77 (1955) pp. 655-656.

Supongamos ahora que f es una función analítica en el disco abierto $|z| < 1$:

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$$

Sea $f_r(t) = f(re^{it})$. Para un r fijo, f_r es una función definitoria sobre T, es decir, si restringimos f a la circunferencia de radio r, obtenemos una función continua sobre esta circunstancia, a la que podemos interpretar también como una función sobre T.

Si $0 < p < \infty$, denotamos por H^p a la clase de funciones analíticas f en el disco $z \to 1$ para las cuales las f_r son acotadas en la norma de $L^p(T)$ cuando $r \to 1$. Si $1 \leqslant p < \infty$, entonces H^p es un espacio de Banach bajo la norma

$$\| f \| \equiv \lim_{r \to 1} \| f_r \|_p$$

2. *Teorema*: H^p es isomorfo a $H^p \times H_p$, $1 \leqslant p < \infty$.

Demostración: Toda función f puede descomponerse en suma de una función par y una función impar, de la siguiente manera: $f = f_1 + f_2$, donde

$$f_1(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} \quad \text{y} \quad f_2(z) = \frac{f(z) - f(-z)}{2}$$

La descomposición es única y si $f \in H^p$, obviamente $f_i \in H^p$, $i = 1, 2$. En consecuencia, llamando A al subespacio de H^p que consiste de todas las funciones pares y B al subespacio de H^p que consiste de todas las funciones impares, se tiene $H^p = A \oplus B$.

Mostraremos que A y B son isomorfas a H^p.

1º) Sea $P(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ una función perteneciente a A. Es decir,

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n. = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n a_n z^n$$

Luego, $\sum_{n \geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1} = 0$ y esto implica $a_{2n+1} = 0$ para todo $n \geqslant 0$. Por lo tanto $P(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$. Queda entonces definida la función analítica $g(s) = \sum_{n \geqslant 0} a_{2n} s^n$ en $|s| < 1$ tal que $P(z) = g(z^2)$.

Por otra parte, si $s = Re^{i}$ y $z = re^{it}$,

$$\| g_R) \|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | g_R(\theta) |^p \, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} | g(r^2 c^{i2t}) |^p \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | P_r(t) |^p \, dt = \| P_r \|_p^p .$$

Entonces, $\| g \| = \| P \|$. Se ve claramente que la aplicación lineal $g \rightarrow P$ definida por $P(z) = g(z^2)$ es una isometría sobre, y por lo tanto un isomorfismo entre A y H^p.

2°) Si $I(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ pertenece a B, se tiene

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^{n+1} a_n z^n$$

Luego, $\sum_{n \geqslant 0} a_{2n} z^{2n} = 0$ y esto implica $a_{2n} = 0$ para todo $n \geqslant 0$.

En consecuencia,

$$I(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1} = z \sum_{n \geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n}$$

donde $\sum_{n \geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n} = \sum_{n \geqslant 0} a_{2n+1} s^n = h(s)$ define una función analítica en $| s | < 1$. Entonces $I(z) = z h(z^2)$. Además,

$$\| h_R \|^p_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | h_R(\theta) |^p \, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} | h(r^2 c^{i2t}) |^p \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{|re^{it}|} | I_r(t) |^p \, dt = \frac{1}{2\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} | I_r(t) |^p \, dt = \frac{1}{r^p} \| I_r \|_p^p$$

Obviamente, $\| h \| = \| I \|$. Entonces la aplicación lineal $h \rightarrow I$ de H^p sobre B definida por $I(z) = z h(z^2)$ define un isomorfismo. Estos resultados demuestran finalmente que H^p es isomorfo a $H^p \times H^p$, $1 \leqslant p < \infty$.

Definimos $L^{\infty}(T)$ como la clase de todas las funciones complejas, medibles Lebesgue, de período 2π sobre R^1 para las cuales la norma supremo esencial es acotada, y entonces extendemos la definición de H^p al caso $p = \infty$. Con la modificación correspondiente en el tratamiento de la norma, el teorema anterior también es válido para $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

BIBLIOGRAFIA

(1) HOFFMAN, K., *Banach Spaces of Analytic Functions.* Prentice - Hall, Inc., Englewood cliffs, N. J. (1962).

(2) BESSAGA, C. y PELCZYNSKI, A., *Banach Spaces Non-isomorphic to their Cartesian Squares,* I. Bull. Acad. Polonaise de Sciences Sor. Math. Astr. et Phys., Vol. VIII (1960).

(3) SEMADONI, Z., *Banach Spaces Non - isomorphic to their Cartesian Squares,* II. Bull. Acad. Polonaise des Sciences ser. Math. et Phys., Vol. VIII (1960).