Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 25, 1970.

SUBESPACIOS IN Y EL CALCULO FUNCIONAL DE SZ.-NAGY Y FOIAS

por Domingo A.Herrero*

Dedicado al profesor Alberto González Domínguez

I. INTRODUCCION.

Sea K un espacio de Hilbert complejo y separable con producto interno $(.,.)$ y norma $\|\cdot\|_K$ y consideremos el espacio de Hardy H_K^2 de las funciones (analíticas) de cuadrado sumable en ∂D ($D = \{z:|z|<1\}$) con valores en K. Es decir, H_K^2 es el espacio de las (clases de equivalencia de) funciones $F:\partial D \to K$ tales que:

1) $(F(e^{ix}),\phi) \in H^2$ (espacio de Hardy *escalar*), para todo $\phi \in K$,

2) $\int_{\partial D} \|F(e^{ix})\|_K^2\, dx < \infty$,

con la relación de equivalencia usual $F_1 \sim F_2$ si y sólo si

$$\int_{\partial D} \|F_1(e^{ix})-F_2(e^{ix})\|_K^2\, dx = 0 .$$

H_K^2 es un espacio de Hilbert complejo y separable con producto interno

$$\langle F,G\rangle = \int_{\partial D} (F(e^{ix}),G(e^{ix}))dx/2\pi ,$$

y las funciones H_K^2 pueden extenderse de manera natural a funciones analíticas en D con valores en K (indicaremos la extensión analítica de $F \in H_K^2$ mediante $F(z)$; ver detalles en 5).

Un *subespacio invariante* de H_K^2 es, por definición, un subespacio cerrado M tal que $SM \subset M$, siendo S el operador "multiplicación por e^{ix}".

* Este trabajo está parcialmente subsidiado por Grant GP-14255 de la National Science Foundation.

El subespacio (obviamente cerrado) $K = M^{\perp}$ es invariante bajo $S^{\#}$, el adjunto de S. Sea T el adjunto de $S^{\#}$, considerado como operador en K; es fácil verificar que T es una contracción completamente no unitaria de K. La afirmación inversa es también cierta; dicho en forma más precisa: "Toda contracción completamente no unitaria de un espacio de Hilbert separable y complejo es unitariamente equivalente a un operador T del tipo descrito, operando en el complemento ortogonal de algún subespacio invariante". (ver: 8, capítulo III).

Sobre esta base, Bela Sz.-Nagy y Ciprian Foias, han desarrollado el siguiente cálculo funcional:

Sean K y T como antes, y sea $U \in H^{\infty}$ (espacio de las funciones analíticas uniformemente acotadas en D); para $F \in K$, definimos

(1) $$u(T)(F) = P(uF) \quad ,$$

siendo P la proyección ortogonal de H^2_K sobre K. (En particular, se tiene que: $TF = P(zF) = P(SF)$).

La aplicación $u(z) \to u(T)$ es un homomorfismo de algebras de H^{∞} en el conjunto de los operadores acotados en K, con las siguientes propiedades (8, cap. III):

(i) u(T) es límite fuerte de polinomios en T, y $\|u(T)\| \leqslant \|u(z)\|_{\infty}$

($\|\cdot\|$ indica la norma de un elemento de H^2_K, o bien, como en este caso, la norma de un operador en K).

(ii) Si $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones uniformemente acotadas que convergen en casi todo punto (c.t.p.) de ∂D a $u(e^{ix})$ (valores límites de u(z)), entonces $u_n(T)$ converge fuertemente a u(T).

(iii) Si $\tilde{u}(z) = \overline{u(\bar{z})}$, entonces $u(T)^* = \tilde{u}(T^*)$.

(aquí T* indica el adjunto del operador en K).

Las propiedades de u(T) dependen obviamente del subespacio invariante M, y han sido objeto de estudio por varios autores. Por ejemplo,

D. Sarason (7) se ocupó del caso en que el "espacio base" K tiene dimensión uno, logrando el siguiente resultado: "Sea L un operador lineal y continuo en K; entonces, L conmuta con T si y sólo si existe una función $u \in H^{\infty}$ tal que $L = u(T)$".

El resultado más general de este tipo fue estudiado por varios autores, entre ellos Sz.-Nagy y Foias (9; ver también 2 y 4).

En (3), Paul A. Fuhrmann analiza las propiedades espectrales de $u(T)$ para el caso en que $\dim K = N < \infty$.

Algunos resultados de (3) admiten una extensión bastante natural, no para el caso más general, pero sí al menos para un espacio K de infinitas dimensiones y un subespacio invariante de tipo restringido, a saber:

DEFINICION. *Sea M un subespacio invariante de H^2_K para el cual existe una función (escalar) interior* q *tal que* $qH^2_K \subset M$. *En tal caso, diremos que M es un subespacio* IN.

II. ANALISIS ESPECTRAL.

Los subespacios IN han sido estudiados en la tesis del autor (6), y de allí tomamos el siguiente resultado:

PROPOSICION 1. *Si M es un subespacio* IN, *entonces existen un operador interior* U *(es decir,* U *es una función definida en c.t.p. de* ∂D, *con valores en los operadores unitarios de* K, *tal que* $U(e^{ix})\phi \in H^2_K$, *para todo* $\phi \in K$*) y una función interior* q, *tales que:*

(i) $M = UH^2_K$, *y* U *está unívocamente determinado por M, a menos de un factor unitario constante a derecha*,

(ii) $qH^2_K \subset M$, *y* $\bar{p}q \in H^{\infty}$, *para toda función interior* p *tal que* $pH^2_K \subset M$.

El operador interior U es el operador IN de M y q es la función interior minimal (FIM) del subespacio. Algunos de los resultados que siguen pueden probarse exactamente como en (3), de modo que omitiremos su demostración.

LEMA 2. *Sea* $M = UH_K^2$ *un subespacio invariante de* H_K^2 *y* U *su operador interior (no necesariamente* IN*). Si* u(T) *(*u(T*)*, resp.) tiene inversa acotada en* K*, entonces existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$|u(z)| + \|U^{-1}(z)\|_K^{-1} \geqslant \delta \qquad (|u(\bar{z})| + \|U^{-1}(z)\|_K^{-1} \geqslant \delta, \text{ resp.}),$$

donde $\|U^{-1}(z)\|_K^{-1}$ *se define igual a cero si* U(z) *no es invertible en* K*, para todo* $z \in D$*. (3, teor. 2.3)*

LEMA 3. (i) *Sean* M *y* U *como en el lema 2 y sea* $\tilde{M} = \tilde{U}H_K^2$*, donde* $\tilde{U}(z) = U^*(\bar{z})$*, y* $\tilde{K} = \tilde{M}^{\perp}$ *. Entonces,* T *operando en* K *es unitariamente equivalente a* $S^{\#}$ *operando en* $\tilde{K}$.

(ii) *Si* U *es un operador* IN *con* FIM q*, entonces* $\tilde{U}$ *es un operador* IN *con* FIM $\tilde{q}$.

LEMA 4. *Sean* M *y* U *como en el lema 2 y sea* $\lambda \in D$.

(i) $\bar{\lambda} \in \Sigma_p(T^*)$ *si y sólo si el núcleo de* $U^*(\lambda)$ *es distinto de* (0)*. Las autofunciones (normalizadas) de* T^* *tienen la forma* $[(1-|\lambda|^2)^{1/2}/(1-\bar{\lambda}z)]\,\phi$*, siendo* ϕ *un vector unitario de* K *para el cual* $U^*(\lambda)\phi = 0$.

(ii) $\lambda \in \Sigma_p(T)$ *si y sólo si* $\ker U(\lambda) \neq 0$ *. Las autofunciones (normalizadas) de* T *tienen la forma* $V\phi$*, siendo* ϕ *un vector unitario de* K *para el cual* $U(\lambda)\phi = 0$*, y* V *el siguiente operador interior: si* R *es la proyección ortogonal de* K *sobre* $\ker U(\lambda)$, $b(z,\lambda)$ *es el factor elemental de Blaschke* $(\bar{\lambda}/|\lambda|)(\lambda-z)/(1-\bar{\lambda}z)$ *(*$\bar{\lambda}/|\lambda|$ *se define igual a* (-1) *si* $\lambda = 0$*), y*

$$B(z) = (I-R) + b(z,\lambda)R \quad ,$$

entonces

$$V(e^{ix}) = U(e^{ix}).B^*(e^{ix}) .$$

La demostración de este lema está contenida en los resultados de (6, cap. III).

TEOREMA 5. (a) *Sean* M *y* U *como siempre. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) M *es un subespacio* IN.

(ii) *El núcleo de la aplicación* $j: u(z) \to u(T)$ *es distinto de* (0).

(iii) *Existe una función "no invertible"* $u \in H^\infty$ *tal que* $u(T)$ *es invertible en* K *y* $[u(T)]^{-1} = v(T)$ *para cierta función* $v \in H^\infty$.

(b) *Supongamos que vale* (i) *y que* q *es la* FIM *de* M*; entonces la condición*

$$(2) \quad \inf\{|u(z)| + |q(z)| : z \in D\} \geqslant \delta \quad (\delta > 0)$$

es necesaria y suficiente para que $u(T)$ *sea invertible, y que dicha inversa pueda expresarse en la forma* $v(T)$*, con* $v \in H^\infty$.

NOTA. Luego veremos que $u(t)$ puede ser invertible aún cuando no se satisfaga (2).

Demostración. (a) (i) *es equivalente a* (ii). Es fácil verificar que, para una función $p \in H^\infty$, las siguientes condiciones son equivalentes:

$$1) \quad p(T) = 0 \quad ; \quad 2) \quad pF \in M, \text{ para todo } F \in K \quad ; \quad 3) \quad pH^2_K \subset M \,.$$

Por otra parte, ker (j) es invariante bajo multiplicación por e^{ix} y w^*-cerrado en H^∞. Por lo tanto (ver 5, cap. IV), o bien ker (j) = (0), o bien ker (j) = qH^∞, para alguna función interior q. (Si q es constante, entonces es obvio que $K = (0)$; supondremos que no es éste el caso).

En consecuencia: ker (j) = $qH^\infty \neq (0)$ si y sólo si M es IN con FIM igual a q.

(iii) $\Rightarrow$ (i) *y condición necesaria en* (b): Supongamos que u, $v \in H^\infty$, u no invertible y $[u(T)]^{-1} = v(T)$.

Dado que j es un homomorfismo, tenemos que

$$I = u(T)v(T) = v(T)u(T) = uv(T) \quad , \text{ en } K \; ;$$

es decir: $F = PF = P(uvF)$, y por tanto $0 = P(1-uv)F$, para toda $F \in K$, lo cual implica $(1-uv)H_K^2 \subset M$.

Ahora bien, dado que U no es invertible, $1-uv \neq 0$. Si p es el factor interior de $(1-uv)$, entonces

$$pH_K^2 = \text{clausura}\,[(1-uv)H_K^2] \subset M \quad ;$$

de donde se deduce que M es un subespacio IN, cuya FIM, q, divide a p. Luego, existe $g \in H^\infty$ tal que

$$uv + qg = 1 \quad ,$$

y de aquí se sigue la validez de (2), en caso en que u no es invertible. Si u es invertible en H^∞, entonces (2) se satisface trivialmente poniendo $\delta = \|u^{-1}\|_\infty^{-1}$.

En este caso $[u(T)]^{-1} = (u^{-1})(T)$, como es fácil verificar; esto demuestra que si u es invertible, entonces la condición (2) de (b) es también suficiente.

Condición suficiente en (b). Sea M un subespacio IN con FIM q y sea $u \in H^\infty$ tal que se cumple (2).

De acuerdo al *teorema de la corona,* de Carleson (1), existen dos funciones $a,b \in H^\infty$ tales que

$$\text{(3)} \qquad au + bq = 1 \quad , \text{ en } D \; .$$

Aplicando j a la identidad (3), se tiene

$$I = (au+bq)(T) = au(T) = a(T)u(T) = u(T)a(T)$$

(en efecto, $bq(T) = b(T)q(T)$, y $q(T) = 0$, por las observaciones que hemos hecho al principio de la demostración); por lo tanto

$$[u(T)]^{-1} = a(T) \quad .$$

(i) $\Rightarrow$ (iii) Sea $\lambda \in D$ tal que $q(\lambda) \neq 0$, y pongamos $u(z) = z-\lambda$; es evidente que $u(z)$ es una función no invertible de H^∞, y que vale

(2). Sin embargo, u(T) es invertible en K y su inversa puede escribirse en la forma a(T), para cierta función $a \in H^{\infty}$. Q.E.D.

Si dim $K = N < \infty$, entonces el determinante de U satisface las condiciones:

1) $(\det U)H^2_K \subset M$,

2) $|q(z)|^{-1} \leqslant |\det U(z)|^{-1} \leqslant \|U^{-1}(z)\|^N_K \leqslant |q(z)|^{-N}$,

para todo $z \in D$, tal que $q(z) \neq 0$.

Se tiene así el siguiente

COROLARIO 6 (teor. 2.3, en 3). *Si* dim $K < \infty$, *entonces la condición* (2) *del teorema 5,* (b) *es necesaria y suficiente para la existencia de* $[u(T)]^{-1}$. *Más aún, en* (2), $q(z)$ *puede reemplazarse por* det $U(z)$.

Si u(T) *es invertible en* K, *entonces su inversa puede expresarse en la forma* v(T), *con* $v \in H^{\infty}$.

Usando el *teorema 13* de (5, cap. VIII) y los resultados de (3), tenemos:

COROLARIO 7. *Sea* U *un operador* IN *y* $u \in H^{\infty}$. *Se tiene que:*

(i) *Si* $\lambda \in D$, *y* $U(\lambda)$ *no es invertible en* K, *entonces* $u(\lambda)$ *pertenece al espectro de* u(T).

(ii) *Si* $\lambda \in \partial D$, U(z) *no puede continuarse analíticamente a* $z = \lambda$, *y* u *puede extenderse en forma continua a* $D \cup \{\lambda\}$, *entonces* $u(\lambda)$ *pertenece al espectro de* u(T).

TEOREMA 8. *Sea* U *un operador* IN. *Si* u *puede ser continuamente extendida a la clausura de* D, *entonces*

$$\Sigma(u(T)) = u(\Sigma(T)) \ .$$

LEMA 9. *Sea* M *un subespacio invariante (cualquiera) de* H^2_K, *y*

$u \in H^{\infty}$, $u \not\equiv 0$. *Entonces* $\ker u(T) \neq (0)$ *si y sólo si existe una función* $F \in H^2_K - M$, *y una función interior* p *tales que* $pF \in M$ *y* $\bar{p}u \in H^{\infty}$.

Demostración. Si F y p satisfacen las condiciones del enunciado, es evidente que $PF \neq 0$ y que p no puede ser constante; además, PF y p también satisfacen dichas condiciones. Por lo tanto, podemos suponer directamente que F es una función de K, $F \neq 0$. Entonces

$$u(T)(F) = P(uF) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad uF \in M\ ,$$

y esto equivale a decir que $pF \in M$, para algún divisor interior p de la función u (p no constante). Q.E.D.

TEOREMA 10. *Sea* M *un subespacio* IN *con* FIM q, *y* $u \in H^{\infty}$. *Entonces,* $\ker u(T) \neq (0)$ *si y sólo si* u *y* q *admiten un factor interior común, no trivial.*

Demostración. Es claro que si la función p del *lema 9* es elegida minimal con respecto a la condición $pF \in M$, entonces: $\bar{p}q \in H^{\infty}$, lo cual prueba el enunciado directo.

En el otro sentido: si $\bar{p}q$, $\bar{p}u \in H^{\infty}$, con p interior, y $p \neq 1$, entonces:

1) Si $p = q$, entonces $u(T) = 0$ y $\ker u(T) = K$.

2) Si $p \neq q$, sea $M_p = \{F \in H^2_K : pF \in M\}$; entonces M_p es un subespacio invariante (IN) que contiene a M, y su FIM es igual a $\bar{p}q$ (ver 6, cap. II). Por lo tanto, M_p es estrictamente más grande que M, y si $F \in M_p - M$, entonces PF es una función de K tal que $PF \neq 0$, y $pPF \in M$. En conclusión: $uF = (\bar{p}u)pF \in M$, y por tanto, $\ker u(T) \neq (0)$. Q.E.D.

COROLARIO 11. *Sea* M *un subespacio* IN *con* FIM q, *y* $u \in H^{\infty}$, $u \neq 0$. *Entonces* $\ker u(T^*) \neq (0)$ *si y sólo si* u *y* $\tilde{q}$ *admiten un factor interior común, no trivial.*

Demostración. Usar el *lema 3* y el *teorema 10*.

COROLARIO 12. *Sea* M *un subespacio* IN. *Entonces el espectro "residual" de* u(T) *es vacío, para todo* $u \in H^{\infty}$. (igual demostración que en (3, *cor. 2.10*)).

III. EJEMPLOS.

Para terminar, ilustraremos los resultados con dos ejemplos. En el primero de ellos veremos que el *corolario 6* no puede extenderse al caso en que K es de dimensión infinita, ni aun cuando el operador U pertenece al tipo más restringido de operadores analíticos para los cuales se puede definir el determinante.

Probaremos que existe un operador U y una función interior u, no constante, tales que:

1) U es IN , y
FIM de U = determinante de U(z) = q(z) es un producto de Blaschke,

2) $|u(z)| + \|U^{-1}(z)\|_K^{-1} \geqslant (1/4)$, $(z \in D)$,

3) $\inf \{|u(z)| + |q(z)| : z \in D\} = 0$,

4) u(T) es invertible en K (obviamente, el operador inverso de u(T) no puede expresarse en la forma v(T), con $v \in H^{\infty}$).

Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal y completo en K, y definamos U como el operador "diagonal" tal que

$$U(z)\phi_n = b(z,r_n)\phi_n \quad , \quad n = 1,2,\ldots \quad ,$$

donde los ceros de los factores de Blaschke elementales satisfacen la condición $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n < 1$, y $q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} b(z,r_n)$ es un producto de Blaschke convergente.

En estas condiciones, 1) se cumple trivialmente.

No es difícil verificar que (2,*lema 3.2*) si $D_{\pm R}$ son los círculos cuyas circunferencias pasan por $\{-1,\pm iR,+1\}$, $0 < R < 1$, entonces $\|U^{-1}(z)\|_K^{-1} \geqslant R$, para todo z en el conjunto: $D-\{D_{+R} \cap D_{-R}\}$.

Sea $u(z) = \prod_{k=1}^{\infty} b(z,\lambda_k)$ un producto de Blaschke cuyos ceros corresponden a puntos de la circunferencia que pasa por los puntos $\{-1,(3/4)i,+1\}$ y satisfacen la condición

$$0 < \mathrm{Re}\ \lambda_1 < \mathrm{Re}\ \lambda_2 < \ldots < \mathrm{Re}\ \lambda_k \to 1 \quad , \quad k \to \infty .$$

Es inmediato que, si λ_n tiende a 1 suficientemente rápido, entonces la condición 2) se satisface, independientemente de cómo estén distribuídos los ceros, r_n, de $U(z)$.

Ahora procederemos a elegir estos ceros.

Sea $R_k = \mathrm{Re}\ \lambda_k$, $p(z) = \prod_{k=1}^{\infty} b^{m_k}(z,R_k)$, donde $\{m_k\}$ es una sucesión no decreciente de enteros positivos que tiende a $+\infty$ lo bastante despacio para que

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k(1-R_k) < \infty$$

(es decir, el producto $p(z)$ es convergente).

Por otra parte, no es difícil ver que la sucesión $\{m_k\}$ puede elegirse de modo que valga 3), es decir,

$$\inf \{|u(z)| + |p(z)| : |z|<R\} \to 0 \ , \ \text{cuando } R \to 1 .$$

Para cada k fijo, reemplazamos $b^{m_k}(z,R_k)$ por $\prod_{h=1}^{m_k} b(z,R_{kh})$, donde los valores R_{kh} están elegidos de modo tal que

$$R_k < R_{k1} < R_{k2} < \ldots < R_{km_k} < R_{k+1} < \ldots < 1 ,$$

y si $q(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{h=1}^{m_k} b(z,R_{kh})$, la condición 3) sigue valiendo para $u(z)$ y $q(z)$.

Sólo resta verificar 4). Para esto, observemos que

$$M = UH_K^2 = \oplus_{n=1}^{\infty}[b(z,r_n)H^2\phi_n] \ , \ K = M^{\perp} = \oplus_{n=1}^{\infty}\{cg_{r_n}\phi_n : c \in C\}$$

(sumas directas ortogonales), donde

$$g_r(z) = (1-r^2)^{1/2}/(1-rz) \quad .$$

Así, si $F \in K$, entonces $F = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_{r_n}\phi_n$, $(c_n \in C)$, $\|F\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 < \infty$, y

$$u(T)(F) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n < ug_{r_n}\phi_n, g_{r_n}\phi_n > g_{r_n}\phi_n \quad .$$

Es decir, $u(T)$ es un operador normal en K, diagonalizable con respecto al sistema ortonormal y completo $\{g_{r_n}\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$; el n-ésimo coeficiente de la diagonal es

$$d_n = <ug_{r_n}\phi_n, g_{r_n}\varphi_n> = \int_{\partial D} u(e^{ix}) \, |g_{r_n}(e^{ix})|^2 \, dx/2\pi =$$

$$= \int_{\partial D} u(e^{ix})[(1-r_n)^2/(1+r_n^2-2r_n\cos x)] \, dx/2\pi = u(r_n) \ .$$

De esta igualdad y de 1), deducimos que $u(T)$ es invertible, y $\|[u(T)]^{-1}\| \leqslant 4$, lo cual prueba 4).

Vayamos al segundo ejemplo. Si M es un subespacio IN con FIM q, entonces se sigue de los resultados de (8, cap. III; ver *propiedad* (ii), en la *introducción*) y de la demostración del *teorema 5* que si $q_r(z) = q(rz)$ $(z \in D)$, entonces

$$\lim q_r(T) = q(T) = 0 \ , \ (r \to 1) \ ,$$

en la topología fuerte. Ahora bien, aquí $q_r(T)$ debe entenderse en el sentido del cálculo funcional (es decir, "vía" la proyección P, etc.). ¿Es posible darle un sentido más directo a la expresión anterior?.

Esto es posible, al menos para los productos de Blaschke. Si

$$q(z) = \prod_{k=1}^{N} [b(z,\lambda_k)]^{m_k} \quad ,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ son los distintos ceros de q en D, entonces $q(z) = m(z)\prod_{k=1}^{N}(z-\lambda_k)$, donde $m(z)$ es cierta función invertible de H^{∞}, y no es difícil ver que $q_r(T)$ converge a $q(T) = 0$ en la topología de la norma; se obtiene así el siguiente resultado

COROLARIO 13. *Si M es un subespacio IN cuya FIM es el producto de Blaschke finito $q(z)$ (como fue definido más arriba), entonces* $\prod_{k=1}^{N}(T-\lambda_k)^{m_k} = 0$ *, siendo este producto un polinomio en T (como operador en K) en el sentido usual.*

Más aún, $\prod_{k=1}^{N}(z-\lambda_k)^{m_k}$ *es el polinomio "minimal" de* T.

Inversamente, si M *es un subespacio invariante y* T, *el operador adjunto de* $S^{\#}$ *restringido a* $K = M^{\perp}$, *satisface una ecuación polinómica, entonces* M *es un subespacio* IN *y su* FIM *es un producto de Blaschke finito conectado con el polinomio mínimo de* T *de la manera indicada.*

La demostración completa de este corolario fue obtenida en (6) usando argumentos directos; de (6, cap. III) también se puede extraer el siguiente resultado:

PROPOSICION 14. *Sea* M *un subespacio* IN *cuya* FIM *es el producto de Blaschke* $q(z) = \prod_{k=1}^{\infty} b^{m_k}(z,\lambda_k)$ *, y sea* K *el complemento ortogonal de* M. *Entonces* K *admite la descomposición*

$$K = \oplus_{k=1}^{\infty} K_k \qquad \text{(suma directa cerrada),}$$

donde $(T_k-\lambda_k)^{m_k} = 0$ *(*T_k *indica la restricción de* T *a* K_k*), para* $k = 1,2,\ldots$.

Si, además, $b(T,\lambda_k) = (\overline{\lambda_k}/|\lambda_k|)(\lambda_k - T)(I-\overline{\lambda_k}T)^{-1}$ *(entendido como el límite uniforme de la serie de Taylor!), y* $T_N = \prod_{k=1}^{N} b^{m_k}(T,\lambda_k)$, *entonces* $\|T_N\| \leqslant 1$ *, para todo* N,

$$\lim T_N = 0 \ , \ (N \to \infty) \quad ,$$

en la topología fuerte.

REFERENCIAS

[1] CARLESON LENNART, *Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. of Math. (2) 76 (1962), 547-559.

[2] CLARK DOUGLAS N, *On commuting contractions*, (comunicación personal).

[3] FUHRMANN PAUL A., *On the corona theorem and its aplication to spectral problems in Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc., 132 (1968), 55-66.

[4] ----------------, *A functional calculus in Hilbert space based on operator valued analytic functions*, Israel J. of Math., 6 (1968), 267-278.

[5] HELSON HENRY, *Lectures on invariant subspaces*, Academic Press, Princeton, New Jersey, 1964.

[6] HERRERO DOMINGO A., *Inner function-operators*, trabajo de tesis, Universidad de Chicago, 1970.

[7] SARASON DONALD, *Generalized interpolation in* H^∞, Trans. Amer. Math. Soc., 127 (1967), 179-203.

[8] SZ.-NAGY BELA Y FOIAS C., *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Akademiai Kiado, Budapest, 1967.

[9] -------------------------, *Commutants de certain opérateurs*, Acta Scientiarum Math. (Szeged), XXIX (1968), 1-17.

Universidad de Chicago.
Chicago, Illinois.

Recibido en marzo de 1970.