Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 26, 1973.

PROYECCIONES SOBRE CONJUNTOS CONVEXOS EN EL ESPACIO DE HILBERT Y TEORIA ESPECTRAL[1]

Eduardo H. Zarantonello

1. PROPIEDADES BASICAS.

Sea H un espacio de Hilbert real y K un subconjunto cerrado convexo en H. La operación $x \longrightarrow P_K x$ que asigna a cada punto de H el punto mas próximo en K se denomina la *proyección* sobre K; si K es un subespacio lineal P_K es la proyección ortogonal sobre K. La existencia y unicidad de $P_K x$ son hechos bien conocidos de la geometría del espacio de Hilbert. Juntamente con $P_K x \in K$ las relaciones

$$(1.1) \qquad \|x - P_K x\| \leqslant \|x - y\| , \qquad \forall\, y \in K ,$$

caracterizan $P_K x$; el conjunto K es el rango y a la vez el conjunto de puntos fijos de P_K. Las ecuaciones variacionales correspondientes a la minimización de la distancia son

$$(1.2) \qquad \langle x - P_K x , P_K x - y\rangle \geqslant 0 , \qquad \forall\, y \in K ;$$

ellas también caracterizan $P_K x$. Estas relaciones son mucho más manejables que las relaciones (1.1) y de ellas resultan de inmediato numerosas propiedades de P_K. En primer lugar:

TEOREMA 1.1.. *Una aplicación* $P:H \longrightarrow H$ [2] *es la restricción de una*

(1) Conferencia pronunciada en la Reunión Anual de la Uma; Tandil, Octubre de 1972. Extraida del artículo del autor "Projections on convex sets in Hilbert space and spectral theory" en el libro "Contributions to nonlinear functional analysis", E.H. Zarantonello editor, Academic Press, New York, 1971.

(2) Esta notación indica que el rango y el dominio de P están contenidos en H, y de ningún modo supone que el dominio sea todo el espacio. En lo que sigue el paréntesis angular indica el producto escalar en H, y la doble barra la norma.

proyección si y sólo si

(1.3) $\langle x - Px , Px - Py\rangle \geqslant 0 \quad , \quad \forall\, x,y \in D(P).$

Si se suma a (1.3) la relación que resulta de permutar x con y se obtiene

(1.4) $\langle (I-P)x - (I-P)y , Px - Py\rangle \geqslant 0 \quad , \quad \forall\, x,y \in H,$

relación que también puede escribirse en las formas siguientes:

(1.5) $\langle x - y , Px - Py\rangle \geqslant \|Px - Py\|^2 \quad , \quad \forall\, x,y \in H ,$

(1.6) $\langle x - y , (I-P)x - (I-P)y\rangle \geqslant \|(I-P)x - (I-P)y\|^2, \quad \forall\, x,y \in H.$

Aquí I indica la transformación idéntica. Estas tres desigualdades, naturalmente satisfechas por las proyecciones, simplemente dicen que la aplicación $Q = 2P-I$ es no-expansiva, es decir, que $\|Qx - Qy\| \leqslant \|x - y\|$. En el caso de una proyección la operación $2P_K-I$ aplica todo punto del espacio en su simétrico respecto de su proyección sobre K; se la denomina *simetría con respecto a* K. Por simple inspección de (1.4)-(1.6) y aplicación de la desigualdad de Schwarz se obtiene:

TEOREMA 1.2. *Si* K *es un conjunto convexo cerrado, los operadores* $P_K, I-P_K, 2P_K-I$ *son no expansivos; además, los dos primeros son monótonos.*

Utilizando las operaciones P^{-1} y $(I-P)^{-1}$, no necesariamente uniformes, las relaciones (1.5) y (1.6) pueden expresarse diciendo que $P^{-1}-I$ y $(I-P)^{-1}-I$ son operadores monótonos. De esta observación resulta la siguiente caracterización de las proyecciones en términos de idempotencia y monotonía:

TEOREMA 1.3. *Toda aplicación* $P:H \rightarrow H$ *que posee las propiedades*

(1.7) $D(P) \supset R(P) \quad , \quad P^2 = P \quad , \quad P^{-1}-I$ *monótona,*

es la restricción de una proyección, y recíprocamente.

Puesto que no agrandan la distancia las proyecciones y sus complementos son operaciones continuas. En general no son continuas con respecto a la topología débil en el dominio y en el rango, pero son *cerradas* en el siguiente sentido:

TEOREMA 1.4. *Para toda proyección* P_K *sobre un convexo cerrado*

$$\{x_\alpha \rightarrow x\ ,\ \overline{\lim}\ \|x_\alpha\| < +\infty\ ,\ P_K x_\alpha \rightarrow y\} \Rightarrow \{y = P_K x\} \tag{1.8}$$

$$\{x_\alpha \rightarrow x\ ,\ \overline{\lim}\ \|x_\alpha\| < +\infty\ ,\ (I-P_K)x_\alpha \rightarrow y\} \Rightarrow \{y = (I-P_K)x\}. \tag{1.9}$$

Las proyecciones forman una familia muy especial dentro de la clase de funciones que satisfacen (1.4). Ya se ha visto que son las únicas que son idempotentes; más sorprendente es su condición de puntos extremales, que expresamos en términos de simetrías y contracciones:

TEOREMA 1.5. *Módulo traslaciones las simetrías y sus opuestas son puntos extremales en el conjunto convexo de las operaciones no expansivas.*

En vista que (1.4) es invariante ante la sustitución de P por I-P el siguiente resultado es particularmente significativo:

TEOREMA 1.6. $I-P_K$ *es una proyección si y sólo si* K *es un cono convexo cerrado con vértice en el orígen. En este caso* $I-P_K = P_{K^\perp}$ *donde*

$$K^\perp = \{y \mid \langle y\ ,\ x\rangle \leqslant 0\ ,\ \forall x \in K\} \tag{1.10}$$

es el cono dual de K, *y en consecuencia*

$$x = P_K x + P_{K^\perp} x\ ,\quad \forall x \in H \tag{1.11}$$

Los vectores $P_K x$ y $P_{K^\perp} x$ son ortogonales, y (1.11) proporciona la única descomposición de x en suma de dos vectores ortogonales, uno en K y otro en $K^\perp$.

Las proyecciones sobre conos convexos cerrados con vértice en el origen tienen su origen en la condición que los complementos de las proyecciones sean también proyecciones y por esta razón juegan un papel muy importante en nuestra teoría. Obsérvese que son positivamente homogéneas y satisfacen la identidad

(1.12) $\langle x\ ,\ Px\rangle = \|Px\|^2$.

En general $I-P_K$ no es una proyección, no obstante su rango no dista mucho de ser un cono convexo con vértice en el origen. En efecto se tiene

(1.13) $\overline{R(I-P_K)} = (K^\infty)^\perp$,

donde K^∞ es el llamado *cono de receso* de K, definido así:

(1.14) $K^\infty = \{u \mid x + tu \in K,\ \forall x \in K,\ \forall t \geqslant 0\}$.

El cono de receso de K es el mayor cono convexo cerrado con vértice en el origen que por traslación puede instalarse en K; también puede ser concebido como el conjunto de traslaciones que mantienen a K dentro de si mismo.

Otros elementos geométricos de un convexo K se expresan naturalmente en términos de P_K. Así por ejemplo, $(P_K^{-1}-I)x$ es el dual del cono soporte en x y se denomina el *vértice de* K *en* x; analogamente, $((I-P_K)^{-1}-I)u$ es la *cara de* K *perpendicular a* u. De este modo ciertas peculiaridades geométricas de K se trasladan a propiedades del operador P_K. El lector hallará numerosas instancias de esta situación en el 2° y 3er capítulo del artículo precitado.

Es fácil advertir que en general las proyecciones no son diferenciables en todos los puntos, si bien, por un conocido teorema de Rademacher, son diferenciables en casi todos los puntos cuando actúan sobre un espacio de dimensión finita. De mayor significación es el hecho que las proyecciones sean las operaciones gradientes que satisfacen una cierta ecuación diferencial:

TEOREMA 1.7. *Una aplicación lipschitziana* $P:H \to H$, $D(P) = H$, *es una proyección si y sólo si satisface la ecuación diferencial*

(1.15) $(I-P)x = \nabla \frac{1}{2} \|(I-P)x\|^2$

2. EL ALGEBRA DE LAS PROYECCIONES.

La clase de proyecciones sobre espacios lineales tiene propiedades algebraicas muy simples que dan lugar a la posibilidad de efectuar la síntesis espectral de varios tipos de operadores lineales a partir de proyecciones. Es natural pues investigar en que medida estas propiedades se extienden a proyecciones en general. En este sentido los resultados que se obtienen no pueden ser más halagüeños, pues se descubre que, a pesar de las manifiestas diferencias que puede haber entre un convexo y un espacio lineal, el comportamiento de las proyecciones en general no difiere mayormente del de las proyecciones lineales. Esta semejanza se hace más marcada cuando se consideran proyecciones sobre conos, cuya álgebra retiene precisamente aquellas propiedades que hacen posible una teoría espectral. En este caso los operadores sintetizados o analizados no son necesariamente lineales. De la teoría espectral nos ocuparemos en el § 3; aquí, completando esta reseña sobre proyecciones, nos limitaremos a considerar el significado de las relaciones: $P_{K_2}P_{K_1} = P_{K_2}$, $P_{K_1} + P_{K_2} = P_{K_3}$, $P_{K_1}P_{K_2} = P_{K_2}P_{K_1}$.

Si K_1 y K_2 son espacios lineales la relación $P_{K_2}P_{K_1} = P_{K_2}$ equivavale a $P_{K_1}P_{K_2} = P_{K_2}$ la cual simplemente dice que $K_2 \subset K_1$, en cuyo caso $P_{K_1} - P_{K_2}$ es una proyección, precisamente la proyección sobre el complemento ortogonal de K_2 en K_1. Que las cosas no ocurren así en el caso general se advierte de inmediato considerando el ejemplo en que K_2 se reduce a un punto. El teorema siguiente revela sin embargo notables semejanzas entre uno y otro caso:

TEOREMA 2.1. *Las siguientes relaciones son equivalentes*:

(2.1) $$P_{K_2}P_{K_1} = P_{K_2},$$

(2.2) $$R(P_{K_1} - P_{K_2}) + K_2 \subset K_1,$$

(2.3) $$P_{K_1} - P_{K_2} = P_{\tau(K_2,K_1)}(I-P_{K_2})$$

donde $\tau(K_2,K_1) = \{u \mid K_2+u \subset K_1\}$. *Además si* v *es el desplazamiento mínimo que pone* K_2 *en contacto con* K_1, *la relación* (2.1) *implica*

(2.4) $$P_{K_2+v}P_{K_1} = P_{K_1}P_{K_2+v} = P_{K_2+v}.$$

En el caso de conos convexos con vértice en el origen C_1 y C_2 este teorema adquiere la forma:

TEOREMA 2.2. *La relación* $P_{C_2} P_{C_1} = P_{C_2}$ *equivale a decir que* $P_{C_1} - P_{C_2}$ *es una proyección; en este caso las proyecciones* P_{C_1}, P_{C_2}, $P_{C_1^\perp}$, $P_{C_2^\perp}$ *conmutan entre sí y sus productos coinciden con las proyecciones sobre las intersecciones de los respectivos conos. Por pasaje a conos duales la relación* $P_{C_2} P_{C_1} = P_{C_2}$ *se convierte en* $P_{C_1^\perp} P_{C_2^\perp} = P_{C_1^\perp}$.

Pasemos ahora a la consideración de la relación $P_{K_1} + P_{K_2} = P_{K_3}$. En el caso lineal esta relación es posible si y sólo si K_1 y K_2 son ortogonales y si K_3 es la suma directa de K_1 y K_2. En el caso general la situación no ha sido aún completamente elucidada, pero se perciben notables analogías. En todo caso siempre resulta que $K_3 = K_1 + K_2$ y que en cierto modo K_1 y K_2 deben ser ortogonales. La presentación de los detalles no es posible, pues requiere conceptos no discutidos aquí. Para conos convexos con vértice en el origen los resultados obtenidos para el caso general adquieren la forma:

TEOREMA 2.3. *La relación*

(2.5) $\quad P_{C_1} + P_{C_2} = P_K$

implica

(2.6) $\quad K = C_1 + C_2 \ , \quad C_1 = C_2^\perp \cap (C_1 + C_2) \quad , \quad C_2 = C_1^\perp \cap (C_1 + C_2)$.

No se sabe si recíprocamente (2.6) implican (2.5). Una condición necesaria y suficiente enteramente análoga a la que existe en el caso lineal puede enunciarse en términos de la noción de "proyecciones ortogonales".

DEFINICION. *Dos proyecciones* P_{C_1} *y* P_{C_2} *sobre conos convexos cerrados con vértice en el origen se dicen ortogonales si*

(2.7) $\quad \langle P_{C_1} x \ , P_{C_2} x \rangle = 0 \quad , \quad \forall\, x \in H$.

En este caso los conos C_1 *y* C_2 *también se dicen ortogonales.*

Las proyecciones sobre conos duales son ejemplos de proyecciones ortogonales, pero en modo alguno los únicos.

TEOREMA 2.4. *La suma* $\sum_i P_{C_i}$ *de una familia finita o numerable de proyecciones sobre conos convexos con vértice en el origen es una proyección* P_C *si y sólo si las proyecciones* P_{C_i} *son ortogonales dos a dos. En este caso* $C = C_1+C_2+\dots$.

Como se advierte este resultado es una réplica exacta del correspondiente teorema para proyecciones lineales.

Finalmente discutiremos brevemente la cuestión básica de saber cuando el producto de proyecciones es nuevamente una proyección. En el caso lineal es bien sabido que esto ocurre solamente si las proyecciones conmutan, en cuyo caso el producto es la proyección sobre la intersección de los espacios lineales en cuestión. En el caso general, si bien la conmutatividad parece ser suficiente, no es estrictamente necesaria, como se ve cuando uno de los convexos se reduce a un punto, pero acaso también lo sea si se trabaja módulo traslaciones. Notemos en primer lugar el siguiente resultado, en el que la intersección de los convexos cuando es vacía es reemplazada por la intersección de uno de ellos con una traslación del otro:

TEOREMA 2.5. *Si* $P_{K_1}P_{K_2} = P_K$, *entonces*

$$K = K_1 \cap (K_2+u) \quad , \tag{2.8}$$

donde u *es la mínima traslación que pone* K_2 *en contacto con* K_1 .

En este orden de cosas el problema más importante es el de la suficiencia de la conmutatividad para que el producto de proyecciones sea una proyección. El problema parece ser difícil y los resultados hasta ahora obtenidos son fragmentarios e incompletos, si bien todos apuntan hacia la validez de la conjetura. En el caso general nada hay de definitivo pero en el caso de conos la suficiencia ha sido establecida por lo menos bajo la hipótesis que uno de los conos sea de dimensión finita (Teorema 5.6, loc.cit.). La demostración echa poca luz sobre el camino a seguir en el caso general pues hace uso de propiedades que ni siquiera son válidas para todos los conos convexos.

3. TEORIA ESPECTRAL.

El teorema espectral para operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert (que podemos suponer real) establece que todo operador lineal autoadjunto $T:H \longrightarrow H$ admite una única representación de la forma

$$(3.1) \qquad T = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dP_\lambda \quad ,$$

donde $\{P_\lambda\}_{-\infty}^{+\infty}$ es una familia de proyecciones sobre espacios lineales dependiente de un parámetro real ("resolución espectral") que posee las propiedades siguientes:

$$(3.2) \qquad \{\mu \leqslant \lambda\} \Rightarrow \{P_\mu < P_\lambda\} \quad ,$$

$$(3.3) \qquad P_{\lambda+0} = P_\lambda \quad ,$$

$$(3.4) \qquad P_{-\infty} = 0 \quad , \quad P_{+\infty} = I \ .$$

Recíprocamente, todo operador de la forma (3.1) es autoadjunto. La teoría espectral contenida en la fórmula (3.1) es doblemente lineal, pues no sólo el análisis o síntesis que ella proporciona son lineales sino que también lo son los objetos analizados o sintetizados. Si alguna disciplina en análisis merece el calificativo de lineal es la teoría espectral, la cual, por así decir, es el arquetipo de teoría lineal. Es pues sorprendente, con esta abundancia de linealidad, que la teoría espectral no alcance su límite natural de validez en el ámbito lineal, y que admita una extensión natural a situaciones no-lineales. Precisamente nuestro propósito aquí es mostrar que la teoría espectral resiste casi intacta cierta violación del segundo aspecto lineal, y que es posible dar una representación espectral a cierto tipo de operadores no-lineales en términos de operadores elementales dP_λ que no son ya proyecciones lineales sino proyecciones sobre conos convexos cerrados con vértice en el origen. Contrariamente al orden histórico en el caso lineal, en que el análisis precede a la síntesis, en nuestra presentación comenzaremos por la síntesis espectral.

Para comenzar convengamos de una vez por todas que en lo sucesivo el término "proyección" signifique "proyección sobre un cono convexo cerrado con vértice en el origen". Toda proyección es proyección sobre su rango y por lo tanto en la notación podemos suprimir la indicación del conjunto sobre el cual se proyecta. La relación

$$(3.5) \qquad P_1P_2 = P_1 \quad ,$$

que indicaremos así: $P_1 < P_2$, introduce un *orden parcial* en las clases de las proyecciones. Según el teorema 2.2, $P_1 < P_2$ equivale a decir que $P_2 - P_1$ es una proyección, y puesto que toda proyección es mayor que la aplicación identicamente nula (proyección sobre el origen), $P_1 < P_2$ y $P_2 - P_1 > 0$ son equivalentes. Es decir el ordenamiento es aditivo. Notemos de paso que $P_1 < P_2$ equivale a $P_2^{\perp} < P_1^{\perp}$, donde el símbolo $\perp$ indica proyección sobre el cono dual. A esta extensión del concepto de orden corresponde una extensión de la noción de resolución espectral.

DEFINICION. *Una resolución espectral es una familia continua de proyecciones sobre conos convexos cerrados con vértice en el origen* $\{P_\lambda\}_{-\infty}^{+\infty}$ *con las propiedades* (3.2)-(3.4).

El ejemplo mas simple de una resolución espectral no lineal es talvez el siguiente:

Ejemplo 1 : $P_\lambda = \begin{cases} 0 & , \quad \lambda < 0 \\ P & , \quad 0 \leqslant \lambda < 1 \\ I & , \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant +\infty \end{cases}$, donde P es una proyección no lineal fijada de antemano.

Por superposición se pueden construir ejemplos mas complicados:

Ejemplo 2: Sea $H = M_1 + M_2 + \ldots$ una descomposición de H en suma directa de espacios lineales cerrados ortogonales, y para cada i sean C_i' y C_i'' dos conos convexos cerrados en M_i, duales relativamente a este espacio. Ahora bien, dada una sucesión creciente de números reales $\{\lambda_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ adjudiquemos a cada λ_j una proyección cualquiera P_{λ_i} en la familia $\bigcup_i \{P_{C_i'} \cup P_{C_i''}\}$ de modo que las P_{λ_j} agoten la familia. Bajo estas condiciones

$$P_\lambda = \sum_{\lambda_i \leq \lambda} P_{\lambda_i} \quad , \qquad -\infty \leqslant \lambda \leqslant +\infty \quad ,$$

es una resolución espectral.

Los ejemplos mencionados pueden ser calificados como resoluciones discretas. Si el espacio es de dimensión finita todas las resoluciones espectrales son discretas, en efecto, finitamente discretas. Un ejemplo de una partición no lineal continua es el siguiente:

Ejemplo 3. En el espacio $L^2(0,+\infty)$ sean $C^+[\mu,\lambda]$ y $C^-[\mu,\lambda]$ los conos de todas las funciones no-negativas y no-positivas respectivamente en el intervalo $[\mu,\lambda]$, nulas identicamente fuera de él. Entonces,

$$P_\lambda = \begin{cases} P_{C^-[-\lambda,+\infty]} , & \lambda < 0 , \\ P_{C^-[0,+\infty]} + P_{C^+[0,\lambda]} , & 0 \leqslant \lambda , \end{cases}$$

es una resolución espectral no lineal continua.

Un teorema clave en esta teoría, así como en la teoría lineal, es el siguiente:

Teorema 3.1. *Si dada una resolución espectral* $\{P_\lambda\}_{-\infty}^{+\infty}$ *a todo intervalo semicerrado a derecha* $(\mu,\lambda]$ *se le asigna la proyección* $P_{(\mu,\lambda]} = P_\lambda - P_\mu$, *entonces*

(3.6) $$P_{(\mu_1,\lambda_1]}\, P_{(\mu_2,\lambda_2]} = P_{(\mu_1,\lambda_1] \cap (\mu_2,\lambda_2]}$$

Mas aún, si $(\mu_1,\lambda_1] \cap (\mu_2,\lambda_2] = \emptyset$, *entonces* $P_{(\mu_1,\lambda_1]}$ *y* $P_{(\mu_2,\lambda_2]}$ *son ortogonales.*

Con ayuda de este resultado y de las propiedades del orden se construye, a partir de una resolución espectral, una medida espectral que asigna a todo conjunto de una cierta clase de conjuntos "medibles" una proyección, su medida espectral. Mas precisamente,

TEOREMA 3.2. *Dada una resolución espectral* $\{P_\lambda\}_{-\infty}^{+\infty}$ *existe una σ-álgebra de Boole* Σ *de conjuntos sobre la recta real que incluye a todos los conjuntos borelianos, una σ-álgebra de Boole* π *de proyecciones y un σ-homomorfismo de* Σ *en* π : $E \longrightarrow P_E$, *tal que* $P_{(-\infty,\lambda]} = P_\lambda$. *La proyección* P_E *es la medida espectral de* E. *La medida espectral es regular, es decir,* P_E *es a la vez el supremo* *de las medidas de todos los compactos contenidos en* E *y el ínfimo de las medidas de todos los abiertos que lo contienen.*

Σ es la clase de los conjuntos medibles con respecto a la medida espectral. La noción de conjunto medible induce la correspondiente noción de función medible. A su vez, toda función medible real valorada $f(\lambda)$ puede ser integrada con respecto a la medida espectral, y el resultado es un operador

$$(3.7) \qquad T = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, dP_\lambda \quad ,$$

de H en H. El dominio de definición de este operador es el conjunto

$$(3.8) \qquad D(T) = \{x \mid \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)^2 d\langle P_\lambda x \, , \, x\rangle < +\infty\} \ ,$$

el cual es un cono convexo con vértice en el origen, denso en el cono cerrado $R(P_E)$, donde $E = \{\lambda \mid f(\lambda) < +\infty\}$. En particular, $\overline{D(T)} = H$ si $f(\lambda)$ es finita salvo en un conjunto de medida nula, condición que supondremos siempre cumplida. Los operadores lineales autoadjuntos aparecen como casos especiales de (3.7) cuando la integración se efectúa respecto de resoluciones espectrales lineales.

Así, mediante (3.7), hemos construído en forma natural una amplia clase de operadores, no lineales en general, que contiene a la clase de los operadores lineales autoadjuntos. Aquí nos limitaremos a considerar las integrales de funciones no-negativas. En este caso un cambio de la resolución espectral permite escribir la integral (3.7) en la forma

$$(3.9) \qquad T = \int_0^{+\infty} \lambda \, dP_\lambda \quad ,$$

donde ahora $\{P_\lambda\}_{-\infty}^{+\infty}$ tiene su soporte sobre la semirrecta real no-negativa. A los operadores del tipo (3.9) los llamaremos *operadores integrales espectrales*, o simplemente, integrales espectrales. A continuación pasaremos revista a algunas de sus propiedades.

TEOREMA 3.3. *Toda integral espectral* $T = \int_0^\infty \lambda \, dP_\lambda$ *posee las propiedades siguientes:*

a. T *es un operador monótono maximal, positivamente homogéneo,de-*

finido en un cono convexo con vértice en el origen denso en H;

b. $|\langle x , Ty\rangle - \langle Tx , y\rangle| \leqslant \langle x - y , Tx - Ty\rangle$, $\forall\, x,y \in D(T)$;

c. $\langle x , Ty\rangle \leqslant \langle x , Tx\rangle^{1/2} \langle y , Ty\rangle^{1/2}$, $\forall\, x,y \in D(T)$;

d. $\langle x , Tx\rangle$ *es una funcional convexa positivamente homogénea de grado* 2;

e. $T = \nabla \frac{1}{2} \langle x , Tx\rangle$, $\forall\, x \in D(T)$:

f. $\displaystyle \begin{matrix}\inf\\ \sup\\ x,y\end{matrix} \frac{\langle x - y , Tx - Ty\rangle}{\|x - y\|^2} = \begin{matrix}\inf\\ \sup\\ x,y\end{matrix} \frac{\|Tx - Ty\|}{\|x - y\|} = \begin{matrix}\inf\\ \sup\end{matrix}\ \mathrm{sop}\{P_\lambda\}_{-\infty}^{+\infty}$

Las integrales espectrales no son necesariamente continuas pero sus restricciones a convexos de dimensión finita si lo son relativamente a la topología débil en el rango. Esta propiedad conocida bajo el nombre de *hemicontinuidad* toma el lugar de la propiedad de los operadores lineales de ser continuos sobre todo espacio de dimensión finita. Las integrales espectrales son además *demicerradas*, esto es:

TEOREMA 3.4. *Si* T *es una integral espectral,*

(3.10) $\{x_\alpha \to x \ , \ Tx_\alpha \to y \ , \ \overline{\lim}\, \|Tx_\alpha\| < +\infty\} \Rightarrow \{x \in D(T), \ y = Tx\}$.

Desde luego puede ocurrir que una integral espectral sea continua, para lo cual sólo basta que sea continua en el orígen. En tal caso el operador está definido en todo el espacio y satisface una condición de Lipschitz, a la vez la resolución espectral tiene soporte compacto. Recíprocamente, toda integral espectral definida en todo el espacio es continua.

Una integral espectral es compacta si la medida espectral está concentrada en un conjunto numerable y acotado de puntos cuyo único punto de acumulación es el origen y si el rango de la medida espectral de todo punto es localmente compacto.

En cuanto al "espectro" de un operador integral espectral la situación aparece como un tanto artificial. En el caso lineal la clasificación de los puntos de la recta real según propiedades de continuidad de la resolución espectral y según la existencia y acotación del operador $(T - \lambda I)^{-1}$ conducen al mismo resultado. Esto no es así en el caso general, donde, para restablecer la equivalencia, es necesario tomar en cuenta,además de la continuidad de P_λ, su linealidad. Esta insólita aparición de la linealidad pierde su carácter sorpresivo tan pronto como se advierte que ella ha sido subrepticiamente introducida en el planteo mismo de la cuestión al considerar el operador $T - \lambda I$, combinación *lineal* de T e I. Sea como fuere, el estudio del espectro no ha sido completado aún pues quedan por aclarar algunos puntos relativos al espectro continuo. Un par de hechos bastarán para dar una idea de lo que realmente ocurre. Un punto λ_0 es un autovalor en el sentido corriente del término si y sólo si λ_0 es un punto de discontinuidad de P_λ; en este respecto lo no-lineal en nada difiere de lo lineal. Por otra parte el operador $T - \lambda_0 I$ tiene inversa lipschitziana toda vez que λ_0 es un punto de constancia de la resolución espectral y P_{λ_0} es una proyección lineal. Aquí la condición de Lipschitz es el sucedáneo natural de la acotación.

Toda integral espectral da lugar a un cálculo funcional en la forma misma como lo hace un operador lineal autoadjunto. El primer paso es la identificación del polinomio de un operador con la integral del polinomio:

TEOREMA 3.5. *Si* $T = \int_0^{+\infty} \lambda \, dP_\lambda$ *y* $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$ *es un polinomio que toma valores no-negativos sobre la semirrecta real no-negativa,*

$$(3.11) \qquad p(T) = a_0 I + a_1 T + \dots + a_n T^n = \int_0^{+\infty} p(\lambda)\, dP_\lambda \,.$$

Este resultado da pie a la notación $u(T) = \int_0^{+\infty} u(\lambda)\, dP_\lambda$ toda vez que $u(\lambda)$ es una función medible no-negativa en $[0,+\infty]$. De inmediato se demuestra que

$$(3.12) \qquad \sup_{x,y} \frac{\|u(T)x - u(T)y\|}{\|x - y\|} = \operatorname*{sup\,es}_{\lambda \ge 0} u(\lambda)$$

y que, si u y v son dos funciones de este tipo, el dominio de $(uv)(T)$ contiene al dominio de $u(T)v(T)$, sobre el cual ambos operadores coinciden. Además,

$$(3.13) \quad \langle u(T)x \,,\, v(T)x\rangle = \langle x \,,\, u(T)v(T)x\rangle \,,\ \forall\, x \in D(u(T)) \cap D(v(T))$$

Naturalmente, si el producto $u(T)v(T)$ está definido en todo el espacio, lo cual sólo ocurre si ambos factores están definidos en todo el espacio, entonces

(3.14) $\quad u(T)v(T) = (uv)(T)$.

Estos resultados contienen lo esencial del cálculo funcional, el cual puede ser resumido así:

TEOREMA 3.6. *Si* $T = \int_0^{+\infty} \lambda \, dP_\lambda$, *la aplicación* $u(\lambda) \to u(T)$ *es un isomorfismo isométrico entre la semiálgebra de Banach de todas las funciones medibles no-negativas y esencialmente acotadas sobre el soporte de la resolución espectral con la norma* L^∞, *y una semiálgebra de Banach de operadores monótonos lipschitzianos con la norma de Lipschitz.*

Todavía dentro del espíritu del cálculo funcional debemos mencionar una desigualdad de capital importancia para la caracterización en abstracto de las integrales espectrales.

TEOREMA 3.7. *Si* T *es una integral espectral y* $u(\lambda)$ *y* $v(\lambda)$ *son dos funciones medibles no-negativas sobre el eje real no-negativo, entonces,*

(3.15) $$\|u(T)v(T)x - u(T)v(T)y\|^2 \leqslant \langle u^2(T)x - u^2(T)y \, , \, v^2(T)x - v^2(T)y\rangle \quad , \quad x,y \in D(u^2(T)) \cap D(v^2(T)) .$$

De (3.15) sigue de inmediato que si $u(\lambda)$ es función característica de un conjunto entonces $u(T)$ es idempotente y satisface (1.5), y por lo tanto es una proyección.

Finalmente llegamos a la cuestión capital de caracterizar las integrales espectrales. ¿Bajo qué condiciones un operador $T:H \to H$ admite una representación integral espectral ?, ó en otros términos, ¿cuáles son los operadores que admiten un análisis espectral? Hay varias respuestas a esta pregunta, pero acaso la más simple sea la siguiente:

TEOREMA 3.7. *Todo operador monótono maximal* $T\colon H \to H$ *tal que*

a. $p(T)q(T) = q(T)p(T)$;

b. $\langle p(T)x \, , \, q(T)x\rangle = \langle x \, , \, p(T)q(T)x\rangle$;

c. $\|p(T)q(T)x - p(T)q(T)y\|^2 \leqslant \langle p^2(T)x - p^2(T)y \, , \, q^2(T)x - q^2(T)y\rangle$;

para todo par de polinomios $p(\lambda)$ *y* $q(\lambda)$ *no-negativos en* $[0,+\infty]$*, admite una representación de la forma* $T = \int_0^\infty \lambda \, dP_\lambda$*, y recíprocamente. La resolución espectral está unívocamente determinada por* T.

Recibido en noviembre de 1972.