Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 27 , 1976 .

SOBRE ALGUNAS IDENTIDADES DE INVARIANCIA Y DENSIDADES LAGRANGIANAS DEGENERADAS

Ricardo J. Noriega

SUMMARY. It is well known that the lagrangian density $L = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,(g^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} + k^2\phi)$ gives rise to the Klein-Gordon equation $g^{ij}\phi_{|ij} - k^2 = 0$. LOVELOCK [10] has considered the problem of finding other lagrangians of the form $L(\phi;\ \phi_{,i};\ \phi_{,ij};\ g_{hk};\ g_{hk,i})$ whose associated Euler-Lagrange equation be also the Klein-Gordon equation. In this case, one says that L is "degenerate", in the sense that the Euler-Lagrange equation is of second order instead of being of fourth order as it would be in general. The main purpose of the present paper is to prove Theorem 1, which states that the only degenerate lagrangians of the form $L(\phi;\ \phi_{,i};\ \phi_{,ij};\ g_{hk};\ g_{hk,i})$ are those of the form (4.8). The proof makes use of the identities (3.1) and (3.3) which, following RUND [4], we call invariance identities, which may have some interest by themselves. For the sake of continuity, we have relegated to the Appendix the problem of finding the form of all the scalars (Theorem 2) and all 2-covariant tensors (Theorem 3) which depend on a scalar ϕ, the derivatives $\phi_{,i}$ and a 2-covariant tensor g_{hk}.

1. INTRODUCCION.

Un problema clásico y en general de difícil solución es el de, dadas las componentes de diversos objetos geométricos, encontrar todos los objetos de un tipo dado que se pueden obtener como funciones de esas componentes siendo la relación funcional la misma en todos los sistemas de coordenadas. Por ejemplo, si ϕ_i son las componentes de un covector y ψ^j son las de un vector, entonces definiendo $L_h = \phi_h\phi_i\psi^i$ en todos los sistemas de coordenadas las L_h resultan componentes de un covector.

La primera solución a problemas de este tipo se encuentra en los trabajos de Cartan [1], Weyl [2] y Vermeil [3] en los cuales se prueba de diferentes maneras el siguiente resultado: si A^{ij} son las componentes de un tensor 2-contravariante simétrico obtenido a partir de las componentes de un tensor métrico g_{hk} y de las derivadas $g_{hk,t}$, $g_{hk,ts}$ y si A^{ij} es lineal en las segundas derivadas, entonces

$A^{ij} = a.G^{ij} + b.g^{ij}$, donde a y b son constantes y G^{ij} es el tensor de Einstein.

El estudio de estos problemas recibe un nuevo impulso con el establecimiento de un método que permite obtener ciertas identidades que deben satisfacer los objetos geométricos concomitantes, las identidades de invariancia (ver §3), que dan información sobre la estructura algebraica de dichos objetos. En [4] se obtienen las identidades de invariancia para los casos:

i) $L = L(\psi_j ; \psi_{j,k} ; g_{hk})$

ii) $L = L(g_{hk} ; g_{hk,\ell} ; g_{hk,\ell m})$

iii) $L = L(\psi_j ; \psi_{j,k} ; g_{hk} ; g_{hk,\ell} ; g_{hk,\ell m})$

mientras en [5] se calculan para el caso

$$L = L(g_{ij} ; \Gamma^i_{jk} ; \Gamma^i_{jk,h})$$

donde ψ_j son las componentes de un covector, g_{ij} las de un tensor métrico y Γ^i_{jk} las de una conexión afín.

El conocimiento de las identidades de invariancia no es suficiente en general para la completa determinación de los objetos concomitantes. En [6] hemos considerado los casos, sencillos por fuerza, en los que de las identidades de invariancia se calculan dichos objetos.

Esta insuficiencia hace que sea necesario agregar hipótesis sobre los objetos concomitantes para su determinación. En el ejemplo que dimos, $A^{ij} = A^{ij}(g_{hk} ; g_{hk,t} ; g_{hk,tm})$, las hipótesis agregadas son la simetría, la nulidad de la divergencia y la linealidad de la dependencia en las segundas derivadas. (Estas son sobreabundantes como se puede ver en [7]).

Hay otra hipótesis simplificadora que es la que se usa en el presente trabajo y es la *degeneración* de ciertas densidades escalares. Esto significa lo siguiente: sea L una densidad escalar (Lagrangiano) concomitante de un objeto ρ^A, de algunas de sus derivadas, de un objeto prefijado λ^α y de sus derivadas hasta un cierto orden, es decir

$$L = L(\rho^A ; \rho^A_{,i_1} ; \dots ; \rho^A_{,i_1\dots i_m} ; \lambda^\alpha ; \lambda^\alpha_{,j_1} ; \dots ; \lambda^\alpha_{,j_1\dots j_s})$$

Las expresiones de Euler-Lagrange asociadas son

$$E^A(L) = \frac{\partial L}{\partial \rho^A} + \sum_{r=1}^{m} (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_r}} \left(\frac{\partial L}{\partial \rho^A_{,i_1\dots i_r}} \right)$$

En general estas expresiones serán de orden 2m en ρ^A y se dice que L es degenerada si dicho orden es menor que 2m. La hipótesis simplificadora de degeneración se ha utilizado en [8] para calcular las densidades del tipo

$$L = L(g_{ij};\ g_{ij,h};\ g_{ij,hk})$$

y en [9] para calcular las de la forma

$$L = L(g_{ij};\ \Gamma^i_{jk};\ \Gamma^i_{jk,h})$$

siendo estas densidades las que se utilizan para deducir las ecuaciones de campo de la teoría general de la relatividad. También se utiliza una densidad escalar para deducir, por un principio variacional, la ecuación de Klein-Gordon

$$g^{ij}\phi_{|ij} - k^2\phi = 0$$

donde g^{ij} es la inversa de un tensor métrico preasignado g_{hk}, ϕ es un escalar, k una constante y donde la barra vertical indica la derivación covariante respecto a los símbolos de Christoffel del tensor g_{hk}. El Lagrangiano que hay que utilizar es

$$L(\phi;\ \phi_{,i};\ g_{ij}) = \frac{1}{2}\sqrt{g}(g^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} + k^2\phi)$$

para el cual las expresiones de Euler-Lagrange son

$$E(L) = \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{,i}}\right) = -\sqrt{g}(g^{ij}\phi_{|ij} - k^2\phi)$$

Según se indica en [10], pág.485 , existe un Lagrangiano de la forma

$$L = L(\phi;\ \phi_{,i};\ \phi_{,ij};\ g_{hk};\ g_{hk,t}) \tag{1.1}$$

tal que al aplicársele un principio variacional resulta nuevamente la ecuación de Klein-Gordon. Ese Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{g}\ \phi\ (g^{ij}\phi_{|ij} - k^2\phi) \tag{1.2}$$

Pero entonces el Lagrangiano (1.2) es degenerado pues las expresiones correspondientes no son de orden 4 sino de orden 2. Resulta entonces que la ecuación de Klein-Gordon se puede obtener a partir de un Lagrangiano degenerado.

Dado que en [10] no se insiste sobre los Lagrangianos de la forma (1.1), hemos creído conveniente proceder a su completa determinación vía las identidades de invariancia y agregando la hipótesis de la degeneración.

2. DERIVADAS TENSORIALES.

Dado un Lagrangiano de la forma (1.1), indicaremos

$$L^\phi = \frac{\partial L}{\partial \phi}\ ;\quad L^i = \frac{\partial L}{\partial \phi_{,i}}\ ;\quad L^{ij} = \frac{\partial L}{\partial \phi_{,ij}}$$
$$L^{\widetilde{ij}} = \frac{\partial L}{\partial g_{ij}}\ ;\quad L^{ij,h} = \frac{\partial L}{\partial g_{ij,h}} \tag{2.1}$$

Los objetos así definidos no son todos densidades tensoriales. Vamos ahora a encontrar objetos relacionados con ellos que sí lo sean; se denominarán *derivadas tensoriales*.

Para una transformación de coordenadas $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j)$ será:

$$\bar{\phi} = \phi$$

$$\bar{\phi}_{,i} = B^k_i \phi_{,k} \qquad \left(B^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right)$$

$$\bar{\phi}_{,ij} = B^k_{ij}\phi_{,k} + B^k_i B^h_j \phi_{,kh} \qquad (2.2)$$

$$\bar{g}_{ij} = B^k_i B^h_j g_{kh} \qquad \left(B^i_{j\ell} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^\ell}\right)$$

$$\bar{g}_{ij,\ell} = B^k_{i\ell} B^h_j g_{kh} + B^k_i B^h_{j\ell} g_{kh} + B^k_i B^h_j B^t_\ell g_{kh,t}$$

Por ser L una densidad escalar:

$$\bar{L}(\bar{\phi};\ \bar{\phi}_{,i};\ \bar{\phi}_{,ij};\ \bar{g}_{ij};\ \bar{g}_{ij,\ell}) = B.L(\phi;\ \phi_{,k};\ \phi_{,kh};\ g_{kh};\ g_{kh,t})$$

donde $B = \det(B^i_j)$. Entonces por (2.2):

$$\bar{L}(\phi; B^k_i \phi_{,k}; B^k_{ij}\phi_{,k} + B^k_i B^h_j \phi_{,kh}; B^k_i B^h_j g_{kh}; B^k_{i\ell} B^h_j g_{kh} + B^k_i B^h_{j\ell} g_{kh} + B^k_i B^h_j B^t_\ell g_{kh,t}) =$$

$$= B.L(\phi;\ \phi_{,k};\ \phi_{,kh};\ g_{kh};\ g_{kh,t}) \qquad (2.3)$$

Derivando ambos miembros de (2.3) respecto de ϕ, obtenemos:

$$\bar{L}^{\phi} = B.L^{\phi}$$

lo que nos indica que L^{ϕ} es una densidad escalar.

Derivando respecto a $\phi_{,kh}$ resulta:

$$\bar{L}^{ij} B^k_i B^h_j = B.L^{kh}$$

es decir L^{ij} es una densidad tensorial 2-contravariante.

Análogamente, derivando respecto a $g_{kh,t}$ se obtiene:

$$\bar{L}^{ij,\ell} = B.A^i_k A^j_h A^\ell_t L^{kh,t}$$

o sea $L^{kh,t}$ es una densidad tensorial 3-contravariante.

Estos resultados valen en general: si

$$T = T(\phi;\ \phi_{,t_1};\ldots;\ \phi_{,t_1\ldots t_m};\ g_{hk};\ldots;\ g_{hk,p_1\ldots p_n})$$

es una densidad tensorial r-contravariante, s-covariante, entonces

$$\frac{\partial T}{\partial \phi}\ , \quad \frac{\partial T}{\partial \phi_{,t_1\ldots t_m}}\ , \quad \frac{\partial T}{\partial g_{hk,p_1\ldots p_n}} \qquad (2.4)$$

son densidades tensoriales de valencias indicadas por la posición de los índices.

Derivando ambos miembros de (2.3) respecto de $\phi_{,k}$ queda:

$$\overline{L}^{i}B^{k}_{i} + \overline{L}^{ij}B^{k}_{ij} = B.L^{k} \tag{2.5}$$

Para escribir (2.5) en forma tensorial debemos eliminar las segundas derivadas B^{k}_{ij}. Si Γ^{i}_{jk} son los símbolos de Christoffel del tensor g_{hk}, de su ley de transformación deducimos:

$$B^{k}_{ij} = B^{k}_{s}\overline{\Gamma}^{s}_{ij} - B^{p}_{i}B^{q}_{j}\Gamma^{k}_{pq} \tag{2.6}$$

Reemplazando en (2.5) y usando el carácter tensorial de L^{ij}, deducimos:

$$(\overline{L}^{s} + \overline{L}^{ij}\overline{\Gamma}^{s}_{ij})B^{k}_{s} = B(L^{k} + L^{pq}\Gamma^{k}_{pq})$$

Entonces si $\Pi^{s} = L^{s} + L^{ij}\Gamma^{s}_{ij}$, las Π^{s} son componentes de una densidad tensorial 1-contravariante.

Análogamente, derivando ambos miembros de (2.3) respecto de g_{kh} resulta

$$\overline{L}^{\widetilde{ij}}B^{k}_{i}B^{h}_{j} + \overline{L}^{ij,\ell}(B^{k}_{i\ell}B^{h}_{j} + B^{k}_{i}B^{h}_{\ell}) = BL^{kh}$$

Reemplazando las derivadas segundas de acuerdo a (2.6) obtenemos, usando el carácter tensorial de $L^{ij,\ell}$, la relación:

$$B^{k}_{i}B^{h}_{j}(\overline{L}^{\widetilde{ij}} + \overline{L}^{mj,\ell}\overline{\Gamma}^{\,i}_{m\ell} + \overline{L}^{im,\ell}\overline{\Gamma}^{\,j}_{m\ell}) = B(L^{\widetilde{kh}} + L^{ph,q}\Gamma^{k}_{pq} + L^{kp,q}\Gamma^{h}_{pq})$$

Luego, si $\Lambda^{ij} \doteq L^{\widetilde{ij}} + L^{sj,\ell}\Gamma^{i}_{s\ell} + L^{is,\ell}\Gamma^{j}_{s\ell}$, las Λ^{ij} son componentes de una densidad tensorial 2-contravariante.

En definitiva, hemos construído las siguientes derivadas tensoriales:

$$\begin{aligned} L^{\phi} &= \frac{\partial L}{\partial \phi} \quad ; \quad \Pi^{i} = L^{i} + L^{sj}\Gamma^{i}_{sj} \quad ; \quad L^{ij} = \frac{\partial L}{\partial \phi_{,ij}} \\ \Lambda^{ij} &= L^{\widetilde{ij}} + L^{sj,\ell}\Gamma^{i}_{s\ell} + L^{is,\ell}\Gamma^{j}_{s\ell} \quad ; \quad L^{ij,k} = \frac{\partial L}{\partial g_{ij,k}} \end{aligned} \tag{2.7}$$

3. IDENTIDADES DE INVARIANCIA.

En la identidad (2.3), además de ϕ, g_{kh} y sus derivadas observamos que aparecen factores de la forma B^{h}_{j} y $B_{j\ell}$. Como la transformación de coordenadas puede ser cualquiera (mientras sea diferenciable e inversible), podemos considerar que dichos factores varían arbitrariamente y en forma independiente excepto por la simetría de $B^{h}_{j\ell}$ en j,ℓ. Podemos entonces derivar ambos miembros de (2.3) respecto a B^{h}_{j}, lo cual nos da n^{2} identidades y también lo podemos hacer respecto a $B^{h}_{j\ell}$, lo cual aporta otras $\frac{n^{2}(n+1)}{2}$ identidades. Las identidades así obtenidas se denominan *identidades de invariancia.*

Derivamos entonces ambos miembros de (2.3) respecto de B^{a}_{bc} y resulta:

$$\bar{L}^{ij}\ \frac{1}{2}\ \delta^k_a(\delta^b_i\delta^c_j + \delta^b_j\delta^c_i)\phi_{,k} + \bar{L}^{ij,\ell}\ \frac{1}{2}\ \delta^k_a(\delta^b_i\delta^c_\ell + \delta^b_\ell\delta^c_i)B^h_j g_{kh} +$$

$$+ \bar{L}^{ij,\ell}\ \frac{1}{2}\ \delta^h_a(\delta^b_j\delta^c_\ell + \delta^b_\ell\delta^c_j)B^k_i g_{kh} = 0$$

Esta igualdad vale cualesquiera sean las B^h_j, en particular para $B^h_j = \delta^h_j$, con lo que queda:

$$\frac{1}{2}(L^{bc} + L^{cb})\phi_{,a} + \frac{1}{2}(L^{bc,h}g_{ah} + L^{ch,b}g_{ah} + L^{kb,c}g_{ak} + L^{kc,b}g_{ak}) = 0$$

Por la simetría de L^{bc} y $L^{bc,d}$ en b,c, lo anterior se escribe

$$L^{bc}\phi_{,a} + (L^{bs,c} + L^{cs,b})g_{as} = 0 \qquad (3.1)$$

que es la *primer identidad de invariancia.*

Veamos una consecuencia de esta identidad: si suponemos que L no depende de $g_{bs,c}$, es decir $L^{bs,c} = 0$, de (3.1) obtenemos: $L^{bc}\ \phi_{,a} = 0$. Como eso vale para todo a, debe ser $L^{bc} = 0$, o sea L no depende de $\phi_{,bc}$.

Recíprocamente, multiplicando (3.1) por g^{at} y sumando sobre a llegamos a: $L^{bc}\phi_{,a}g^{at} + L^{bt,c} + L^{ct,b} = 0$, de donde:

$$L^{bt,c} = \frac{1}{2}(L^{bt}\phi_{,a}g^{ac} - L^{bc}\phi_{,a}g^{at} - L^{ct}\phi_{,a}g^{ab}) \qquad (3.2)$$

Entonces si $L^{bt} = 0$ es $L^{bt,c} = 0$. Hemos demostrado entonces:

PROPOSICION 1. L *es independiente de* $g_{ij,h}$ *si y sólo si es independiente de* $\phi_{,ts}$.

Pasamos ahora a la segunda identidad. Derivando ambos miembros de (2.3) respecto a B^a_b y después haciendo $B^a_b = \delta^a_b$, las derivadas segundas son cero y queda:

$$L^b\phi_{,a} + L^{bh}\phi_{,ah} + L^{kb}\phi_{,ka} + L^{\widetilde{bh}}g_{ah} + L^{\widetilde{kb}}g_{ka} + L^{bh,t}g_{ah,t} +$$

$$+ L^{kb,t}g_{ka,t} + L^{kh,b}g_{kh,a} = \delta^b_a\ L$$

Reemplazando cada $L^{bh,t}$ por su expresión (2.2) y cambiando índices se llega a:

$$L^b\phi_{,a} + 2L^{bh}\phi_{,ah} + 2L^{\widetilde{bh}}g_{ah} - L^{ht}\phi_{,s}g^{sb}g_{ra}\Gamma^r_{ht} -$$

$$- L^{bh}\Gamma^s_{ah}\phi_{,s} - L^{bt}\phi_{,s}\Gamma^s_{ta} = \delta^b_a\ L$$

Usando (2.7), podemos transformar esa igualdad en:

$$\Pi^b\phi_{,a} + 2L^{bh}\phi_{|ah} + 2L^{\widetilde{bh}}g_{ah} - L^{ij}\Gamma^b_{ij}\phi_{,a} - L^{ht}\phi_{,s}g^{sb}g_{ra}\Gamma^r_{ht} = \delta^b_a\ L$$

Reemplazando $L^{ij}\phi_{,a}$ y $L^{ht}\phi_{,s}$ por (3.1) se llega a:

$$\Pi^{b}\phi_{,a} + 2L^{bh}\phi_{|ah} + 2L^{\widetilde{bh}}g_{ah} + (L^{is,j} + L^{js,i})g_{as}\Gamma^{b}_{ij} +$$
$$+ (L^{hk,t} + L^{tk,h})g_{ks}g^{sb}g_{ra}\Gamma^{r}_{ht} = \delta^{b}_{a} L$$

de donde pasamos a:

$$\Pi^{b}\phi_{,a} + 2L^{bh}\phi_{|ah} + 2\Lambda^{bh}g_{ah} = \delta^{b}_{a} L \qquad (3.3)$$

que es la *segunda identidad de invariancia.*

4. DENSIDADES LAGRANGIANAS DEGENERADAS.

Pasamos ahora a considerar los Lagrangianos de la forma

$$L = L(\phi;\ \phi_{,i};\ \phi_{,ij};\ g_{ij};\ g_{ij,\ell})$$

que sean degenerados, es decir cuya expresión de Euler-Lagrange sea de orden menor que 4 en las derivadas de ϕ. Recordamos que esta expresión es:

$$E(L) = L^{\phi} - \frac{\partial L^{i}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial^{2} L^{ij}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}$$

Es claro que el primer sumando no aporta derivadas de ϕ de orden mayor que 2. El segundo sumando no aporta derivadas de orden 4, las que vienen entonces dadas por el último a través de:

$$\frac{\partial^{2} L^{ij}}{\partial x^{i}\partial x^{j}} = L^{ij;hk}\phi_{,hkij} + (\ldots)$$

donde $L^{ij;hk} = \dfrac{\partial L^{ij}}{\partial \phi_{,hk}} = \dfrac{\partial^{2} L}{\partial \phi_{,hk}\partial \phi_{,ij}}$ y en $(\ldots)$ juntamos todos los términos que no contengan derivadas de ϕ de orden 4.

Teniendo en cuenta la simetría de $L^{ij;hk}$ en i,j y en h,k y además siendo: $L^{ij;hk} = L^{hk;ij}$ (igualdad de las derivadas cruzadas), podemos escribir:

$$\frac{\partial E}{\partial \phi_{,abcd}} = \frac{1}{3}(L^{ab;cd} + L^{ac;bd} + L^{ad;bc})$$

Hemos demostrado entonces:

PROPOSICION 2. *La expresión de Euler-Lagrange de* L *no contiene derivadas de orden* 4 *de* ϕ *si y sólo si*

$$\chi^{ab;cd} = L^{ab;cd} + L^{ac;bd} + L^{ad;bc} = 0 \qquad (4.1)$$

Notemos que por (2.4) es $\chi^{ab;cd}$ una densidad tensorial.

Para averiguar la dependencia de las derivadas terceras, calculamos:

$$\frac{\partial^2 L^{ij}}{\partial x^i \partial x^j} = L^{ij;\phi;hk}\phi_{,j}\phi_{,hki} + L^{ij;h;rs}\phi_{,hj}\phi_{,rsi} + L^{ij;h}\phi_{,hji} +$$

$$+ L^{ij;hk;rs}\phi_{,hkj}\phi_{,rsi} + L^{ij;hk}\phi_{,hkji} +$$

$$+ L^{ij;\widetilde{hk};rs}g_{hk,j}\phi_{,rsi} + L^{ij;hk,t;rs}g_{hk,tj}\phi_{,rsi} + (\ldots)$$

donde en (...) incluímos todos los términos que no contienen derivadas terceras de ϕ.

Por otra parte $\quad \dfrac{\partial L^i}{\partial x^i} = L^{i;hk}\phi_{,hki} + (\ldots)$

Luego, teniendo en cuenta las simetrías apuntadas

$$3\frac{\partial E}{\partial \phi_{,abc}} = (\chi^{aj;bc})^{;h}\phi_{,hj} + 2(\chi^{aj;bc})^{;hk}\phi_{,hkj} +$$

$$+ (\chi^{aj;bc})^{;\widetilde{hk}}g_{hk,j} + (\chi^{aj;bc})^{;hk,t}g_{hk,tj} + (\chi^{aj;bc})^{;\phi}\phi_{,j}$$

Por la Proposición 2 resulta entonces:

PROPOSICION 3. *Si* E *no depende de las derivadas de orden* 4 *de* ϕ, *entonces tampoco depende de las derivadas de orden* 3. *Entonces la condición* (4.1) *es necesaria y suficiente para que* E *dependa de las derivadas de* ϕ *sólo hasta orden* 2.

La dependencia de E(L) de las derivadas terceras de g_{ij} está dada a través de

$$E(L) = L^{ij;hk,t}g_{hk,tji} + L'(\phi;\ \phi_{,i};\ \phi_{,ij};g_{ij};\ g_{ij,h};\ g_{ij,hk})$$

Si al Lagrangiano se le aplica un principio variacional, E(L) debe anularse idénticamente. Si las g_{ij} son arbitrarias de modo que las $g_{hk,tji}$ puedan considerarse independientes excepto por las simetrías en h,k y en t,j,i, entonces los coeficientes que las acompañan deben ser nulos. Por las simetrías apuntadas se obtiene

$$L^{ij;hk,t} + L^{it;hk,j} + L^{tj;hki} = 0 \qquad (4.2)$$

De acuerdo a (3.2) podemos escribir las tres igualdades

A- $\quad 2\,L^{hk,t;ij} = L^{hk;ij}\phi_{,a}g^{at} - L^{ht;ij}\phi_{,a}g^{ak} - L^{kt;ij}\phi_{,a}g^{ah}$

B- $\quad 2\,L^{hk,j;it} = L^{hk;it}\phi_{,a}g^{aj} - L^{hj;it}\phi_{,a}g^{ak} - L^{kj;it}\phi_{,a}g^{ah}$

C- $\quad 2\,L^{hk,i;jt} = L^{hk;jt}\phi_{,a}g^{ai} - L^{hi;jt}\phi_{,a}g^{ak} - L^{ki;jt}\phi_{,a}g^{ah}$

Si ahora hacemos A+B+C, el primer miembro se anula por (4.2). En cuanto al segundo miembro, la suma de los segundos sumandos es cero por (4.1) así como la suma de los últimos sumandos.

Resulta entonces $L^{hk;ij}\phi_{,a}g^{at} + L^{hk;it}\phi_{,a}g^{aj} + L^{hk;jt}\phi_{,a}g^{ai} = 0$

Sean $\lambda^s = \phi_{,a}g^{as}$; entonces las λ^s son componentes de un vector y la igualdad anterior se escribe

$$L^{hk;ij}\lambda^t + L^{hk;it}\lambda^j + L^{hk;jt}\lambda^i = 0 \qquad (4.3)$$

Dado un punto de la variedad, podemos conseguir un sistema de coordenadas para el cual todas las λ^i sean distintas de cero en dicho punto. Como (4.3) es tensorial, sigue valiendo en ese sistema. Haciendo $j=t=i$ sin sumar en (4.3) obtenemos: $3L^{hk;ii}\lambda^i = 0$ de donde, siendo $\lambda^i \neq 0$, $L^{hk;ii} = 0$. Ahora haciendo $t=i$ en (4.3) resulta

$$L^{hk;ij}\lambda^i + L^{hk;ii}\lambda^j + L^{hk;ji}\lambda^i = 0$$

El segundo sumando es cero como acabamos de ver y el primero es igual al tercero. Siendo $\lambda^i \neq 0$ obtenemos

$$L^{hk;ij} = 0 \qquad (4.4)$$

Por (2.4), la igualdad obtenida es válida en todo sistema de coordenadas. Entonces

PROPOSICION 4. *Si* L *es una densidad Lagrangiana degenerada y si las* $g_{hk,tji}$ *se pueden considerar independientes, entonces se cumple* (4.4).

Notemos ahora que para obtener la primera identidad de invariancia, la única propiedad que hemos utilizado de la ley de transformación de L es que en ella no aparecen derivadas de orden 2 de las x^i respecto a las $\bar{x}^j$. Como toda densidad tensorial tiene esa propiedad, entonces también cumple esa identidad y por lo tanto es válida para ella la Proposición 1.

Entonces de (4.4) deducimos

$$L^{hk;ij,\ell} = 0 \qquad (4.5)$$

lo cual, junto con (4.4) nos dice que L^{hk} no depende de $g_{ij,\ell}$ ni de $\phi_{,ij}$. Luego $L^{hk} = L^{hk}(\phi;\ \phi_{,i};\ g_{ij})$

Podemos escribir (4.5) en la forma $L^{ij,\ell;hk} = 0$ y entonces $L^{ij,\ell}$ es una densidad tensorial que no depende de $\phi_{,hk}$. Aplicándole la Proposición 1, tampoco depende de $g_{hk,t}$, es decir

$$L^{ij,\ell;hk,t} = 0 \qquad (4.6)$$

Las igualdades (4.4) y (4.6) nos dicen que L es lineal en $\phi_{,ij}$ y en $g_{hk,t}$. Podemos escribir entonces

$$L = T^{bi}\phi_{,bi} + T^{bi,c}g_{bi,c} + T(\phi;\ \phi_{,i};\ g_{ij}) \qquad (4.7)$$

donde claramente $T^{bi} = L^{bi}$, $T^{bi,c} = L^{bi,c}$ y por tanto son densidades tensoriales dependientes de ϕ, $\phi_{,i}$ y g_{ij}. Por (3.2)

$$T^{bi,c}\ g_{bi,c} = \frac{1}{2}\ (L^{bi}\phi_{,a}g^{ac} - L^{bc}\phi_{,a}g^{ai} - L^{ci}\phi_{,a}g^{ab})g_{bi,c} =$$

$$= L^{bi}\phi_{,a}\ \frac{1}{2}\ g^{ac}(g_{bi,c} - g_{bc,i} - g_{ci,b}) = -L^{bi}\phi_{,a}\Gamma^{a}_{bi}$$

Luego, de (4.7)

$$L = L^{bi}(\phi_{,bi} - \phi_{,a}\Gamma^{a}_{bi}) + T(\phi;\ \phi_{,i};\ g_{ij}) = L^{bi}\phi_{|bi} + T(\phi;\phi_{,i};g_{ij})$$

Como el primer miembro y el primer sumando del segundo miembro son densidades escalares, entonces también lo es T. Suponiendo que el covector $\phi_{,i}$ no es nulo, es decir la forma cuadrática $g^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} \neq 0$, probamos en el apéndice (Teoremas 2 y 3) que debe ser

$$L^{bi} = \sqrt{g}\ \ (g^{bi}.f(\phi,\psi) + g^{bh}g^{ik}\phi_{,h}\phi_{,k}.t(\phi,\psi))$$

$$T = \sqrt{g}.h(\phi,\psi) \qquad\qquad (\psi = g^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j})$$

y por lo tanto concluímos

TEOREMA. *Si* $L = L(\phi;\ \phi_{,i};\ \phi_{,ij};\ g_{hk};\ g_{hk,t})$ *es una densidad Lagrangiana degenerada y las* $g_{hk,t}$ *se pueden considerar independientes, entonces si* $\psi = g^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}$:

$$L = \sqrt{g}\{g^{bi}\phi_{|bi}.f(\phi,\psi) + g^{bh}g^{ik}\phi_{,h}\phi_{,k}\phi_{|bi}.t(\phi,\psi) + T(\phi,\psi)\} \qquad (4.8)$$

Como hemos trabajado con condiciones necesarias y suficientes para la degeneración, todo Lagrangiano de la forma (4.8) es degenerado. Luego (4.8) da todos los Lagrangianos degenerados.

APENDICE

Si g_{ij} son las componentes de un tensor 2-covariante no singular y ϕ es un escalar de tal manera que $\phi_{,i}$ no sea un vector nulo, vamos a encontrar tensores de órdenes 0 y 2 que se obtengan a partir de ϕ, $\phi_{,i}$ y g_{ij}.

TEOREMA 2. *Si* $L = L(\phi;\ \phi_{,i};\ g_{ij})$ *es un escalar y si* $\psi = g^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}$

entonces $L = f(\phi,\psi)$.

Dem. Fijamos la primer variable ϕ e investigamos la dependencia de L de $\phi_{,i}$ y g_{ij}. Consideremos la hipersuperficie $\psi = g^{ij}\phi_{,i}\,\phi_{,j} = c$ (cte.). Si hacemos un desplazamiento infinitesimal en la dirección tangente a la hipersuperficie, será $d\psi = 0$, o sea

$$\phi_{,i}\,\phi_{,j}.dg^{ij} + g^{ij}\,\phi_{,i}.d\phi_{,j} + g^{ij}\,\phi_{,j}.d\phi_{,i} = 0 \qquad (A.1)$$

Pero $dg^{ij} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{ab}}.dg_{ab}$; como $g^{kj}g_{kt} = \delta^j_t$, entonces derivando respecto a g_{ab} obtenemos: $\frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{ab}} = -\frac{1}{2}\,g^{aj}g^{ib} - \frac{1}{2}\,g^{bj}g^{ia}$.

Entonces en (A.1) queda

$$\phi_{,i}\,\phi_{,j}\;g^{aj}g^{ib}.dg_{ab} = 2\,g^{ij}\,\phi_{,i}.d\phi_{,j} \qquad (A.2)$$

Podemos obtener la identidad de invariancia para L derivando la igualdad $\overline{L}(\phi;\;B^k_i\,\phi_{,k};\;B^k_iB^h_jg_{kh}) = L(\phi;\;\phi_{,k};\;g_{kh})$ respecto a B^a_b con lo que

resulta $$L^b\,\phi_{,a} + 2\,L^{bs}\,g_{as} = 0 \qquad (A.3)$$

o también $$L^{bs} = -\frac{1}{2}\,g^{as}\,\phi_{,a}\,L^b \qquad (A.4)$$

Queremos probar que para desplazamientos infinitesimales en la dirección tangente a la hipersuperficie $\psi = c$ resulta $dL = 0$. Recordando que hemos fijado la primer variable, es $dL = L^{bs}.dg_{bs} + L^b.d\,\phi_{,b}$.

Reemplazando L^{bs} por (A.4): $dL = \frac{1}{2}\,L^b(2.d\,\phi_{,b} - g^{as}\,\phi_{,a}.dg_{bs})$.

A esta altura querríamos reemplazar L^b por $g^{tb}\,\phi_{,t}$ para poder aplicar (A.2). Bastaría que fuese $L^b = c.g^{tb}\,\phi_{,t}$ y para que eso ocurra es necesario y suficiente que L^b y $g^{tb}\,\phi_{,t}$ sean proporcionales, es decir $L^bg^{ts}\,\phi_{,t} = L^sg^{tb}\,\phi_{,t}$ para todo s,b. Por (A.4) eso es lo mismo que $L^{bs} = L^{sb}$, lo cual se verifica por la simetría de g_{bs}.

Entonces $$dL = \frac{1}{2}\,(2g^{tb}\,\phi_{,t}.d\,\phi_{,b} - g^{bt}g^{as}\,\phi_{,t}\,\phi_{,a}.dg_{bs}) = 0$$

por (A.2). Queda probado así el Teorema.

COROLARIO. *Si* $L = L(\phi;\;\phi_{,i};\;g_{ij})$ *es una densidad escalar entonces*

$$L = \sqrt{g}\;f(\phi,\psi).$$

En efecto basta observar que $L/\sqrt{g}$ es un escalar y aplicar el Teorema 1.

TEOREMA 3. *Si* $L_{bs} = L_{bs}(\phi;\ \phi_{,i};\ g_{ij})$ *es un tensor 2-covariante simétrico y* $\psi = g^{ij}\ \phi_{,i}\ \phi_{,j}$, *entonces* $L_{bs} = g_{bs}.f(\phi,\psi) + \phi_{,b}\ \phi_{,s}.t(\phi,\psi)$.

Dem. Para una transformación de coordenadas $\overline{x}^i = \overline{x}^i(x^j)$ será

$$\overline{L}_{ij}(\phi;\ B^k_s\ \phi_{,k};\ B^k_s B^h_t g_{kh}) = B^\ell_i B^m_j L_{\ell m}$$

Derivando respecto a B^a_b obtenemos inmediatamente la identidad de invariancia

$$L^b_{ij}\ \phi_{,a} + 2L^{bs}_{ij}g_{as} = \delta^b_i L_{aj} + \delta^b_j L_{ia} \qquad \text{(A.5)}$$

Dado un punto P de la variedad vamos a trabajar con un sistema especial de coordenadas alrededor de dicho punto. Sea $\lambda^t = g^{ts}\ \phi_{,s}$; afirmamos que existe un sistema de coordenadas alrededor de P tal que,

$$\text{en P} \qquad \lambda^1 \neq 0,\ \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \quad ; \quad g_{ij} = \pm\ \delta_{ij} \qquad \text{(A.6)}$$

Para probarlo, observemos que el vector de componentes λ^i define una dirección tangente a la variedad. Si tomamos el primer eje en esa dirección, aseguramos que $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Por otra parte, dado un vector no nulo, es decir que la forma cuadrática fundamental calculada en ese vector no sea cero, se puede elegir una base ortonormal de manera que el primer vector esté en la dirección del vector dado. Pero la suposición de que λ^i sea no nulo es equivalente a la de que $\phi_{,i}$ sea no nulo, es decir $g^{ij}\ \phi_{,i}\ \phi_{,j} \neq 0$. Es claro que para que la ecuación de Klein-Gordon tenga sentido debe cumplirse esa condición; entonces eligiendo la base ortonormal de forma que el primer vector esté en la dirección de los λ^i se verifica (A.6).

Si indicamos $\varepsilon_i = g_{ii} = \pm 1$, entonces

$$\phi_{,t} = \phi_{,s}\ \delta^s_t = \phi_{,s}\ g^{sb}g_{tb} = \lambda^b g_{tb} = \varepsilon_t \lambda^t \qquad \text{(sin sumar t)}$$

Por lo tanto $\phi_{,1} \neq 0$, $\phi_{,2} = \ldots = \phi_{,n} = 0$.

Eligiendo ese sistema, si en (A.5) hacemos $a\neq 1$, $i\neq b\neq j$, resulta $L^{bs}_{ij}\ g_{as} = 0$.

Entonces $L^{ba}_{ij} = 0$ para $a\neq 1$, $i\neq b\neq j$; como $L^{ba}_{ij} = L^{ab}_{ij}$, entonces es $L^{ba}_{ij} = 0$ para $b\neq 1$, $i\neq a\neq j$. Por lo tanto si en (A.5) tomamos $a\neq 1$, $b\neq 1$, $i\neq a\neq j$, entonces $\delta^b_i\ L_{aj} + \delta^b_j\ L_{ia} = 0$.

Haciendo $i=b\neq j$ (sin sumar), obtenemos $L_{aj} = 0$ para $a\neq 1, a\neq j$.

Por la simetría supuesta es $L_{ij} = 0$ para $i\neq j$. Veamos cómo son los L_{ii}.

Tomando $a\neq 1$ en (A.5): $2L^{ba}_{ij}\varepsilon_a = \delta^b_i L_{aj} + \delta^b_j L_{ia}$ (sin sumar la a)

Haciendo b=i, a=j $\qquad 2L^{ba}_{ba}\varepsilon_a = L_{aa} \qquad$ (A.7)

Cambiando nombre a los índices y siempre que $b\neq 1$

$$2L^{ab}_{ab}\varepsilon_b = L_{bb} \qquad \text{(A.8)}$$

Por la simetría supuesta, $L^{bs}_{ij} = L^{bs}_{ji}$, luego de (A.7) y (A.8)

$$g_{bb}L_{aa} = g_{aa}L_{bb} \qquad (a\neq 1\neq b)$$

Por esta relación de proporcionalidad deducimos que debe ser $L_{22} = T.g_{22},\dots,L_{nn} = T.g_{nn}$. Respecto a L_{11}, si $S = (L_{11}-T.g_{11})\phi^{-2}_{,1}$ entonces $L_{11} = T.g_{11} + S.\phi_{,1}.\phi_{,1}$. En definitiva hemos demostrado que en el punto P y para el sistema de coordenadas elegido

$$L_{bs} = g_{bs}T + \phi_{,b}\,\phi_{,s}\,S \qquad \text{(A.9)}$$

Si hacemos una transformación de coordenadas $\overline{x}^i = \overline{x}^i(x^j)$, entonces en P,

$$\overline{L}_{ij} = B^b_iB^s_jL_{bs} = B^b_iB^s_jg_{bs}T + B^b_iB^s_j\,\phi_{,b}\,\phi_{,s}\,S = \overline{g}_{ij}.T + \phi_{,i}\,\phi_{,j}\,S$$

por lo tanto (A.9) vale para todo sistema de coordenadas en P. Como P era cualquiera, (A.9) vale en toda la variedad. Como T y S no varían con el sistema de coordenadas, son escalares. Veamos que son funciones diferenciables:

Dado P en la variedad, consideramos un entorno coordenado de P en el en el cual $g_{ij} = 0$ para $i\neq j$. Entonces tomando $b\neq s$ en (A.9) resulta S diferenciable en ese entorno; luego tomando b=s resulta T diferenciable. Como P era cualquiera, T y S son escalares diferenciables en toda la variedad. Si probamos que son funciones de ϕ, $\phi_{,i}$ y g_{ij} podremos aplicar el Teorema 2 y quedará probado el Teorema.

Como $L_{bs} - g_{bs}T = \phi_{,b}\,\phi_{,s}\,S$, tomando determinante y siendo el segundo miembro un producto, será $\det(L_{bs} - g_{bs}T) = 0$, ecuación que nos indica que T sólo depende de L_{bs} y de g_{bs}, en definitiva de ϕ, $\phi_{,i}$ y g_{ij}. Luego de (A.9) lo mismo vale para S.

REFERENCIAS

[1] CARTAN, E., J.Math. Pure Appl., 1, 141, 1922.

[2] WEYL, H., *Space-Time-Matter*, Dover, N.York, 1922, Apéndice.

[3] VERMEIL, H., Nachr.Ger.Wiss. Gottingen, 334, 1917.

[4] RUND, H., *Variational Problems Involving Combined Tensor Fields*, Abh.Math.Sem.Univ., Hamburg, 29, 1966.

[5] RUND, H., *Invariant Theory of Variational Problems Involving Geometric Objects*, *Tensor*, N.S., 18, 1967, 239-258.

[6] NORIEGA, R., *Tensores deducidos de otros tensores y de sus derivadas ordinarias*, a aparecer en Rev. Mat. Fís. Teórica Univ. Tucumán.

[7] LOVELOCK, D., *The Einstein Tensor and its Generalizations*, Journal Math. Phys., 12, 1971.

[8] LOVELOCK, D., *The Uniqueness of the Einstein's Field Equations in a Four-Dimensional Space*, Arch. Rational Mech. Anal., 33, 1969.

[9] LOVELOCK, D., *Degenerate Lagrange Densities Involving Geometric Objects*, Arch. Rational Mech. Anal., 36, 1970.

[10] LOVELOCK, D., *The Euler-Lagrange Expression and Degenerate Lagrange Densities*, J. Australian Math. Soc. Volume 14, Part 4, 482-495, 1972.

Universidad Nacional de Buenos Aires
Argentina

Recibido en junio de 1975.

Versión final agosto 1975.