Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 29, 1979.

ALGEBRAS DE FUNCIONES DIFERENCIABLES

Gustavo Corach y Angel R. Larotonda*

Dedicado al Doctor Luis A. Santaló

En la presente nota se establecen condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra topológica A sea isomorfa al álgebra de funciones infinitamente diferenciables sobre una variedad diferenciable X de dimensión finita . Se establece de esta forma una correspondencia funtorial entre la categoría de variedades diferenciables y una categoría de álgebras topológicas, correspondencia que deviene una equivalencia categorística. En tal sentido hay puntos de contacto con [5]; la diferencia es que aquí no se manipula con haces sino más bien con secciones globales. Por lo que las caracterizaciones no resultan de traducción inmediata. En particular, algunas condiciones no tienen análogos en ambas presentaciones.

La equivalencia de categorías aquí estudiada tiene como fundamento una algebrización de la geometría diferencial (o, al menos, de parte de ella), de modo análogo al caso de variedades algebraicas afines y álgebras afines, o bien espacios compactos y C*-álgebras conmutativas.

1. Salvo advertencia, todas las álgebras consideradas serán álgebras conmutativas sobre el cuerpo real R, con elemento unidad indicado 1. Un morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ de tales álgebras será una aplicación R-lineal que verifique

$$f(x.y) = f(x).f(y) \quad \text{para} \quad x,y \in A, \qquad f(1) = 1 .$$

En general la mayor parte de las nociones que se utilizarán pueden pensarse en contextos más amplios, pero no insistiremos en ello. En particular nos restringiremos al caso de álgebras m-convexas [12]; indicaremos en tal caso con X(A) al espacio de caracteres de A, es decir al conjunto de los morfismos continuos $h\colon A \longrightarrow R$, provisto de la topología de la convergencia simple. Por lo general no requiere mayores esfuerzos adaptar la teoría existente (álgebras sobre el cuerpo C) a nuestro caso, vía complexificación.

Como nos interesan las álgebras "esencialmente" reales, nos concentraremos en aquellas (que denominaremos *álgebras formalmente reales*) que verifican:

* El primero de los autores realizó el trabajo contando con el apoyo de una beca del CONICET.

$$\text{"}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \text{ no inversible } \Rightarrow \text{ ningún } a_i \text{ inversible"}$$

Si A es un álgebra formalmente real es inmediato que $A \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ es una C-álgebra m-convexa con involución cuyos caracteres son todos hermitianos (observar que $1 + xx^*$ resulta siempre inversible); por otro lado A se identifica con la subálgebra de los elementos hermitianos de $A \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ y los caracteres de A y de $A \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ se corresponden. Combinando esto con [12] pág. 53 obtenemos:

PROPOSICION 1.1. *Sea* A *formalmente real; entonces todo ideal maximal cerrado es de codimensión* 1 *y por ende el núcleo de un carácter. Si además* A *es de Fréchet, todo morfismo* $h: A \longrightarrow \mathbf{R}$ *es continuo. En consecuencia, si* A *es un álgebra de Fréchet formalmente real y* $M \subset A$ *es un ideal, son equivalentes*

a) M *es maximal cerrado.*

b) M *es de codimensión* 1.

c) $M = h^{-1}(0)$ *para un (único) morfismo* $h: A \longrightarrow \mathbf{R}$.

Nos restringiremos en lo que sigue a álgebras de Fréchet formalmente reales y m-convexas; en tal caso X(A) es siempre hemicompacto ([12] pág. 22). De 1.1 resulta una inyección continua

$$\eta: X(A) \longrightarrow J(A) \qquad (1)$$

donde J(A) indica el espacio de los ideales maximales de A, provisto de la topología de Jacobson (esto es, como subconjunto del espectro primo de A, [2]). Recordemos que esta topología hace de J(A) un espacio T_1, casi-compacto pero en general no separado.
Se dirá que A es un *álgebra armónica* si J(A) es separado (luego compacto) (ver [15], [16]).

La *transformación de Gelfand*

$$g: A \longrightarrow C_c(X(A),\mathbf{R})$$

definida por $g(x) = \hat{x}$ (donde $\hat{x}(h) = h(x)$) resulta continua cuando se considera la topología de convergencia uniforme sobre compactos para $C(X(A),\mathbf{R})$ (éste es el significado del subíndice c); basta observar que por ser A de Fréchet coinciden los equicontinuos con los débilmente relativamente compactos de A'. La imagen $\hat{A} = g(A)$ es una subálgebra densa de $G(X(A),\mathbf{R})$ por el teorema de Stone-Weierstrass.

Es claro asimismo que la topología de X(A) es la topología definida por la familia $\hat{A}$, esto es la menos fina que hace continuas a todas las aplicaciones $\hat{a}$(a en A). El núcleo de g es evidentemente $\cap \{h^{-1}(0): h \in X(A)\} = \text{Rad}(A)$ que en nuestro caso coincide con el radical "algebraico" (esto es, la intersección de todos los ideales maximales de A) (ver [12], Prop. 7.3). La identidad de ambos radicales tiene como consecuencia inmediata el hecho que la imagen de la aplicación (1) es densa en J(A).

El álgebra A se dice *regular* si la aplicación (1) es un homeomorfismo entre X(A) y su imagen (o lo que es igual, la topología de Jacobson inducida en X(A) coincide con la topología débil).

Adoptaremos aquí una definición de regularidad fuerte que es una modificación de la usada en [1]; para ello denotemos con sop(a), para $a \in A$, al soporte de la aplicación $\hat{a}: X(A) \longrightarrow R$, esto es:

$$\text{sop}\ (a) = \overline{\{h \in X(A): h(a) \neq 0\}}$$

Si $A_o = \{a \in A: \text{sop}(a) \text{ es compacto}\}$, es inmediato que A_o es un ideal de A que puede coincidir con A (por ejemplo si X(A) es compacto).

Diremos que A es un *álgebra fuertemente regular* si se verifican:

a) Rad (A) = 0 (esto es g es inyectiva).

b) Para cada $h \in X(A)$ y cada $a \in h^{-1}(0)$ existe un elemento $b \in A_o$ tal que $h(b) = 1$ y $b^2(1-a) + \lambda^2$ es inversible para todo escalar $\lambda \neq 0$.

LEMA 1.2. *Sea A un álgebra de Fréchet* m-*convexa, formalmente real y fuertemente regular. Entonces*

a) A *es regular y armónica.*

b) X(A) *es localmente compacto y numerable al infinito.*

c) A_o *es un ideal denso de* A.

Demostración. a) Sea $U \subset X(A)$ un abierto para la topología débil; veamos que es abierto para la topología de Jacobson. Sea $h_o \in U$; por definición existen elementos $x_1,\dots,x_r$ en A y $\varepsilon > 0$ tales que
$V = \bigcap_{i=1}^{r} \{h: |h(x_i) - h_o(x_i)| < \varepsilon\} \subset U$. Pongamos

$a = 1/\varepsilon^2 . \sum_{i=1}^{r} (x_i-h_o(x_i))^2$; claramente $h_o(a) = 0$ de modo que por definición existe un $b_o \in A_o$ tal que $b^2. (1-a) + \lambda^2$ es inversible para todo $\lambda \neq 0$. Por consiguiente la aplicación $\hat{b}^2. (1-\hat{a}) + \lambda^2$ no se anula sobre ningún $h \in X(A)$ (cualquiera sea $\lambda \neq 0$) de donde $\hat{b}^2.(1-\hat{a}) \geqslant 0$. En consecuencia $\text{sop}(b) \subset \{h: h(a) \leqslant 1\}$. Si $x = b^2.(1-a)$ tendremos entonces $h_o(x) = 1$ y $h(x) = 0$ si $h \notin U$ (ya que $h \notin U$ implica $h(a) \geqslant 1$ luego $\hat{x}(h) \leqslant 0$); ahora si $V(x) = \{M \in J(A): x \notin M\}$, V(x) es entorno de h_o para la topología de Jacobson y $V(x) \cap X(A) \subset U$. Esto da la regularidad y por consiguiente lo afirmado en a); en efecto de [4] se deduce que J(A) es isomorfo de manera natural a la compactificación de Stone-Čech $\beta X(A)$.

b) Como X(A) es unión numerable de compactos, basta ver que para cada $h_o \in X(A)$ existe un entorno compacto; por definición existe un $b \in A_o$

tal que $h_o(b) = 1$; luego $V = \{h: h(b) \neq 0\} \subset \text{sop}(b)$ da el entorno en cuestión.

c) Si $I \subset A$ es un ideal cerrado (propio) existe por lo menos un $h \in X(A)$ tal que $I \subset h^{-1}(0)$ (cf. [12] th. 5.9). Si A_o no fuera denso existiría $h \in X(A)$ tal que $\overline{A}_o \subset h^{-1}(0)$ contra la definición de regularidad fuerte.

OBSERVACIONES 1.3. i) Con las hipótesis de 1.2 vale un "teorema de Urysohn": si F_1 y F_2 son cerrados disjuntos de $X(A)$ entonces existe un $a \in A$ tal que $\hat{a}|F_1 = 0$ y $\hat{a}|F_2 = 1$ (cf. [4] 1.5 ó [6]).

ii) Asimismo se deduce de 1.2 la existencia de particiones de la unidad por elementos de A, y en particular toda aplicación $f:X(A) \longrightarrow \mathbf{R}$ que coincide localmente con elementos de A es un elemento de A (cf. [6] 0.2.4.4).

La situación precedente es propicia para considerar localizaciones; sin desarrollar una teoría general (ver [6]) nos limitaremos a considerar el caso de un álgebra de Fréchet m-convexa, formalmente real y fuertemente regular A. Si $h \in X(A)$ indicaremos con $A_{M(h)}$ el álgebra local de A en $M(h) = h^{-1}(0)$ ([2] ch. II §3).

Por otro lado A_h denotará el álgebra de gérmenes de elementos de A en h, esto es: A_h es el cociente de A por el ideal $\{a: \hat{a}|U = 0$ para un entorno U de h$\}$. El morfismo $a \longrightarrow \hat{a}(h)$ se anula sobre ese ideal, definiendo así un morfismo $A_h \longrightarrow \mathbf{R}$ cuyo núcleo es el ideal $m(h)$ de los gérmenes nulos en h. Como $a \longrightarrow \hat{a}$ es un isomorfismo de A sobre $\hat{A}$ (pues $\text{Rad}(A) = 0$), resulta de inmediato que el morfismo $a \longrightarrow \hat{a}$ induce un isomorfismo $A/P(h) \xrightarrow{\approx} A_h$, donde $P(h) = \{a \in A: h \notin \text{sop}(a)\}$ es un ideal incluído en $M(h)$; por ese isomorfismo $M(h)/P(h)$ se aplica sobre $m(h)$.

PROPOSICION 1.4. *En las condiciones anteriores se verifica:*

a) A_h *es un álgebra local, naturalmente isomorfa a* $A_{M(h)}$.

b) $P(h)$ *es el menor ideal cuya cápsula es* $\{h\}$ (cf. [9] pág. 111). *En particular* $P(h) \subset M(h)^r$ *para todo* $r \geqslant 1$.

Demostración. a) Veamos primero que A_h es local; es suficiente ver que si $a \in A$ verifica $h(a) \neq 0$ entonces a es inversible módulo $P(h)$. Sea V un entorno compacto de h tal que $\varphi(a) = \hat{a}(\varphi) \neq 0$ para todo $\varphi \in V$ y sea $I = \cap\{\varphi^{-1}(0): \varphi \in V\}$, ideal cerrado de A contenido en $P(h)$. Si $B = A/I$ entonces B es un álgebra de Fréchet m-convexa y la aplicación $A \xrightarrow{\pi} B$ induce un homeomorfismo $X(B) \longrightarrow \{\psi \in X(A): \psi(I) = 0\}$; ahora $\{\psi \in X(A): \psi(I) = 0\}$ es la clausura de V para la topología de Jacobson, de modo que (por 1.2 a)) $X(B)$ se identifica con V. Por lo tanto B es una Q-álgebra (ver [12] 13.6) y por ende todo elemento de

B es regular, es decir de espectro compacto (cf. [9], pág. 64). Poniendo $b = \pi(a) \in B$, es claro que b no se anula en ningún punto $V = X(B)$ y es un resultado clásico entonces que b es inversible en B (ver por ejemplo [17] ch. VI ó [12] 10.1) ya que $\mathrm{Rad}(B) = 0$. Es claro entonces que a es inversible módulo I, por lo tanto es inversible módulo P(h). Habiendo probado que A_h es local con ideal maximal m(h) consideramos el morfismo $x \longrightarrow \bar{x}$ de A en A_h. Como $\bar{x}$ es inversible cada vez que $x \notin M(h)$, resulta que este morfismo se factoriza como la composición del morfismo canónico $A \longrightarrow A_{M(h)}$ con el morfismo $\theta: A_{M(h)} \longrightarrow A_h$ definido como sigue: si utilizamos la notación a/b para los elementos de $A_{M(h)}$ entonces ponemos $\theta(a/b) = \bar{a}.(\bar{b})^{-1}$. Es obvio entonces que θ es un epimorfismo. Por otro lado si $\theta(a/b) = \theta(c/d)$ resulta que $\hat{a}.\hat{d} - \hat{b}.\hat{c}$ se anula en un entorno U de h; si $V \subset U$ es un entorno compacto de h, por la regularidad existe un $r \in A$ con $\hat{r}|V = 1$ y $\hat{r}|X(A)-U = 0$. Por lo tanto, siendo $\mathrm{Rad}(A) = 0$ resulta $r \in M(h)$ y $r.(a.d-b.c) = 0$ de donde $a/b = c/d$ por la definición de $A_{M(h)}$.

b) Es una simple adaptación de [15] 1.23 y se omite la demostración.

2. Se hace notar que si A es un álgebra de Fréchet m-convexa, formalmente real y semisimple (o sea $\mathrm{Rad}(A) = 0$), A resulta un espacio vectorial ordenado por $a \geqslant 0 \Longleftrightarrow h(a) \geqslant 0$ para todo $h \in X(A)$, o sea $a \geqslant 0 \Longleftrightarrow \hat{a} \geqslant 0$.

El cono $A^+ = \{x \in A: x \geqslant 0\}$ resulta cerrado y el orden resulta compatible con la estructura de álgebra de A, es decir $x \in A^+$, $y \in A^+ \Rightarrow$ $\Rightarrow x.y \in A^+$.

3. Una cuestión esencial es la formulación de un "cálculo operacional" adecuado en A. De las diversas definiciones adoptaremos la siguiente: si $0 \leqslant k \leqslant \infty$ diremos que A *admite un cálculo operacional de clase* C^k si para cada $x \in A$ existe un morfismo continuo $T_x: C^k(R) \longrightarrow A$ tal que $T_x(t) = x$ (donde t denota la aplicación idéntica de R) donde la topología de $C^k(R)$ es la de convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas hasta el orden k (ver [7] ch. XVII).

Como los polinomios son densos en $C^k(R)$, resulta claro que hay a lo sumo un morfismo con esa propiedad. Si A es un álgebra de Fréchet m-convexa semisimple la continuidad de T_x es automática por el teorema del gráfico cerrado.

LEMA 3.1. *Sea* A *un álgebra de Fréchet* m-*convexa semisimple. Son equivalentes:*

a) A *admite un cálculo operacional de clase* C^k.

b) *Para toda* $f \in C^k(R)$ *y para todo* $x \in A$, $f \circ \hat{x} \in \hat{A}$.

Si A *es además formalmente real y fuertemente regular,* a) *y* b) *equivalen a:*

c) *Para toda* $f \in C_0^k(\mathbf{R})$ *(funciones de clase* C^k *con soporte compacto) y para todo* $x \in A$*,* $f \circ \hat{x} \in \hat{A}$. Esto a su vez se prueba viendo que el conjunto de las $f \in C^k(\mathbf{R})$ para las cuales vale esta fórmula es una subálgebra cerrada que contiene a los polinomios en t.

Para ver que b) $\Rightarrow$ a) notemos que $x \longrightarrow \hat{x}$ es un isomorfismo de A sobre $\hat{A}$ (algebraico); poniendo $T_x(f)$ = único $y \in A$ tal que $f \circ \hat{x} = \hat{y}$, resulta de inmediato un morfismo $C^k(\mathbf{R}) \longrightarrow A$ que define un cálculo operacional de clase C^k en A.

Finalmente veamos que con las hipótesis adicionales c) $\Rightarrow$ b); sea $f \in C^k(\mathbf{R})$ y sea $x \in A$. Si $h_0 \in X(A)$ consideremos un entorno compacto V y enseguida una aplicación $g \in C_0^k(\mathbf{R})$ tal que $g|K = f|K$, siendo K el compacto $\hat{x}(V)$. Claramente $g \circ \hat{x} \in \hat{A}$ y además $g \circ \hat{x}|V = f \circ \hat{x}|V$; ahora basta usar 1.3 ii) para obtener $f \circ \hat{x} \in \hat{A}$.

Interesa particularmente el caso $k = \infty$. Diremos que un álgebra A es *diferenciablemente completa* si admite un cálculo operacional de clase C^∞; se da esta denominación en [6] donde además se da una caracterización de las mismas en términos de la topología de A.Adaptaremos a nuestra situación dicha teoría; conviene hacer notar que las álgebras de [6] son álgebras sobre **C**, de modo que se considerará aquí el caso de un álgebra formalmente real A; y su complexificada $A_{\mathbf{C}}$. Es inmediato que A es diferenciablemente completa si y sólo si $A_{\mathbf{C}}$ lo es. Si A es m-convexa y completa está definido $e^{i\lambda x} \in A_{\mathbf{C}}$ para todo $\lambda \in \mathbf{R}$ y $x \in A$, mediante la serie usual. Recordemos por otro lado que un cálculo operacional analítico es siempre posible en cualquier álgebra m-convexa completa ([17], pág. 120), en particular para definir $e^{i\lambda x}$.

PROPOSICION 3.2. *Sea* A *un álgebra de Fréchet* m*-convexa, formalmente real y fuertemente regular. Son equivalentes:*

a) A *es diferenciablemente completa.*

b) *Para cada* $x \in A$ *la aplicación* $\lambda \longrightarrow e^{i\lambda x}$ *es de crecimiento lento (o sea: para cada seminorma continua de álgebra de* A*, o al menos para cada seminorma de un sistema fundamental, existen* $c \geqslant 0$ *y un entero* $m \geqslant 0$ *tales que* $p(e^{i\lambda x}) \leqslant c(1+|\lambda|^m)$ *para todo* $\lambda \in \mathbf{R}$).

La equivalencia de a) y b) es entonces consecuencia de [6] III.21.1; de cualquier manera podemos dar aquí una demostración alternativa de b) $\Rightarrow$ a); por 3.1 c) basta ver que $f \circ \hat{x} \in \hat{A}_{\mathbf{C}}$ cuando $x \in A$ y $f \in C_0^\infty$; si $\hat{f}$ indica la transformada de Fourier usual de f, la integral vectorial

$$\int_{\mathbf{R}} e^{i\lambda x} \cdot \hat{f}(\lambda)d\lambda$$

existe y define un elemento de $A_{\mathbf{C}}$ (que denotaremos y), ya que si p es una seminorma de A la aplicación $\lambda \longrightarrow \hat{f}(\lambda).p(e^{i\lambda x})$ es integrable por ser $\hat{f}$ de decrecimiento rápido. Es fácil ver entonces que $\hat{y}(h) = f(\hat{x}(h))$ para todo $h \in X(A)$, esto es $f \circ \hat{x} = \hat{y}$.

4. Consideremos ahora una variedad diferenciable X (salvo advertencia todas las variedades diferenciables serán de dimensión finita y numerables al infinito) y su álgebra $C^\infty(X)$ de aplicaciones $X \longrightarrow \mathbf{R}$ de clase C^∞. Esta álgebra es obviamente formalmente real y provista de la topología usual (ver [7], ch. XVII) resulta un álgebra de Fréchet m-convexa separable.

Si $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación C^∞ entre variedades, la regla $a \longrightarrow f \circ a$ define un morfismo $f^*: C^\infty(Y) \longrightarrow C^\infty(X)$ y es entonces inmediato que las reglas $X \longrightarrow C^\infty(X)$, $f \longrightarrow f^*$ definen un funtor contravariante de la categoría de variedades diferenciables en la categoría de álgebras m-convexas. Nuestro objeto es caracterizar la imagen de este funtor, para lo cual haremos algunas observaciones previas. Ante todo notemos que cada $x \in X$ define un carácter $e_X(x) : C^\infty(X) \longrightarrow \mathbf{R}$ por $e_X(x)(f) = f(x)$ ("evaluación en x").

PROPOSICION 4.1. *Sea X una variedad diferenciable. Entonces*

a) *La aplicación natural* $e_X: X \longrightarrow X(C^\infty(X))$ *es un homeomorfismo.*

b) *El álgebra* $C^\infty(X)$ *es fuertemente regular.*

Demostración. Como $C^\infty(X)$ es una subálgebra de $C(X)$ que distingue puntos la aplicación e_X es inyectiva; su continuidad es asimismo inmediata. Veamos que es biyectiva (comparar con [1]). Sea $\varphi_o: C(X) \longrightarrow \mathbf{R}$ un carácter, se trata de probar que existe un x_o tal que $\varphi_o(f) = f(x_o)$ para toda $f \in C^\infty(X)$. Si no existe un tal x_o, para cada $x \in X$ existe $f_x \in C^\infty(X)$ que verifica $f_x(x) \neq 0$ y $\varphi_o(f_x) = 0$.

Para cada x consideramos un entorno relativamente compacto U_X tal que $0 \notin f_X(U_X)$; como X es numerable al infinito existe un subcubrimiento numerable U_{x_i} $(i \geq 1)$ y una partición C^∞ de la unidad g_i $(i \geq 1)$ subordinada a dicho cubrimiento. Pongamos $f = \sum_{i\geq 1} g_i.f_{x_i}^2$; ciertamente $f \in C^\infty(X)$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in X$, en particular f es inversible. Pero esto es absurdo pues f pertenece al ideal maximal (cerrado) $\varphi_o^{-1}(0)$: en efecto si $u_n = \sum_{i=1}^{n} g_i.f_{x_i}^2$ tendremos $u_n \longrightarrow f$ pues para cada $x \in X$ hay un entorno V de x tal que $u_n|V = f|V$ para todo $n \geq n_o$; por lo tanto $\varphi_o(f) = \lim_{n\to\infty} \varphi_o(u_n) = 0$. Finalmente e_X es un homeomorfismo: si $x_o \in X$ y U es entorno de x_o existe $f \in C^\infty(X)$ con soporte compacto incluído en U y $f(x_o) = 1$. Claramente $V = \{\varphi \in X(C^\infty(X)): \varphi(f) \neq 0\}$ es entorno de $e_X(x_o)$ y $V \subset e_X(U)$.

Con las modificaciones obvias todo esto es válido para $C^k(X)$ con $0 \leq k \leq \infty$; además si operamos sobre cada componente conexa lo afirmado sólo requiere que X sea paracompacta.

b) Es evidente que $C^\infty(X)$ es semisimple; por otro lado si $x_o \in X$ y $f(x_o) = 0$ para una $f \in C^\infty(X)$, basta considerar $g \in C^\infty(X)$ tal que $g(x_o) = 1$ y sop(g) es un compacto contenido en $\{x \in X: f(x) < 1\}$. Entonces $g^2.(1-f) \geqslant 0$, y de aquí es claro que $C^\infty(X)$ es fuertemente regular.

El siguiente resultado es bien conocido (cf. [16], §5); su demostración sólo se incluye a los efectos de hacer completa la exposición.

PROPOSICION 4.2. *Sean* X,Y *variedades diferenciables y sea* $f: X \longrightarrow Y$ *una aplicación continua. Entonces son equivalentes:*

a) f *es de clase* C^∞.

b) *Para toda* $g \in C^\infty(Y)$, $g \circ f \in C^\infty(X)$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) es evidente; suponiendo que vale b), sea $x \in X$ y sea V un entorno de f(x), $v: V \longrightarrow R^m$ un difeomorfismo. Sea U un entorno de x tal que $f(U) \subset V$, con un difeomorfismo $u: U \longrightarrow R^n$. Por hipótesis $g \circ f: X \longrightarrow R^m$ es de clase C^∞ luego $v \circ f \circ u^{-1}: R^n \longrightarrow R^m$ también lo es, pero esto significa que f es de clase C^∞.

COROLARIO 4.3. *Sean* X,Y *variedades diferenciables.*

a) *Si* $\alpha: C^\infty(Y) \longrightarrow C^\infty(X)$ *es un morfismo de álgebras, existe una única aplicación* $f: X \longrightarrow Y$ *de clase* C^∞ *tal que* $f^* = \alpha$.

b) X *e* Y *son difeomorfas si y sólo si* $C^\infty(X)$ *y* $C^\infty(Y)$ *son álgebras isomorfas.*

Demostración. a) La unicidad es evidente; por otra parte α induce una aplicación continua $\alpha': X(C^\infty(X)) \longrightarrow X(C^\infty(Y))$ y basta poner

$f = e_Y^{-1} \circ \alpha' \circ e_X$ usando 4.1 y 4.2.

b) Es consecuencia inmediata de a).

Los resultados anteriores muestran que, mediante el funtor $X \longrightarrow C^\infty(X)$, la categoría de variedades diferenciables es equivalente a una cierta subcategoría plena de la categoría de las álgebras de Fréchet m-convexas formalmente reales. Indicando con A esta subcategoría de las C^∞-álgebras, daremos primero una serie de condiciones que deben cumplir los objetos de A. Se verá luego que esas condiciones son asimismo suficientes para que un álgebra de Fréchet m-convexa formalmente real sea del tipo $C^\infty(X)$ para una variedad diferenciable X.

4.4. a) *Toda* C^∞*-álgebra es fuertemente regular:* es evidente por 4.1. ii).

4.4. b) *Toda* C^∞*-álgebra es diferenciablemente completa* (cf. [6]): evidente.

4.4. c) *Si* A *es una* C^∞*-álgebra, el* A*-módulo* Der(A) *de las derivaciones de* A *es proyectivo y finitamente generado* (recordamos que si M es un A-módulo una derivación D: A $\longrightarrow$ M es una aplicación R - lineal que verifica $D(a_1.a_2) = a_1.D(a_2) + a_2.D(a_1)$ para todo par de elementos $a_1, a_2 \in A$; ver [10]).

Si A es un álgebra de Fréchet m-convexa regular semisimple toda derivación D: A $\longrightarrow$ A es automáticamente continua (cf. [13]). Aquella afirmación es una consecuencia inmediata de la bien conocida identificación entre derivaciones de $C^\infty(X)$ y campos vectoriales de clase C^∞ sobre X (o sea secciones de clase C^∞ del fibrado tangente T(X)). (cf. [14]).

Por supuesto el A-módulo dual $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Der}(A),A)$ también es proyectivo y finitamente generado, y se identifica con el módulo de secciones C^∞ del fibrado dual de T(X), que se denota $\Gamma(T(X)^*)$ ("formas diferenciales de grado uno").

Si consideramos el morfismo de álgebras de Fréchet $A \hat{\otimes} A \xrightarrow{\psi} A$ inducido por la multiplicación $(x,y) \mapsto x.y$ (aquí el producto tensorial indica el producto tensorial proyectivo [8]) y si Δ es el ideal núcleo de ψ, se sabe que Der(A) es el A-módulo dual de $\Delta/\overline{\Delta}^2$ (cf. [6]); si ponemos $\Omega(A) = \Delta/\overline{\Delta}^2$ esto significa que $\mathrm{Der}(A) = \mathrm{CHom}_A(\Omega(A),A)$, donde CHom_A indica los homomorfismos A-lineales continuos.

El A-módulo de Fréchet $\Omega(A)$ es el denominado módulo de diferenciales de A, con significado análogo al módulo de diferenciales de Kahler en el caso de la geometría algebraica.

Sin embargo, de lo anterior no se deduce mucho sobre el módulo $\Omega(A)$; el resultado siguiente es conocido pero se adjunta una demostración para no dejar lagunas en la exposición.

LEMA 4.4. d). *Si* A *es una* C^∞*-álgebra, el* A*-módulo* $\Omega(A)$ *es proyectivo finitamente generado.*

Demostración. Debemos considerar el caso $A = C^\infty(X)$.

i) X = U abierto de $\mathbf{R}^m$. Se sabe que en este caso $A \hat{\otimes} A$ se identifica con $C^\infty(U \times U)$ y que Δ se identifica con el ideal de las aplicaciones nulas sobre la diagonal. De la fórmula de Taylor se deduce que Δ es generado por los $x_i - y_i$ $(1 \leq i \leq m)$ y de aquí sigue inmediatamente que los elementos dx_i $(1 \leq i \leq m)$ (clase módulo Δ^2 de los $x_i - y_i$) son una base de $\Omega(A)$; éste resulta así libre de dimensión m.

ii) Caso general. Por el teorema de inmersión de Whitney (cf. [7], ch. XVI) podemos suponer que X es una subvariedad cerrada de $\mathbf{R}^m$ para m suficientemente grande; sea U un entorno tubular de X y r: U $\longrightarrow$ X de clase C^∞ una retracción (loc. cit.). La inclusión induce un epimorfismo $i^*: B = C^\infty(U) \longrightarrow A = C^\infty(X)$ con inversa a derecha $r^*: A \longrightarrow B$ dada por $r^*(f) = f \circ r$. De la teoría general hay un epimorfismo

$u: A \otimes_B \Omega(B) \longrightarrow \Omega(A)$ ([6], §III) que verifica $u(1 \otimes d_B b) = d_A(i^* (b))$ para cada $b \in B$. Notemos que u es A-lineal y continuo y que de lo anterior resulta que $A \otimes_B \Omega(B)$ es un A-módulo libre (por ser $\Omega(B) \approx B^m$). Bastará entonces definir una inversa a derecha de u; esto se hace poniendo primero $\lambda: A \longrightarrow A \otimes_B \Omega(B)$, $\lambda(a) = 1 \otimes d_B\, r^*(a)$. Así λ es una derivación continua, luego por definición hay una aplicación A-lineal continua $v: \Omega(A) \longrightarrow A \otimes_B \Omega(B)$ que verifica $\lambda = v \circ d_A$.
De esto sigue inmediatamente que $u \circ v(d_A x) = d_A x$ para todo $x \in A$, luego $u \circ v = id$, ya que los elementos $d_A(x)$ $(x \in A)$ generan un submódulo denso de $\Omega(A)$ (cf. [6] §III).

Mencionemos que por ser Der(A) el dual de $\Omega(A)$, usando 4.4.d) es fácil probar que $\Omega(A)$ es canónicamente isomorfo al módulo de diferenciales de grado 1.

4.4.e) *Toda* C^∞*-álgebra* A *es topológicamente finitamente generada*; esto significa que existe una familia finita $u_1,\dots,u_n$ de elementos de A tal que la subálgebra de A generada por dichos elementos (la subálgebra de "polinomios" en $u_1,\dots,u_n$) es densa en A. La demostración de esto es inmediata cuando $A = C^\infty(R^m)$: los u_i son las funciones coordenadas $(t_1,\dots,t_m) \longrightarrow t_i$. En el caso general basta observar que por el teorema de inmersión de Whitney $C^\infty(X)$ es un cociente de $C^\infty(R^m)$ para un m conveniente.

4.4.f) Si A es una C^∞-álgebra y $h \in X(A)$ el ideal maximal $M(h)$ tiene propiedades muy interesantes que reflejan la estructura "puntual" de la variedad. Así por ejemplo no es difícil ver que $M(h)$ es finitamente generado (o sea, todo ideal maximal cerrado de $C^\infty(X)$ es de tipo finito). Supongamos primero $X = R^m$, $M(h)$ determinado por el punto $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_m)$.

$$f(\xi) = f(\lambda) + \sum_{i=1}^{m} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(t\xi + (1-t)\lambda)dt\right) (\xi_i - \lambda_i) \qquad (3)$$

muestra que los elementos $\xi_i - \lambda_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ generan $M(h)$. El caso general se reduce a éste, ya que podemos suponer que X es una subvariedad cerrada de R^m; si $f \in M(h)$ hay una extensión $\overline{f} \in C^\infty(R^m)$ de f y se aplica lo anterior a $\overline{f}$, en cuyo caso los elementos $\xi_i|X - \lambda_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ generan $M(h)$. Debe notarse que el argumento no es aplicable al caso $C^r(X)$ con $r < \infty$.

Hay otra consecuencia importante de la fórmula (3) que también utilizaremos. Si $M(h)^2 = \{\sum a_i . b_i;\ a_i, b_i \in M(h)\}$ entonces $M(h)^2$ es un ideal contenido en $M(h)$, a saber el ideal de los $f \in C^\infty(X)$ que se anulan en h junto con su diferencial. La demostración de esto es inmediata a partir de (3), ya que cuando X es un entorno abierto de $\lambda \in R^m$ las condiciones $df(\lambda) = 0$ y $\partial f/\partial \xi_i(\lambda) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ son equivalentes. Resulta claro entonces que $M(h)^2$ es un ideal cerrado. Sin embargo es importante hacer notar que este hecho es completamente general.

En efecto:

LEMA 4.4. g). *Sea* A *un álgebra de Fréchet* m-*convexa real y sea* $M \subset A$ *un ideal maximal cerrado. Si* M *es finitamente generado entonces* M^2 *es un ideal cerrado.*

Demostración. Si $x_1,\dots,x_p$ generan M, las clases de $x_1,\dots,x_p$ generan M/M^2 como R-espacio vectorial, luego $\dim_R(M/M^2) < \infty$.

Consideremos la aplicación A-lineal $u: A \oplus \dots \oplus A$ (p factores) $\longrightarrow M$ definida por $u(a_1,\dots,a_p) = \sum_{i=1}^{p} a_i.x_i$; como u es continua y suryectiva, por el teorema del gráfico cerrado se deduce que u es abierta, luego M es un cociente de $A \oplus \dots \oplus A$ y bastará ver que $u^{-1}(M^2)$ es cerrado en $A \oplus \dots \oplus A$; pero $u^{-1}(M^2) \supset M \oplus \dots \oplus M$, que es cerrado de codimensión finita en $A \oplus \dots \oplus A$, de donde resulta la tesis. (Evidentemente con una demostración análoga resulta M^r cerrado para todo $r \geqslant 1$.)

4.4. h). *Si* A *es una* C^∞*-álgebra, para cada* $h \in X(A)$ *se tiene* (cf. §2)

$$A^+ \cap (M(h)) \subset M(h)^2. \qquad (4)$$

En efecto, esto no es otra cosa que el criterio elemental de determinación de extremos de una función ("condición necesaria") pues $f \in C^\infty(X)$ se anula en $x \in X$ y $f \geqslant 0$, entonces f tiene un mínimo en x y por consiguiente $df(x) = 0$, y lo afirmado resulta de la discusión precedente.

De cualquier manera es claro que estas condiciones "puntuales" no reflejan completamente la estructura de una variedad diferenciable. Una condición global satisfactoria sobre el álgebra $A = C^\infty(X)$ es:

4.4. i). *La diagonal* Δ (*núcleo del morfismo canónico* $A \hat{\otimes}_R A \longrightarrow A$) *es un ideal de tipo finito de* $A \hat{\otimes}_R A$. En efecto, cuando $X = R^n$ es claro que $A \hat{\otimes} A$ se identifica con $C^\infty(R^n \times R^n)$ (con "variables $x_1,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_n$") y que Δ consiste de las aplicaciones $f: R^n \times R^n \longrightarrow R$ de clase C^∞ y nulas sobre la "diagonal geométrica" esto es $f(x,x) = 0$ para todo $x \in R^n$. Con un argumento igual al de 4.4.f) se ve que una tal aplicación es de la forma

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} g_i(x,y).(x_i - y_i)$$

con $g_i \in C^\infty(R^n \times R^n)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Por consiguiente los $x_i - y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ generan Δ. En el caso de una variedad diferenciable X se utiliza este hecho junto con una inmersión en algún R^n.

Del mismo modo resulta que Δ^2 (o más generalmente Δ^r) es un ideal cerrado que consiste de las aplicaciones nulas junto con sus derivadas primeras (resp. las derivadas de orden $< r$) sobre la diagonal. Se verá en lo que sigue que esta propiedad es más fuerte que las indicadas en 4.4; ver 5.4 y 4.4.g).

Resumiendo:

PROPOSICION 4.5. *Sea* A *una* C^∞*-álgebra. Entonces:*

i) A *es un álgebra de Fréchet* m*-convexa formalmente real.*

ii) A *es fuertemente regular.*

iii) *El* A*-módulo* $\Omega(A)$ *es proyectivo.*

iv) *La diagonal* Δ *es un ideal de* $A \hat{\otimes} A$ *de tipo finito y* Δ^2 *es cerrado.*

v) A *es topológicamente finitamente generada.*

vi) *Para cada* $h \in X(A)$ *se verifica* $A^+ \cap M(h) \subset M(h)^2$.

vii) A *es diferenciablemente completa.*

Veremos que es posible probar que las condiciones enunciadas en 4.5 constituyen de hecho una caracterización de las C^∞-álgebras.
El siguiente parágrafo provee algunos lemas técnicos destinados a la demostración de esta afirmación.

5. LEMAS TECNICOS. Si A es una **R**-álgebra y $S \subset A$ es un subconjunto no vacío indicaremos con $[S]$ (resp. $[S]_o$) a la subálgebra (resp. subálgebra "sin identidad") de A engendrada por S. Claramente $[S]$ (resp. $[S]_o$) consiste de los "polinomios" $P(s_1,\ldots,s_r)$ ($s_i \in S$) (resp. "polinomios sin término constante").

LEMA 5.1. *Sea* A *un álgebra localmente convexa sobre* R, $a_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *tales que* $[a_1,\ldots,a_r]$ *es densa en* A. *Entonces para todo* $h \in X(A)$ *la subálgebra sin identidad* $[a_1 - h(a_1),\ldots,a_r - h(a_r)]_o$ *es densa en* $M(h)$.

Demostración. Evidente; basta observar que si $P \in R[t_1,\ldots,t_r]$ entonces $P(a_1,\ldots,a_r) = Q(a_1-h(a_1),\ldots,a_r-h(a_r)) + \alpha$ donde Q es un polinomio sin término constante y $\alpha \in R$.

LEMA 5.2. *Sea* A *un álgebra que verifica las condiciones* i) *e* ii) *de* 4.5. *Supongamos que una sucesión* $(h_j)_{j\geq 1}$ *en* $X(A)$ *converge a un cierto* $h \in X(A)$, $h \neq h_j$ *para todo* $j \geqslant 1$. *Existe entonces un* $x \in M(h)$ *tal que* $h_j(x) > 0$ *para todo* $j \geqslant 1$.

Demostración. Para cada $j \geqslant 1$ existe un $x_j \in M(h)$ con $h_j(x_j) = 1$ (cf. 1.3 i)). Consideremos una sucesión de seminormas p_j $(j \geqslant 1)$ que define la topología de A, pudiendo suponerse que $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots$ y definimos $y_j = (1 + p_j(x_j^2))^{-1}.x_j$, $j \geqslant 1$. Ciertamente $y_j \in M(h)$ y $h_j(y_j) > 0$ para todo $j \geqslant 1$; además la sucesión $(y_j)_{j\geq 1}$ es acotada en A ya que para cada $m \geqslant 1$ es $p_m(y_j) < 1$ si $m < j$. Poniendo $x = \sum_{j\geq 1} 2^{-j}.y_j$ (cf. [12] 7.7 b)) se obtiene la tesis.

LEMA 5.3. *Sea* A *un álgebra que verifica las condiciones* i), ii) *y* iv) *de* 4.5, *sea* $x \in A$ *tal que* $\hat{x}: X(A) \longrightarrow R$ *tiene un mínimo local en* $h_o \in X(A)$ (*esto es* $h_o(x) \leq h(x)$ *para todo* h *en un entorno* U *de* h_o). *Entonces* $x-h_o(x) \in M(h_o)^2$.

Demostración. Sea $a \in A_o$ tal que $\hat{a}|V = 1$ y $sop(a) \subset U$, donde V es un entorno de h_o tal que $\overline{V} \subset U$; como $a^2.(x-h_o(x)) \in A^+ \cap M(h_o)$ resulta $a^2.(x-h_o(x)) \in M(h_o)^2$. Luego por 1.4. resulta que

$$x-h_o(x) = a^2.(x-h_o(x)) + (1-a^2).(x-h_o(x)) \in M(h_o)^2 + P(h_o) \subset M(h_o)$$

como queríamos.

LEMA 5.4. *Sea* A *un álgebra localmente convexa sobre* R *que verifica la condición* iv) *de* 4.5. *Entonces para todo* $h \in X(A)$ *el ideal maximal* M(h) *es de tipo finito.*

Demostración. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Delta & \longrightarrow & A\hat{\otimes}A & \xrightarrow{\psi} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & M(h) & \longrightarrow & A & \xrightarrow[h]{} & R & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde p es inducido por el morfismo $A \otimes_R A \longrightarrow A$, deducido de $x \otimes y \longrightarrow h(x)\,y$; esto muestra que $p(\Delta) \subset M(h)$. Ahora si $z_1,\dots,z_r$ generan Δ (como ideal en $A \hat{\otimes} A$) y $x \in M(h)$, será $1 \otimes x - x \otimes 1 \in \Delta$, de donde $1 \otimes x - x \otimes 1 = \sum_{i=1}^{r} c_i.z_i$ para ciertos $c_i \in A \hat{\otimes} A$ $(1 \leq i \leq r)$. Entonces $x = p(1 \otimes x - x \otimes 1) = \sum_{i=1}^{r} p(c_i).p(z_i)$ muestra que los $u_i = p(z_i)$ $(1 \leq i \leq r)$ generan el ideal M(h) de A.

De manera general, si A es un álgebra de Fréchet m-convexa un A-módulo E se dirá un A-*módulo de Fréchet* si E está provisto de una topología que lo hace un espacio de Fréchet y la aplicación bilineal natural $A \times E \longrightarrow E$ resulta continua. Del mismo modo una A-*álgebra de Fréchet* será una A-álgebra B provista de una topología que la hace un álgebra de Fréchet m-convexa de forma tal que las aplicaciones naturales $A \times B \longrightarrow B$ resulten continuas. Claramente el morfismo $a \longrightarrow a.1$ de A en B es continuo; todo B-módulo de Fréchet resulta un A-módulo de Fréchet, etc.

Si A es un álgebra de Fréchet es claro que A^n $(n \geq 1)$ es un A-módulo de Fréchet; si E es un A-módulo de Fréchet libre de tipo finito entonces E es isomorfo (algebraica y topológicamente) a A^n $(n = \dim_A(E))$ ya que la biyección algebraica $A^n \longrightarrow E$ definida por cualquier base de E es continua, y por el teorema del gráfico cerrado es homeomorfismo. Lo mismo ocurre si E es proyectivo de tipo finito; hay una única topología en E para la cual E es un A-módulo de Fréchet; se define como cociente de cualquier epimorfismo $A^m \longrightarrow E$ y un argumento elemental muestra que esto es independiente de la "presentación" de E como cociente de un A-módulo libre. Nótese que un tal A-módulo E puede considerarse como núcleo de un proyector e: $A^m \longrightarrow A^m$ (automáticamente continuo) y por ende como un sumando directo (cerrado) de un A^m.

LEMA 5.5. *Sea* A *un álgebra de Fréchet* m-*convexa, sea* E *un* A-*módulo de Fréchet de tipo finito.*

a) *Si* F *es un* A-*módulo de Fréchet toda aplicación* A-*lineal* $u: E \longrightarrow F$ *es continua.*

b) *Si* E *es proyectivo, para todo ideal cerrado* $I \subset A$, $I.E$ *es cerrado en* E.

c) *Si* A *es a inversa continua* (*o* Q-*álgebra* [12]) E *no tiene submódulos propios densos.*

d) *Si* E *es proyectivo,* E *no tiene submódulos propios finitamente generados densos.*

Demostración. a) Sea $f: A^m \longrightarrow E$ un epimorfismo; f es automáticamente continuo, luego por el teorema del gráfico cerrado f es abierta así que E es un cociente de A^m.

b) P es sumando directo de A^m con A^m/P proyectivo, luego playo; entonces $I.P = I^m \cap P$ (cf. [2] Ch. I, §2, n°6).

c) Supongamos primero que $E = A^m$; la continuidad del determinante y el hecho que el conjunto de elementos inversibles de A es abierto implican que $\{(v_1,\ldots,v_m) \in A^m \times\ldots\times A^m : (v_1,\ldots,v_m)$ es una base de $A^m\}$ es abierto en $A^m \times\ldots\times A^m$. Por consiguiente todo submódulo denso debe contener una base de A^m, por lo tanto coincide con A^m. En el caso general hay un epimorfismo abierto $f: A^m \longrightarrow E$; si $M \subset E$ es submódulo denso resulta $f^{-1}(M)$ denso en A^m (ya que no hay hiperplanos cerrados que lo contengan), luego $f^{-1}(M) = A^m$ por lo anterior y entonces $M = E$.

d) Si $E = A$ esto es un hecho conocido ([0]); supongamos por inducción que la tesis es cierta para $E = A^r$. $(r < n)$ y sea M un submódulo denso de tipo finito de A^n. Si $\varphi(a_1,\ldots,a_n) = a_n$ claramente $\varphi(M)$ es denso de tipo finito en A, luego $\varphi(M) = A$, así que hay un $x_o \in M$ con $\varphi(x_o) = 1$. Sea $f: A^n \longrightarrow A^n, f(x) = x - \varphi(x).x_o$; como $f(x) = x \Leftrightarrow x \in A^{n-1}$ (identificado este último con un submódulo de A^n generado por $e_1,\ldots,e_{n-1}$) resulta $f(M) = M \cap A^{n-1}$ submódulo denso de tipo finito de A^{n-1} y por ende $f(M) = A^{n-1}$, así que $A^{n-1} \subset M$. Claramente $\{e_1,\ldots,e_{n-1},x_o\}$ es una base de A^n, luego $M = A^n$.

En el caso general hay una sucesión exacta $0 \longrightarrow N \longrightarrow A^n \longrightarrow E \longrightarrow 0$ que se escinde vía $u: E \longrightarrow A^n$ (luego N es de tipo finito); si $M \subset E$ es un submódulo denso generado por $v_1,\ldots,v_r$, el submódulo de A^n generado por N y $u(v_1),\ldots,u(v_r)$ es denso de tipo finito, luego coincide con A^n de donde $M = E$. El argumento es en realidad aplicable al caso en que E es de presentación finita, no necesariamente proyectivo.

LEMA 5.6. *Sea* A *un álgebra de Fréchet* m-*convexa, sea* I *un ideal cerrado de* A, $B = A/I$ *el álgebra cociente. Si* P *es un* A-*módulo proyectivo de tipo finito (provisto de su topología canónica) el producto tensorial algebraico* $B \otimes_A P$ *es completo para la topología proyectiva (esto es, coincide con* $B \hat{\otimes}_A P$) (cf. [6] I.1.3).

Demostración. De la sucesión exacta $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ se deduce la sucesión exacta $0 \longrightarrow I.P \longrightarrow P \longrightarrow B \otimes_A P \longrightarrow 0$.

De 5.5 b) sigue que la topología cociente hace de $B \otimes_A P$ un A-módulo de Fréchet, que indicaremos P'. Ciertamente P' es un B-módulo y como $B \times P'$ es cociente de $A \times P$ sigue fácilmente que la aplicación bilineal $B \times P' \longrightarrow P'$ es continua, luego P' es un B-módulo de Fréchet finitamente generado.

Por otro lado, de las propiedades de $\hat{\otimes}_A$ es claro que $B \hat{\otimes}_A P$ es un B-módulo de Fréchet proyectivo de tipo finito (pues $P \oplus S \approx A^m$ para convenientes S,m); como la aplicación $x \longrightarrow 1 \otimes x$ de P en $B \hat{\otimes}_A P$ es continua, también lo es la inclusión $B \otimes_A P \xrightarrow{i} B \hat{\otimes}_A P$ ($B \otimes_A P$ con la topología cociente). Como i tiene imagen densa de 5.5.d) resulta que i es biyectiva, luego un homeomorfismo por gráfico cerrado.

En lo que sigue de este §, A será un álgebra de Fréchet m-convexa sobre R que verifica las siguientes hipótesis:

1. $\Omega(A)$ es un A-módulo proyectivo de tipo finito.

2. Para cada $h \in X(A)$ el ideal maximal $M(h)$ es finitamente generado.

De 5.6 obtenemos una sucesión exacta de A-módulos de Fréchet

$$0 \longrightarrow M(h).\Omega(A) \longrightarrow \Omega(A) \xrightarrow{\pi} \Omega(A) \otimes_A R \longrightarrow 0 \qquad (6)$$

donde R se considera como A-módulo vía $\hat{h}: A \longrightarrow R$; como $\Omega(A)$ es de tipo finito es claro que $\Omega(A) \otimes_A R$ es un R-espacio vectorial de dimensión finita.

Si $\delta_h: A \longrightarrow M(h)/M(h)^2$ está definida por $\delta_h(x)$ = "clase mod $M(h)^2$ de $x-h(x)$" es inmediato que δ_h es una derivación continua (cf. 4.4 g)) así que $\delta_h = \varphi\, d_A$ para una única $\varphi: \Omega(A) \longrightarrow M(h)/M(h)^2$, A-lineal y continua. Obviamente $\varphi(M(h).\Omega(A)) = 0$, así que φ se factoriza como $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$ con $\bar{\varphi}: \Omega(A) \otimes_A R \longrightarrow M(h)/M(h)^2$ continua.

Por otra parte $d_A(M(h)^2) \subset M(h).\Omega(A)$ induce una aplicación R-lineal $\Delta_h: M(h)/M(h)^2 \longrightarrow \Omega(A) \otimes_A R$ con $\Delta_h\, \delta_h = \pi \circ d_A$.

Como $d_A(A)$ engendra un submódulo denso de $\Omega(A)$, se ve enseguida que δ_h y $\bar{\varphi}$ son isomorfismos recíprocos (cf. III. 1.3.).

Siempre bajo la hipótesis 1. y 2. tenemos otra construcción: si $D \in \mathrm{Der}\,(A)$ la aplicación R-lineal continua $h \circ D: M(h) \longrightarrow R$ se anula sobre $M(h)^2$ e induce $\overline{h \circ D}: M(h)/M(h)^2 \longrightarrow R$. Este proceso da $k_h: \mathrm{Der}\,(A) \longrightarrow (M(h)/M(h)^2)^*$ vía $k_h(D) = \overline{h \circ D}$ (aquí * indica el R-dual). Se tiene entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(\Omega(A),A)\otimes_A R \arrow[d, "\eta"] & \mathrm{Der}(A)\otimes R \arrow[l] & \\
 & & \mathrm{Der}(A) \arrow[ul, "\pi"'] \arrow[dl, "k_h"] \\
\mathrm{Hom}_R(\Omega(A)\otimes_A R,R) \arrow[r, "\Delta_h^*"'] & (M(h)/M(h)^2)^* &
\end{tikzcd} \qquad (7)$$

donde $\pi(D) = D\otimes 1$ y η es la aplicación natural definida por $\eta(F\otimes 1)(w\otimes 1) = h(\langle F,w\rangle)$. Como Δ_h es isomorfismo es claro que su traspuesta Δ_h^* también lo es; por otra parte siendo $\Omega(A)$ proyectivo de tipo finito, es un resultado clásico que η es un isomorfismo. De 5.5 a) sigue que $\mathrm{Hom}_A(\Omega(A),A) = \mathrm{CHom}_A(\Omega(A),A) = \mathrm{Der}(A)$, de manera que i también es isomorfismo.

Sigue de esto que k_h es epimorfismo y que la sucesión

$$0 \longrightarrow M(h).\mathrm{Der}(A) \longrightarrow \mathrm{Der}(A) \xrightarrow[k_h]{} (M(h)/M(h)^2)^* \longrightarrow 0 \qquad (8)$$

es exacta.

LEMA 5.7. *Con las hipótesis* 1. *y* 2. *sea* $h_o \in X(A)$ *y sea* (D_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *una familia de derivaciones de* A *tales que* $k_{h_o}(D_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *es una base de* $(M(h_o)/M(h_o)^2)^*$. *Existe entonces un entorno* U *de* h_o *en* $X(A)$ *tal que para cada* $h \in U$ *la familia* $k_h(D_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *es una base de* $(M(h)/M(h)^2)^*$. *Además si* $h \in U$ *y* $x \in M(h)$, *son equivalentes*

a) $x \in M(h)^2$.

b) $h \circ D_i(x) = 0$ *para* $1 \leqslant i \leqslant n$.

Demostración. Como Der(A) es proyectivo de tipo finito, hay un $a \notin M(h_o)$ tal que el módulo de fracciones $\mathrm{Der}(A)_a = \mathrm{Der}(A)\otimes_A A_a$ es un A_a-módulo libre de rango n, para un cierto n. Multiplicando, si es necesario, por un elemento inversible de A_a (de la forma a^r) podemos suponer que hay una base de $\mathrm{Der}(A)_a$ de la forma $T_j/1$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ con $T_j \in \mathrm{Der}(A)$. Sea la aplicación A-lineal $u: A^m \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$, $u(a_1,\ldots,a_m) = \sum_{i=1}^m a_i.T_i$ y sea N el núcleo de u, C el conúcleo de u. Por definición resulta que $N_a = 0$, $C_a = 0$; como C es de tipo finito hay un $r \geqslant 0$ tal que $a^r.C = 0$. Además para cada $v \in N$ hay un $q \geqslant 0$ ($q = q(v)$) tal que $a^q.v = 0$. Por consiguiente si $D \in \mathrm{Der}(A)$ existen elementos $a_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ tales que $a^r.D = \sum_{i=1}^m a_i.T_i$ y si $\sum_{i=1}^m c_i.T_i = 0$ entonces $(c_1,\ldots,c_m) \in N$ y por lo tanto hay un $q = q(c_1,\ldots,c_m)$ tal que $a^q.c_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Sea $U_o = \{h: h(a) \neq 0\}$ entorno abierto de h_o; entonces:

1) Si $h \in U_o$, $k_h(T_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ generan $(M(h)/M(h)^2)^*$; pues si $\psi \in (M(h)/M(h)^2)^*$ será $\psi = k_h(D)$ para una $D \in \mathrm{Der}(A)$ y por lo anterior hay elementos $a_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ tales que $a^r.D = \sum_{i=1}^m a_i.T_i$. Entonces $h(a^r).k_h(D) = \sum_{i=1}^m h(a_i).k_h(T_i)$ de donde

$$\psi = \sum_{i=1}^{m} \frac{h(a_i)}{h(a^r)} \cdot k_h(T_i)$$

2) Si $h \in U_o$, $k_h(T_i)$ $(1 \leq i \leq m)$ es linealmente independiente. Pues supongamos que $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, k_h(T_j) = 0$ $(\lambda_j \in R)$; resulta de (8) que $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j T_j \in M(h).\,Der(A)$ y por lo tanto $\sum_{k=1}^{m} \lambda_j\, T_j = \sum_{k=1}^{p} b_k.L_k$ con $b_k \in M(h)$ y $L_k \in Der(A)$ $(1 \leq k \leq p)$.

Pero para cada k hay elementos $a_{k_j} \in A$ $(1 \leq j \leq m)$ tales que $a^r.L_k = \sum_{j=1}^{m} a_{k_j}.T_j$. Sigue que $\sum_{j=1}^{m} (a^r.\lambda_j - \sum_{k=1}^{p} b_k.c_{k_j}).T_j = 0$ y entonces hay un $q \geq 0$ tal que $a^q(a^r.\lambda_j - \sum_{k=1}^{p} b_k.c_{k_j}) = 0$ $(1 \leq j \leq m)$. Como $h(a) \neq 0$ y $h(b_k) = 0$ para todo k, cbtenemos $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

De 1) y 2) y de la hipótesis resulta en particular que $n = m$ pues $\dim(M(h_o)/M(h_o)^2) = n$. Para cada D_i de la hipótesis hay elementos $a_{ij} \in A$ $(1 \leq i,j \leq n)$ tales que $a^r D_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,.T_j$ $(1 \leq i \leq n)$ y la matriz $(h_o(a_{ij})) \in R^{n\times n}$ es inversible ("matriz de cambio de base"); por continuidad hay un entorno U_1 de h_o tal que $(h(a_{ij}))$ es inversible para cada $h \in U_1$. Por consiguiente $U = U_o \cap U_1$ verifica las condiciones de la tesis. Para la última afirmación notemos que a) $\Rightarrow$ b) trivialmente; por otra parte si vale b) resulta que $k_h(D)$ (clase de x mod $M(h)^2$) = 0 para toda derivación D, de donde "clase de x mod $M(h)^2$" = 0 , o sea $x \in M(h)^2$.

OBSERVACION. La proposición precedente permite establecer la existencia del "fibrado tangente" sobre X(A), con fibra $(M(h)/M(h)^2)^*$ en cada $h \in X(A)$.

LEMA 5.10. *Sea* A *un álgebra de Fréchet fuertemente regular, sea* D *una derivación de* A, *sea* $U \subset X(A)$ *un abierto. Si* $a \in A$, $b \in A$ *verifican* $\hat{a}|U = \hat{b}|U$ *entonces será* $\widehat{D(a)}\;|U = \widehat{D(b)}\;|U$.

Demostración. Es suficiente considerar el caso $b = 0$; sea $h_o \in U$ y consideremos un entorno V de h_o con $\bar{V} \subset U$. Sea $x \in A$ con $\hat{x}|\bar{V} = 1$, $\hat{x}|X-U = 0$ (1.3.i)) así que $a.x = 0$. Luego para todo $h \in X(A)$ será $0 = h(x).\, h \circ D(a) + h(a).\, h \circ D(x)$, en particular $0 = h(x).\, h \circ D(a) = h \circ D(a)$ para todo $h \in \bar{V}$. Luego $\widehat{D(a)}|\bar{V} = 0$; como h_o es cualquiera en U, resulta que $\widehat{D(a)}$ se anula sobre U.

Siempre bajo hipótesis 1. y 2. anteriores, pongamos para cada $h \in X(A)$: $\rho(h) = \dim_R(M(h)/M(h)^2)$; ciertamente $\rho(h) < \infty$ para todo $h \in X(A)$.

LEMA 5.8. *Supongamos que* A *es fuertemente regular y que verifica las* *condiciones* 1. *y* 2.; *si* $h_o \in X(A)$ *son equivalentes:*

a) $M(h_o) = M(h_o)^2$ *(o sea* $\rho(h_o) = 0$).

b) $M(h_o) = P(h_o)$.

c) $M(h_o)$ *es generado por un idempotente.*

d) $\{h_o\}$ *es abierto y cerrado en* $X(A)$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b). Resulta $m(h_o) = m(h_o)^2$ en el anillo local A_{h_o}, luego $m(h_o) = 0$ por el lema de Nakayama y se aplica 1.4.

b) $\Rightarrow$ a). Trivial.

b) $\Rightarrow$ c). Como $A_{h_o} = A/P(h_o)$, sale $M(h_o)_{h_o} = 0$ y por ser $M(h_o)$ de tipo finito, hay un $c \in P(h_o)$ tal que $(1-c).M(h_o) = 0$. Como $c \in M(h_o)$ se obtiene $c^2 = c$ y $c.x = x$ para todo $x \in M(h_o)$. Sigue que $M(h_o) = A.c$.

c) $\Rightarrow$ a) Evidente. c) $\Rightarrow$ d). Resulta $\{h_o\}$ abierto en $J(A)$, a fortiori en $X(A)$.

d) $\Rightarrow$ c). Como A es fuertemente regular hay un $c \in A$ tal que $\hat{c}(h_o) = 0$, $\hat{c}(h) = 1$ para todo $h \neq h_o$ (por 1.3.i) claramente c es un idempotente, $c \in M(h_o)$ y $c.x = x$ para todo $x \in M(h_o)$ (pues $\mathrm{Rad}(A) = 0$).

COROLARIO 5.9. *Bajo las hipótesis de 5.8 la aplicación* ρ *es localmente constante.*

6. En todo lo que sigue, A será un álgebra que verifica las condiciones i) a vii) de 4.5.; veremos que es posible dotar a $X(A)$ de una estructura de variedad diferenciable, para lo cual precisamos construir primero "coordenadas locales". Empezamos la construcción con la

PROPOSICION 6.1. *Sea* $h_o \in X(A)$ *con* $\rho(h_o) = n > 0$. *Existen entonces un entorno abierto* U_o *de* h_o, *elementos* $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m$ *en* $M(h_o)$ *y derivaciones* D_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *tales que:*

a) *La subálgebra* $[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m]$ *es densa en* A.

b) *Para todo* $h \in X(A)$, $M(h)$ *es generado por* $x_1-h(x_1),\ldots,x_n-h(x_n)$, $y_1-h(y_1),\ldots,y_m-h(y_m)$.

c) $hD_i(x_j) = \delta_{ij}$ *para todo* i,j *y todo* $h \in U_o$.

d) *Las clases* mod $M(h)^2$ *de los* $x_i-h(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *forman una base de* $M(h)/M(h)^2$ *para cada* $h \in U_o$.

e) *Para cada* $h \in U_o$, $M(h)$ *es generado por* $P(h)$ *y los* $x_i-h(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

f) *Si* $h \in U_o$ *y* $h(x_i) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *entonces* $h = h_o$.

g) *Para todo* $x \in A$ *y para todo,* i,j, $1 \leqslant i,j \leqslant n$ *se tiene*

$\widehat{D_iD_j(x)} \mid U_o = \widehat{D_jD_i(x)} \mid U_o$.

h) *Existe un* $a \in 1 + P(h_o)$ *tal que*

1) $aD_i(x_k) = a.\delta_{ik}$ *para todo* i,k.

2) *Para todo* $w \in \Omega(A)$, $a.w = \sum_{i=1}^{n} \langle D_i, w \rangle\, dx_i$ *(en particular* $a.dx = a \,.\, \sum_{i=1}^{n} D_i(x)\, dx_i$ *si* $x \in A$).

Demostración. Por la hipótesis V), hay una familia finita u_i $(1 \leq i \leq r)$ de elementos de A tal que $[u_1,\ldots,u_r]$ es denso en A; luego (ver 5.1) resulta que para cada $h \in X(A)$ la subálgebra $[u_1-h(u_1),\ldots,u_r-h(u_r)]_o$ es densa en $M(h)$. Claramente las imágenes de los $u_i - h_o(u_i)$ $(1 \leq i \leq r)$ son densas en $M(h_o)/M(h_o)^2$ (observár que $M(h)^2$ es cerrado para todo $h \in X(A)$ por 5.4. y 4.4g)) pero como éste es un espacio de dimensión finita separado resulta que estas imágenes generan $M(h_o)/M(h_o)^2$. Por un eventual reordenamiento, podemos suponer que las imágenes de $u_1 - h_o(u_1),\ldots,u_n - h_o(u_n)$ forman una base de $M(h_o)/M(h_o)^2$. Ponemos $x_i = u_i - h_o(u_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ e indicamos con $y_1,\ldots,y_m$ los restantes $u_i - h_o(u_i)$ (si r=n podemos suponer $y_1 = \ldots = y_m = 0$). La afirmación a) es entonces evidente.

Por (8) hay derivaciones F_i $(1 \leq i \leq n)$ de A tales que $h_o F_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(1 \leq i,j \leq n)$; hay un entorno W de h_o tal que la matriz $(hF_i(x_j))_{i,j} \in R^{n\times n}$ es inversible para todo $h \in W$, así que si $a = \det(F_i(x_j))$ se tendrá $h(a) \neq 0$ para todo $h \in W$, luego hay un $b \in A$ con $ab \in 1 + P(h_o)$. Si (c_{ij}) indica la matriz adjunta de $(F_i(x_j))$ se tendrá $(c_{ij}).(F_i(x_j)) = a.(\delta_{ik})$; ponemos $a_{ij} = a.c_{ij}$ $(1 \leq i,j \leq n)$ y entonces es $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, F_j(x_k) = \delta_{ik} + p_{ik}$ $(p_{ik} \in P(h_o)$, $1 \leq i,k \leq n)$.

Definimos $D_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, F_j$ $(1 \leq i \leq n)$; si V_o es un entorno abierto de h_o tal que $V_o \subset W$ y $\hat{p}_{ik} \mid V_o = 0$ para todo i,k, se obtiene que c) es válido para todo $h \in V_o$ (el entorno U_o se construirá de modo que $U_o \subset V_o$).

Ahora $k_{h_o}(D_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ es una base de $(M(h_o)/M(h_o)^2)^*$, luego hay un entorno $V_1 \subset V_o$ tal que $h_k(D_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ es base de $(M(h)/M(h)^2)^*$ para todo $h \in V_1$ (ver 5.7). Como $\rho(V_1) = n$, para obtener d) bastará ver que para cada $h \in V_1$ es

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - h(x_i)) \in M(h)^2 \quad , \quad \lambda_i \in R \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Pero esto es evidente ya que $hD_j\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - h(x_i))\right) = \lambda_j \in hD_j(M(h)^2)) = 0$ para cada $j \leq n$, por c).

Para e) consideramos el anillo local A_h $(h \in V_1)$; las clases de los

$x_i - h(x_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ generan $M(h)/M(h)^2 \approx m(h)/m(h)^2$ y entonces por Nakayama las clases de los $x_i - h(x_i)$ generan $m(h)$ en $A_h = A/P(h)$. De aquí e) es trivial.

Para probar f) consideramos un entorno V de h_o de clausura compacta en V_1; como A es separable (por a)) y como $\overline{V}$ es equicontinuo débilmente cerrado en A* (por ser A de Fréchet) resulta $\overline{V}$ compacto metrizable ([3], ch.IV, § 2). En particular es legítimo el uso de sucesiones en V. Sea $F = \{h \in V: h(x_1) = \ldots = h(x_n) = 0\}$, cerrado en V con $h_o \in F$; se afirma que h_o no es punto de acumulación de F. De lo contrario existiría una sucesión de puntos distintos h_j $(j \geq 1)$ en F con $h_j \longrightarrow h_o$ y $h_j \neq h_o$ para todo $j \geq 1$. Sea $x \in M(h_o)$ tal que $h_j(x) > 0$ para todo $j \geq 1$ (ver 5.2); por e) será $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$ $(a_i \in A,\ b \in P(h_o))$. Claramente $h_j(b) = 0$ a partir de un cierto j_o de donde

$0 < h_j(x) = \sum_{i=1}^{n} h_j(a_i) h_j(x_i) = 0$ si $j > j_o$, lo que es absurdo.

Resulta de esto que hay un entorno abierto U_o de h_o en V (luego U_o es abierto en X(A)) tal que $U_o \cap F = \{h_o\}$, lo que prueba f).

Resta probar b). Para cada $h \in X(A)$ sea I(h) el ideal generado por los $x_i - h(x_i), y_j - h(y_j)$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$; claramente $I(h) \subset M(h)$. Por la construcción de los x_i, y_j y por la parte e) se deduce que I(h) y P(h) generan M(h) para todo $h \in X(A)$; bastará ver entonces que $P(h) \subset I(h)$ para cada $h \in X(A)$, o lo que es igual que la cápsula de I(h) es $\{h\}$ (cf.1.4). Pero como $[x_1 - h(x_1), \ldots, y_m - h(y_m)]_o \subset I(h)$, resulta de 5.1 que I(h) es denso en M(h), luego $I(h) \subset M(h') \Rightarrow h = h'$, dando lo afirmado.

Veamos g): ante todo es claro por d) que si $h \in U_o$ entonces las clases mod $M(h)^3$ de los $(x_i - h(x_i)).(x_j - h(x_j))$ $(1 \leq i \leq j \leq n)$ generan el R-espacio vectorial $M(h)^2/M(h)^3$. Veamos que son linealmente independientes: sea

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}(x_i - h(x_i)).(x_j - h(x_j)) \in M(h)^3 \text{ con } \lambda_{ij} = \lambda_{ji} \in R$$

Notemos que por c) será $D_k(x_i) = \delta_{ik} + a_{ik}$, con $\hat{a}_{ik}|U_o = 0$ $(1 \leq i,k \leq n)$; por lo tanto, como $h \in U_o$, será $a_{ik} \in P(h)$ y por consiguiente tendremos $a_{ik} \in M(h)^r$ para todo $r \geq 1$; en particular $a_{ik} \in M(h)^3$ (cf. 1.4.). Aplicando D_k $(1 \leq k \leq n)$ obtenemos (por ser $D_k(M(h)^{r+1}) \subset M(h)^r$ si $r \geq 1$)

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij}(D_k(x_i)(x_j - h(x_j)) + (x_i - h(x_i)).D_k(x_j)) \in M(h)^2.$$

Como $D_k(x_i) - \delta_{ik} \in M(h)^3$ queda, para $1 \leq i \leq n$,

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij}(\delta_{ik}(x_j - h(x_j)) + \delta_{kj}(x_i - h(x_i)) \in M(h)^2$$

o sea

$$\sum_j \lambda_{kj}(x_j-h(x_j)) + \sum_i \lambda_{ik}(x_i - h(x_i)) = 2 \sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj}(x_j-h(x_j)) \in M(h)^2 \quad \text{y}$$

por tanto $\lambda_{kj} = 0$ para todo k,j por d). Luego las clases de los $(x_i-h(x_i))\,(x_j-h(x_j))$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$ forman una base de $M(h)^2/M(h)^3$.

Ahora para cada $x \in A$, $x-h(x) - \sum_{i=1}^{n} hD_i(x)(x_i-h(x_i)) \in M(h)^2$; su clase mod $M(h)^3$ será entonces expresable en forma única en términos de estos elementos. O sea, existen únicos $\lambda_{ij} \in R$, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ tales que

$$x-h(x) - \sum_{i=1}^{n} hD_i(x_i)(x_i-h(x_i)) - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij}(x_i-h(x_i)).(x_j-h(x_j)) \in M(h)^3.$$

Aplicando hD_kD_ℓ $(1 \leqslant k,\ell \leqslant n)$ y recordando que $D_k(x_i) - \delta_{ik} \in M(h)^2$, se obtiene $hD_kD_\ell(x) = \lambda_{k\ell}$. Por lo tanto $hD_kD_\ell(x) = hD_\ell D_k(x)$, y como h es un elemento cualquiera de U_o se obtiene lo afirmado.

Finalmente veamos h). Consideramos las aplicaciones A-lineales $f: A^n \longrightarrow \Omega(A)$ $\quad g: \Omega(A) \longrightarrow A^n$ dadas por $f(a_1,\dots,a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i$, $g(w) = (\langle D_i,w\rangle)_{i\leq n}$; pasando al anillo local $A_{h_o} \approx A/P(h_o)$ obtenemos $f_o: A^n_{h_o} \longrightarrow \Omega(A) \otimes_A A_{h_o}$, $g_o: \Omega(A) \otimes_A A_{h_o} \longrightarrow A^n_{h_o}$, y afirmamos que f_o y g_o son isomorfismos recíprocos. Como se trata de aplicaciones entre A_{h_o} - módulos libres, es suficiente ver que reduciendo todo mod $m(h_o)$ se obtiene $g_of_o = id$ ([2], ch. II, §3, n°2); como $A_{h_o}/m(h_o) \approx A/M(h_o) \approx R$, esto equivale a decir que

$$R^n \approx A^n \otimes_A R \xrightarrow{\ f\ } \Omega(A) \otimes_A R \xrightarrow{\ g\ } A^n \otimes_A R \approx R^n$$

son isomorfismos recíprocos (R considerado como A-módulo vía $h_o: A \longrightarrow R$). Pero esto es inmediato por (7), ya que el isomorfismo $\Delta\, h_o: M(h_o)/M(h_o)^2 \longrightarrow \Omega(A) \otimes_A R$ de §5 manda la base de los x_i mod $M(h_o)^2$ en los correspondientes $dx_i \otimes 1$, y por otra parte los h_oD_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ forman la correspondiente base dual. Siendo f_o y g_o isomorfismos recíprocos, resulta que hay un $a \in 1 + P(h_o)$ tal que $a.fg = a.1_{\Omega(A)}$, $a.gf = a.1_{A^n}$ ([2], ch. II, §2, prop. 19) y esto da la tesis.

OBSERVACION. Si $h \in U_o$ y $x \in M(h)$, son equivalentes:

a) $x \in M(h)^2$.

b) $D_i(x) \in M(h)$ para todo $i \leqslant n$ (cf. 5.7.).

NOTACION 6.2. Indicaremos con U un entorno abierto de h_o con $\overline{U}$ compacto y $\overline{U} \subset U_o$.

Nos ubicaremos en lo que sigue en la situación de 6.1.

Se tiene una aplicación continua

$$\theta: X(A) \longrightarrow R^n \ , \quad \theta(h) = (h(x_1),\ldots,h(x_n)).$$

La idea es que $\theta|U$ defina un mapa en h_o; pero en general esto no será posible ya que $\theta|U$ no es en principio inyectiva (de cualquier modo es claro por 6.1. f) que $(\theta|U)^{-1}(0)$ se reduce a $\{h_o\}$).

Consideremos en R^n la norma $\|v\| = (\sum_{i=1}^{n} v_i^2)^{1/2}$ y los conjuntos

$$F_\varepsilon = \{h \in X(A): \|\theta(h)\| \leqslant \varepsilon\} \ , U_\varepsilon = \{h \in X(A): \|\theta(h)\| < \varepsilon\}$$

para cada $\varepsilon > 0$. Claramente U_ε es entorno abierto de h_o y $U_\varepsilon \subset F_\varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$.

LEMA 6.3. *Con las notaciones anteriores se tiene*

a) *Si* $0 < \varepsilon < \delta$, *entonces* $F_\varepsilon \cap \overline{U} \subset \overline{U_\delta \cap U} \subset F_\varepsilon \cap \overline{U}$.

b) *La familia* $\{F_\varepsilon \cap \overline{U}: \varepsilon > 0\}$ *es una base de entornos de* h_o.

c) *La familia* $\{U_\varepsilon \cap U: \varepsilon > 0\}$ *es una base de entornos de* h_o.

Demostración. a) Si $h \in F_\varepsilon \cap \overline{U}$ será $\|\theta(h)\| \leqslant \varepsilon$ y $h = \lim_{k\to\infty} h_k$ con $h_k \in U$; por lo tanto hay un k_o tal que $\|\theta(h_k)\| < \delta$ si $k > k_o$, luego $h_k \in U_\delta \cap U$ si $k > k_o$ y por ende $h \in \overline{U_\delta \cap U}$. La otra inclusión es trivial.

b) Siendo $\bigcap_{\varepsilon>0} F_\varepsilon \cap \overline{U} = \{h_o\}$ por 6.1 f) resulta que h_o es el único punto adherente a la base de filtro $(F_\varepsilon \cap \overline{U})_{\varepsilon>0}$ en el espacio compacto $\overline{U}$. Por lo tanto esta base de filtro converge a h_o en $\overline{U}$. Si W es cualquier entorno de h_o en $X(A)$ $W \cap \overline{U}$ es entorno de h_o en $\overline{U}$, luego para un $\varepsilon > 0$ será $F_\varepsilon \cap \overline{U} \subset W \cap \overline{U} \subset W$.

c) Evidente por lo anterior.

Indicaremos con la notación $E_\varepsilon(0)$ al abierto $\{v \in R^n: \|v\| < \varepsilon\} \subset R^n$, $\varepsilon > 0$.

LEMA 6.4. *Existe un* $\varepsilon_o > 0$ *tal que* $\theta(U_\varepsilon \cap U) \supset E_{\varepsilon/2}(0)$ *para todo* $\varepsilon < \varepsilon_o$.

Demostración. Sea V un entorno abierto de h_o tal que $V \subset \overline{V} \subset U$, $\overline{V}$ compacto, y sea $\varepsilon_o > 0$ tal que $F_{\varepsilon_o} \cap \overline{U} \subset V$. Supongamos entonces que $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$ y sea $v = (v_1,\ldots,v_n)$ tal que $\|v\| < \varepsilon$; definamos $x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - v_i)^2$; por compacidad hay un $h_1 \in F_\varepsilon \cap \overline{U}$ tal que $\alpha = h_1(x) = \inf\{h(x): h \in F_\varepsilon \cap \overline{U}\}$.

Notar que $x \geqslant 0$, así que $\alpha \geqslant 0$. Afirmamos que $h_1 \in U_\varepsilon$; como $h_1 \in F_\varepsilon$ bastará ver que $\|\theta(h_1)\| < \varepsilon$. Supongamos $\|\theta(h_1)\| = \varepsilon$; entonces

$$2 \sum_{i=1}^{n} h_1(x_i).v_i \leqslant 2(\sum_{i=1}^{n} h_1(x_i)^2)^{1/2}.(\sum_{i=1}^{n} v_i^2)^{1/2} < 2.\varepsilon.\varepsilon/2 = \varepsilon^2,$$

de donde

$\|v\|^2 = h_o(x) \geqslant h_1(x) = \|\theta(h_1)\|^2 + \|v\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} h_1(x_i)v_i = \varepsilon^2 + \|v\|^2 -$ $- 2 \sum_{i=1}^{n} h_1(x_i)v_i > \|v\|^2$ lo que es absurdo. Luego $h_1 \in U_\varepsilon \cap \overline{U} \subset F_\varepsilon \cap \overline{U} \subset$ $\subset V$; pero $U_\varepsilon \cap \overline{U} \subset F_\varepsilon \cap \overline{U} \subset V$ da $U_\varepsilon \cap \overline{U} \subset U_\varepsilon \cap V \subset U_\varepsilon \cap \overline{U}$ luego $U_\varepsilon \cap \overline{U} = U_\varepsilon \cap V$. En conclusión $h_1 \in U_\varepsilon \cap V$ (que *es abierto*) y $h_1(x) \leqslant$ $\leqslant h(x)$ para todo $h \in F_\varepsilon \cap \overline{U}$ implica $h_1(x) \leqslant h(x)$ para todo $h \in U_\varepsilon \cap V$, pues $U_\varepsilon \cap V \subset F_\varepsilon \cap \overline{U}$. En conclusión, $\hat{x}$ tiene un mínimo local en h_1 y por lo tanto $x - \alpha \in M(h_1)^2$ por 5.3., luego $h_1D_i(x) = h_1D_i(x-\alpha) = 0$ para todo $i \leqslant n$. Pero evidentemente es $h_1D_i(x) = 2(h_1(x_i)-v_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ luego $h_1(x) = v$, y concluímos.

NOTACION. Para cada $p = (p_1,\ldots,p_n)$ (los p_i enteros no negativos) ponemos $|p| = \sum_1^p p_i$; $\partial^p/\partial t^p$ será el operador

$$f \longrightarrow \partial^{|p|} f/\partial t_1^{p_1} \ldots \partial t_n^{p_n}$$

actuando sobre $C^\infty(R^n)$. Asimismo para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ (los α_i enteros, $1 \leqslant \alpha_i \leqslant n$) definimos $D^{(\alpha)}: A \longrightarrow A$ por $D^{(\alpha)}(x) =$ $D_{\alpha_1},\ldots,D_{\alpha_r}(x)$ (los D_k dados por 6.1). Nótese que es esencial el orden de la r-upla $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ ya que en general no disponemos de la identidad $D_iD_j = D_jD_i$ si $i \neq j$; no obstante:

LEMA 6.5. *Supongamos que* $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ *y* $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_r)$ *difieren en una permutación. Entonces para todo* $x \in A$ *se tiene*

$$\widehat{D^{(\alpha)}(x)} \mid U = \widehat{D^{(\beta)}(x)} \mid U$$

(*donde* U *es el entorno abierto fijado en* 6.2.)

Demostración. Inmediata a partir de 6.1. g).

En particular es posible definir para cada $p = (p_1,\ldots,p_n)$ el operador $D^p: A \longrightarrow C(U)$ como *cualquiera* de los $D^{(\alpha)}$ que verifican $p_k = \text{card}\,\{i: \alpha_i = k$ para $1 \leqslant k \leqslant n\}$; si $h \in U$ se obtiene entonces una "derivación puntual asociada al carácter h, de orden $|p|$ " definida sin ambigüedad por $hD^p: A \longrightarrow R$, automáticamente continua.

Indicaremos ahora con $\Pi_n(v)$, para $v = (v_1,\ldots,v_n) \in R^n$, el ideal maximal $\{f;\ f(v) = 0\}$ de $C^\infty(R^n)$; $\Pi_n(v)$ está generado por $t_1-v_1,\ldots,t_n-v_n$ y para cada $r \geqslant 1$ $\Pi_n(v)^r$ consiste de las $f \in C^\infty(R^n)$ que verifican

$\partial^p f / \partial t^p(v) = 0$ para todo p con $|p| < r$. Asimismo con $\mathcal{E}_n$ indicamos el álgebra local de gérmenes de aplicaciones de clase C^∞ en 0; $\mathcal{E}_n$ no es otra cosa que el cociente de $C^\infty(R^n)$ por el ideal

$P = \{f \in C^\infty(R^n)$; $f \mid W = 0$ para algún entorno W de $0\}$.

El ideal maximal de $\mathcal{E}_n$ es $M_n = \Pi_n(0)/P$ y F_n será el álgebra de series formales en n indeterminadas.

Es clásico que F_n se identifica al completado (separado) de $\mathcal{E}_n$ para la topología M_n-ádica, que $F_n \approx \mathcal{E}_n/M_n^\infty$ $\quad (M^\infty = \bigcap_{r \geq 1} M^r)$ $\quad$ ([11]).

Consideramos ahora el cálculo operacional C^∞, $T: C^\infty(R^n) \longrightarrow A$, único morfismo que verifica $T(t_i) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; en general $f(x_1,\ldots,x_n)$ denotará el elemento $T(f) \in A$ para $f \in C^\infty(R^n)$. Si $h \in X(A)$ se tiene $(f(x_1,\ldots,x_n)) = f(h(x_1),\ldots,h(x_n))$.

PROPOSICION 6.6. *Con las notaciones anteriores, se tiene:*

a) *Si* $f \in C^\infty(R^n)$ *entonces* $f \in P \Leftrightarrow T(f) \in P(h_o)$.

b) *Si* $f \in C^\infty(R^n)$ *y* $h \in U$, *para todo* $i \leqslant n$ *es*

$$hD_i(T(f)) = hT\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}\right) \quad \left(= \frac{\partial f}{\partial t_i}(h(x_1),\ldots,h(x_n))\right).$$

c) *Si* $f \in C^\infty(R^n)$, $h \in U$ *y* $p = (p_1,\ldots,p_n)$, *es*

$$hD^p(T(f)) = h\left(T\,\frac{\partial^p f}{\partial t^p}\right) \quad \left(= \frac{\partial^p f}{\partial t^p}(h(x_1),\ldots,h(x_n))\right).$$

Demostración. a) Una afirmación es evidente (si $f|W = 0$, la continuidad de θ: $X(A) \longrightarrow R^n$ da $\widehat{T(f)} \mid W' = 0$ donde $W' = \theta^{-1}(W)$). Recíprocamente supongamos que es $T(f) \in P(h_o)$, luego $\widehat{T(f)}|U_\varepsilon \cap U = 0$ para un cierto $\varepsilon > 0$ (6.3. c)). Si ε_o es como en 6.4, podemos suponer $\varepsilon < \varepsilon_o$ así que $f(h(x_1),\ldots,h(x_n)) = 0$ para todo $h \in U_\varepsilon \cap U$ de donde $f\theta\,(U_\varepsilon \cap U) = 0$ y entonces por 6.4. obtenemos $f \mid E_{\varepsilon/2}(0) = 0 \Rightarrow f \in P$.

b) Ambos miembros definen derivaciones continuas $C^\infty(R^n) \longrightarrow R$; como los polinomios en $t_1,\ldots,t_n$ son densos en $C^\infty(R^n)$ basta verificar la igualdad cuando $f = t_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Pero esto es inmediato por 6.1 .

c) Evidente por b) e inducción.

COROLARIO 6.7. *Si* $f \in C^\infty(R^n)$ *y* $h \in U$, *son equivalentes para cada* $r \geqslant 1$:

a) $f \in \Pi_n(\theta(h))^r$.

b) $T(f) \in M(h)^r$.

En particular $f \in \Pi_n(\theta(h))^\infty \Longleftrightarrow f \in M(h)^\infty = \bigcap_{r \geq 1} M(h)^r$.

Demostración. Como claramente $T(\Pi_n(\theta(h))) \subset M(h)$ es inmediato que a) $\Rightarrow$ b). Por otra parte, siendo $h(T(f)) = f\,\theta(h)$ es claro que b) $\Rightarrow$ a) si $r \geq 1$; supongamos que $T(f) \in M(h)^{r+1}$ $(r \geq 1)$ y sea $p = (p_1,\dots,p_n)$ con $|p| \leq r$. Siendo $hD^p(T(f)) = 0$ resulta por 6.6 c) que $\frac{\partial^p f}{\partial t^p}(\theta(h)) = 0$; como esto vale para todo p con $|p| \leq r$ sigue entonces $f \in \Pi_n(\theta(h))^{r+1}$.

Para cada $h \in X(A)$ hay un morfismo τ_h: $R[t_1,\dots,t_n] \longrightarrow A$ definido por $\tau_h(t_i) = x_i - h(x_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ (notar que τ_{h_o} no es otra cosa que la restricción de T al álgebra de polinomios); de 6.7. sigue que τ_h es compatible con las filtraciones:

i) la definida por los $\Pi_n(0)^r$ $(r \geq 0)$ e

ii) la definida por los $M(h)^r$ $(r \geq 0)$

y por lo tanto induce un morfismo de álgebras graduadas

$$\overline{\tau}_h\colon R[t_1,\dots,t_n] \to gr_{M(h)}(A) = \bigoplus_{r\geq 0} M(h)^r/M(h)^{r+1}. \qquad (9)$$

PROPOSICION 6.8. *Para todo* $h \in U$, *el morfismo* $\overline{\tau}_h$ *es un isomorfismo de álgebras graduadas. En particular, las clases* mod $M(h)^{r+1}$ *de los elementos* $(x_1-h(x_1))^{p_1}\dots(x_n-h(x_n))^{p_n}$ *con* $|p| = r$ *forman una base de* $M(h)^r/M(h)^{r+1}$.

Demostración. Si $h \in U$, los elementos $x_i - h(x_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ definen una base de $M(h)/M(h)^2$, de modo que $gr_1(\overline{\tau}_h)$ es un isomorfismo. Por lo tanto $\overline{\tau}_h$ es un epimorfismo. Supongamos que f es un polinomio homogéneo de grado $r \geq 1$

$$f = \sum_{|p|=r} c_p\, t_1^{p_1} \dots t_n^{p_n}$$

tal que $\overline{\tau}_h(f) = 0$.

Esto significa que $\sum_{|p|=r} c_p (x_1-h(x_1))^{p_1} \dots (x_n-h(x_n))^{p_n} \in M(h)^{r+1}$;

entonces por 6.7 a) resulta que el polinomio

$$g = \sum_{|p|=r} c_p (t_1-h(x_1))^{p_1} \dots (t_n-h(x_n))^{p_n}$$

tiene todas sus derivadas de orden $\leq r+1$ nulas en el punto $(h(x_1),\dots,h(x_n))$. Como el grado total de g es $\leq r$, deberá ser $g=0$; como $g(t_1,\dots,t_n) = f(t_1-h(x_1),\dots,t_n-h(x_n))$, sigue que $f=0$. Esto prueba que $gr_r(\overline{\tau}_h)$ es inyectiva para todo $r \geq 1$ y concluímos.

COROLARIO 6.9. *Si* $h \in U$ *y* $x \in A$, *existen únicos* $c_p \in R$ $(p=(p_1,\dots,p_n))$ *tales que*

$$x - \sum_{|p|\leq r} c_p (x_1-h(x_1))^{p_1} \dots (x_n-h(x_n))^{p_n} \in M(h)^{r+1}.$$

OBSERVACION 6.10. Es fácil ver que los coeficientes c_p no son sino

$p!\,c_p = hD^p(x) \quad (p \geqslant 0)$.

Para ello basta aplicar sucesivamente los hD^p con $|p| = 0,1,\dots,r$ y usar 6.6 c) aplicado a:

$$f(t_1,\dots,t_n) = \sum_{|p|\leq r} c_p(t_1-h(x_1))^{p_1}\dots(t_n-h(x_n))^{p_n} \quad (p!=p_1!\dots p_n!).$$

Consideremos ahora el diagrama (10) de álgebras y morfismos, en el cual las flechas sin nombre son las evidentes y $\widehat{A/P}(h_o)$ indica el completado separado de $A/P(h_o)$ para la topología $\widehat{M(h_o)}/P(h_o)$-ádica (o sea la $m(h_o)$-ádica). Claramente $\widehat{A/P}(h_o) = \lim\limits_{\leftarrow} A/M(h_o)^r$, de donde resulta el morfismo α:

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(R^n) \arrow[r, "T"] \arrow[d] & A \arrow[d] \arrow[dddr] & \\
\mathcal{E}_n \arrow[r, "T_o"] \arrow[dd] & A/P(h_o) \arrow[d] \arrow[ddr, "\pi"] & \\
 & \widehat{A/P}(h_o) & \\
\mathcal{F}_n \arrow[ur, "\hat{T}_o"] \arrow[rr, "u"] & & A/M(h_o)^\infty \arrow[ul, "\alpha"]
\end{tikzcd} \tag{10}$$

De 6.6 a) se deduce la existencia de T_o, siendo evidente que "T_o (germen de t_i en 0) = clase mod $P(h_o)$ de x_i" $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Como $\hat{\mathcal{E}}_n = \mathcal{F}_n$, por continuidad obtenemos $\hat{T}_o$. Por otro lado $\pi T_o\colon \mathcal{E}_n \longrightarrow A/M(h_o)^\infty$ tiene núcleo M^∞ por 6.7., de donde resulta un morfismo inyectivo $u\colon \mathcal{F}_n \longrightarrow A/M(h_o)^\infty$.

PROPOSICION 6.11. *Con las notaciones anteriores, los morfismos* $\hat{T}_o, \alpha, u$ *son isomorfismos.*

Demostración. Notemos que α es trivialmente inyectivo; por otro lado, como $m(h_o) = \mathrm{Rad}\,(A/P(h_o))$ es generado por las clases de los x_i, $\hat{T}_o$ resulta suryectivo. Como $\alpha u = \hat{T}_o$, sigue que α es suryectivo, luego isomorfismo; ahora u inyectivo y $\hat{T}_o$ suryectivo dan la tesis.

7. Pasamos ahora a las consideraciones locales propiamente dichas; con la notación de 6.1., sea V un entorno abierto de h_o, $\overline{V} \subset U$, $\overline{V}$ compacto y tal que $h(a) = 1$ para todo $h \in \overline{V}$ (6.1 h)). Consideremos el ideal $I = \{x \in A\colon \hat{x}|\overline{V} = 0\} = \bigcap_{h\in\overline{V}} M(h)$, sea B el álgebra A/I; claramente $X(B)$ se identifica a $\overline{V}$ y por lo tanto B es una Q-álgebra ([12], 13.6). Para aligerar notación indicaremos con $\bar{x}$ la imagen de cada $x \in A$ en B.

LEMA 7.1. i) *Si* $x \in I$ *y* $D \in \mathrm{Der}(A)$ *entonces* $D(x) \in I$.

ii) *Si* $x \in A$, $D_iD_j(x) - D_jD_i(x) \in I$ *para todo* i,j.

iii) *Si* $h \in \overline{V}$, $I \subset M(h)^r$ *para todo* $r \geqslant 1$.

Demostración. i) Si $x \in I$ entonces $\hat{x}|\overline{V} = 0$ luego $\hat{x}|V = 0$ y por 5.10 resulta $\widehat{D(x)}|V = 0$. Por continuidad se obtiene $\widehat{D(x)}|\overline{V} = 0$, luego $D(x) \in I$.

ii) Evidente por 6.1 g).

iii) En virtud de 6.9. bastará probar que si $x \in I$ entonces para todo multi-índice p se tiene $hD^p(x) = 0$ para cada $h \in \overline{V}$. Por continuidad es suficiente probar esto cuando $h \in V$. Pero en tal caso $x \in P(h)$ y basta apelar a 1.4 b).

Sigue de este resultado que se puede definir una aplicación A-lineal $D \longrightarrow \overline{D}$ de Der(A) en Der(B) vía $\overline{D}(\overline{a}) = \overline{D(a)}$. En particular será $\overline{D_i}(\overline{x}_k) = \delta_{ik}$ $(1 \leq i,k \leq n)$ por 6.1 h). Asimismo se deduce que $\overline{D}_i\overline{D}_j = \overline{D}_j\overline{D}_i$ para todo i,j lo que permite definir sin ambigüedad las derivaciones de orden $|p|$, $\overline{D}^p\colon B \longrightarrow B$ para todo múlti-índice p (cf. 6.5).

NOTA. De manera general se considerará, si E es un álgebra de Fréchet, a $E \hat{\otimes}_R E$ como E-módulo mediante

$$x.(a \otimes b) = (x \otimes 1)\ (a \otimes b) = xa \otimes b$$

esto es, vía el morfismo $x \longrightarrow x \otimes 1$ de E en $E \hat{\otimes}_R E$.

El siguiente resultado es esencial:

PROPOSICION 7.2. i)*El ideal generado por los elementos* $1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$, $1 \otimes y_j - y_j \otimes 1$, $(1 \leq i \leq n)$ $(1 \leq j \leq m)$ *es denso en la diagonal* Δ_A *de* $A \hat{\otimes}_R A$.

ii) $\Omega(A)$ *es generado por los elementos* dx_i, dy_j $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$.

Demostración. i) Consideremos la sucesión exacta $0 \to D_A \to A \otimes_R A \xrightarrow[\lambda]{} A \to 0$ donde $\lambda(\sum a_i \otimes b_i) = \sum a_i b_i$; se sabe que Δ_A es la clausura de D_A en $A \hat{\otimes}_R A$ ([6], III, 1.2) de modo que es suficiente probar que el ideal generado por los elementos en cuestión en $A \hat{\otimes}_R A$ es denso en D_A.

Ahora de manera general D_A es generado por los elementos $1 \otimes a - a \otimes 1$ $(a \in A)$; como los x_i, y_j generan una subálgebra densa en A, existe una sucesión $P_n \in R[t_1,\ldots,t_n,\xi_1,\ldots,\xi_m]$ tal que

$a = \lim_{n\to\infty} P_n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ y por lo tanto cada $1 \otimes a - a \otimes 1$ es límite de elementos de $A \otimes A$ de la forma

$P(1 \otimes x_1,\ldots,1 \otimes x_n,\ 1 \otimes y_1,\ldots,1 \otimes y_m) - P(x_1 \otimes 1,\ldots,y_m \otimes 1)$.

Entonces es suficiente probar que un elemento de esta forma está en el ideal de $A \otimes A$ generado por los $1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$, $1 \otimes y_j - y_j \otimes 1$. Pero se tiene

$$P(t_1,\ldots,t_n,\xi_1,\ldots,\xi_m) - P(t_1',\ldots,t_n',\xi_1',\ldots,\xi_m') =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Q_i(t_1,\ldots,t_n,\xi_1,\ldots,\xi_m,t_1',\ldots,t_n',\xi_1',\ldots,\xi_m')\ (t_i - t_i') +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} S_j(t_1,\ldots,t_n,\xi_1,\ldots,\xi_m,t_1',\ldots,t_n',\xi_1',\ldots,\xi_m')\ (\xi_j - \xi_j')$$

para convenientes polinomios Q_i, S_j (en 2n + 2m variables) y el resultado sigue entonces mediante la sustitución

$$t_i \longrightarrow 1 \otimes x_i, t_i' \longrightarrow x_i \otimes 1, \xi_j \longrightarrow 1 \otimes y_j;\ \xi_j' \longrightarrow y_j \otimes 1.$$

ii) Por i) el submódulo de $\Omega(A)$ generado por los dx_i, dy_j es denso en $\Omega(A)$; basta aplicar entonces 5.5 d).

PROPOSICION 7.3. *Con las notaciones anteriores, se tiene*

i) *La diagonal* Δ_B *de* $B \hat{\otimes}_R B$ *es generada por los elementos* $1 \otimes \overline{x}_i - \overline{x}_i \otimes 1$, $1 \otimes \overline{y}_j - \overline{y}_j \otimes 1$.

ii) $\Omega(B)$ *es un* B-*módulo libre de base* $d\overline{x}_1, \ldots, d\overline{x}_n$.

Demostración. i) Se tiene las sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & D_A & \longrightarrow & A \otimes_R A & \xrightarrow[\lambda]{} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D_B & \longrightarrow & B \otimes_R B & \xrightarrow[\lambda]{} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como $A \longrightarrow B$ es suryectiva y como D_B es generada (como B-módulo) por los $1 \otimes b - b \otimes 1$ ($b \in B$) sigue que $D_A \longrightarrow D_B$ es un epimorfismo; por otro lado $B \otimes_R B$ es un cociente de $A \otimes_R A$ (algebraica y topológicamente). Luego D_B es cociente de D_A, algebraica y topológicamente. En consecuencia al pasar a los completados resulta $\Delta_A \longrightarrow \Delta_B$ suryectiva, y por consiguiente Δ_B es un $B \hat{\otimes}_R B$-módulo finitamente generado (por la hipótesis iv) sobre Δ_A). Ahora bastará combinar 7.2.i) con 5.5.c).

ii) Se tiene una sucesión exacta $0 \longrightarrow I.\Omega(A) \longrightarrow \Omega(A) \longrightarrow B \otimes_A \Omega(A) \longrightarrow 0$ (cf.5.6),y un epimorfismo de A-módulos $B \hat{\otimes}_A \Omega(A) \xrightarrow{j} \Omega(B)$ que verifica $j(b \otimes d_A x) = b.d_B\overline{x}$ para todo $b \in B$, $x \in A$ ([6], III. 1.4). Sigue de esto y de 7.2. ii) que los elementos $d\overline{x}_1, \ldots, d\overline{x}_n, d\overline{y}_1, \ldots, d\overline{y}_m$ generan el B-módulo $\Omega(B)$. Pero como $a.dy_i = a. \sum_{k=1}^{n} D_k(y_i)dx_k$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ por 6.1 h), como $\overline{a} = 1$, sigue que $d\overline{y}_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{D_k(y_i)} d\overline{x}_k$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, luego los $d\overline{x}_i$ generan $\Omega(B)$.

Supongamos $\sum_{i=1}^{n} b_i\, d\overline{x}_i = 0$ para $b_i \in B$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; aplicando cada derivación $\overline{D}_j : B \longrightarrow B$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ y usando que $\langle \overline{D}_j, d\overline{x}_i \rangle = \overline{D}_j(x_i) = \delta_{ij}$, se obtiene $b_1 = \ldots = b_n = 0$ y todo queda probado.

Se deduce de lo anterior que existe una matriz $c = (c_{ij}) \in B^{m \times n}$ tal que

$$d\overline{y}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} \cdot d\overline{x}_k \qquad (1 \leqslant j \leqslant m) \qquad (11)$$

(claramente será $c_{jk} = \overline{D}_k(y_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$).

Consideramos por otro lado el epimorfismo $B^{n+m} \longrightarrow \Omega(B)$ sobre la base canónica $e_1,\dots,e_n$, $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$ por $e_i \longrightarrow d\overline{x}_i$, $\varepsilon_j \longrightarrow d\overline{y}_j$.

Se obtiene una sucesión exacta $0 \longrightarrow N \longrightarrow B^{n+m} \longrightarrow \Omega(B) \longrightarrow 0$.

LEMA 7.4. N *es un* B-*módulo libre de base* $\varepsilon_j - \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\, e_k \quad (1 \leqslant j \leqslant m)$.

Demostración. Inmediata apartir de la definición.

PROPOSICION 7.5. Δ_B^2 *es cerrado en* $B \hat{\otimes}_R B$. *Por consiguiente* $\Omega(B) = \Delta_B/\Delta_B^2$.

Demostración. Ciertamente la aplicación natural
$i: \Delta_B/\Delta_B^2 \longrightarrow \Delta_B/\overline{\Delta_B^2} = \Omega(B)$ es un epimorfismo de B-módulos. Sea por otro lado $v: B^{n+m} \longrightarrow \Delta_B^2$ definida como la aplicación B-lineal tal que
$v(e_i) = 1 \otimes \overline{x}_i - \overline{x}_i \otimes 1$, $v(\varepsilon_j) = 1 \otimes \overline{y}_j - \overline{y}_j \otimes 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant n \;,\; 1 \leqslant j \leqslant m)$.
Se afirma que $v(N) \subset \Delta_B^2$; para ello es suficiente probar que
$v(\varepsilon_j - \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\, e_k) = 1 \otimes \overline{y}_j - \overline{y}_j \otimes 1 - \sum_{k=1}^{n} \overline{D}_k(\overline{y}_j)(1 \otimes x_t - x_t \otimes 1) \in \Delta_B^2$
para todo $j \leqslant m$. Pero $a(1 \otimes y_j - y_j \otimes 1) - a \sum_{k=1}^{n} D_k(y_j)(1 \otimes x_k - x_k \otimes 1) \in$ $\in \Delta_A^2$ por 6.1 h) y por ser Δ_A^2 cerrado por la hipótesis iv) de 4.5). De aquí sigue inmediatamente lo dicho.

Se tiene entonces un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & B^{n+m} & \longrightarrow & \Omega(B) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{v}} & & \\
0 & \longrightarrow & \Delta_B^2 & \longrightarrow & \Delta_B & \longrightarrow & \Delta_B/\Delta_B^2 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

y resulta $\overline{v}$ suryectivo; en efecto, veamos que $\Delta_B = \Delta_B^2 + \mathrm{Im}(v)$. Bastará probar que $\Delta_A = \Delta_A^2 + \mathrm{Im}(w)$ donde $w: A^{n+m} \longrightarrow \Delta_A$ es definida en forma análoga a v, esto es, $w(e_i) = 1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$, $w(\varepsilon_j) = 1 \otimes y_j - y_j \otimes 1$.
Sea entonces $x \in \Delta_A$; la imagen de x en $\Omega(A) = \Delta_A/\Delta_A^2$ se escribe en la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i + \sum_{j=1}^{m} a_j'\, dy_j$ (a_i, a_j' en A) (7.2.ii)). Por consiguiente $x - \sum_{i=1}^{n} a_i(1 \otimes x_i - x_i \otimes 1) - \sum_{j=1}^{m} a_j'(1 \otimes y_j - y_j \otimes 1) \in \Delta_A^2$ y esto da lo afirmado y por consiguiente la suryectividad de $\overline{v}$.
Finalmente, tenemos epimorfismos $\Omega(B) \xrightarrow{\overline{v}} \Delta_B/\Delta_B^2$, $\Delta_B/\Delta_B^2 \xrightarrow{i} \Omega(B)$; de 7.3 ii) resulta entonces que $i\overline{v}$ es un isomorfismo, luego $\overline{v}$ es inyectivo, y por ende un isomorfismo. Por consiguiente i también es un isomorfismo, y concluímos.

Consideramos ahora el homomorfismo de B-álgebras graduadas (los polinomios con su graduación usual)

$$\mu: B\,[T_1,\dots,T_n] \longrightarrow gr_{\Delta_B}(B \hat{\otimes}_R B) = \bigoplus_{r \geq 0} \Delta_B^r/\Delta_B^{r+1} \qquad (12)$$

unívocamente definido por la condición $\mu(T_i) = 1 \otimes \overline{x}_i - \overline{x}_i \otimes 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

PROPOSICION 7.6. *μ es un isomorfismo de B-álgebras graduadas.*

Demostración. En primer lugar, como $gr_{\Delta_B}(B \otimes B)_1 = \Delta_B/\Delta_B^2$ de 7.5. y 7.3 ii) sigue que $gr_1(\mu)$ es isomorfismo y por lo tanto μ es seguramente un epimorfismo. Consideremos ahora un $h \in \overline{V}$, y sea $i_h\colon B \hat{\otimes}_R B \longrightarrow B$ el homomorfismo bien definido por la condición $i_h(x \otimes y) = h(x)y$ (o sea $i_h = h \otimes 1_B$); se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
B\,[T_1,\dots,T_n] & \xrightarrow{\ \mu\ } & gr_{\Delta_B}\,(B \hat{\otimes}_R B) \\
{\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle gr(i_h)} \\
R\,[t_1,\dots,t_n] & \xrightarrow{\ \overline{\tau}'_h\ } & gr_{M(h)}\ (B) \\
& {\scriptstyle\overline{\tau}_h}\searrow \quad gr_{M(h)}\ (A) \quad \nearrow{\scriptstyle \Pi_h} &
\end{array}$$

donde α es el morfismo definido por $\alpha(b) = h(b)$ $(b \in B)$, $\alpha(T_i) = t_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $gr(i_h)$ es inducido por i_h (ya que $i_h(\Delta_B) = M(h)$, cf. 7.3. i) y 5.4), Π_h es definido en forma evidente vía $A \longrightarrow B$, $\overline{\tau}_h$ es como en (9) y $\overline{\tau}'_h$ se define análogamente vía $t_i \longrightarrow$ clase de $\overline{x}_i \bmod M(h)^2$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Destaquemos que Π_h es un isomorfismo gracias a 7.1. iii); por consiguiente $\overline{\tau}_h{}'$ es isomorfismo por 6.8.

Supongamos que un cierto $P \in \operatorname{Ker}(gr_m(\mu))$ $(m \geqslant 1)$, así que $P = \sum_{|p|=m} b_p T^p$ es un polinomio homogéneo de grado m, con

$\sum_{|p|=m} b_p(1 \otimes \overline{x}_1 - \overline{x}_1 \otimes 1)^{p_1} \dots (1 \otimes x_n - x_n \otimes 1)^{p_n} = 0$; aplicando $gr_m(i_h)$ queda $\sum_{|p|=m} h(b_p)(\overline{x}_1 - h(\overline{x}_1))^{p_1} \dots (\overline{x}_n - h(\overline{x}_n))^{p_n} = 0$

Por lo dicho arriba sobre Π_h resulta que $h(b_p) = 0$ para todo multi-índice p, y como esto vale para todo $h \in \overline{V} = X(B)$, se obtiene $b_p = 0$ para todo p, de donde $P = 0$, y concluímos.

COROLARIO 7.7. *Para cada* $a \in B \hat{\otimes}_R B$ *existe una única familia* $R_p(a)$ *de elementos de* B *(*p *recorriendo los multi-índices* $p \geqslant 0$*) tal que*

$$a - \sum_{|p| \leq m} R_p(a)\ (1 \otimes \overline{x}_1 - \overline{x}_1 \otimes 1)^{p_1} \dots (1 \otimes \overline{x}_n - \overline{x}_n \otimes 1)^{p_n} \in \Delta_B^{m+1}$$

para todo $m \geqslant 0$. *Además la aplicación* $\sigma\colon B \hat{\otimes}_R B \longrightarrow B\,[[T_1,\dots,T_n]]$ *definida por* $\sigma(a) = \sum_{p \geq 0} R_p(a)\, T^p$ *es un morfismo de B-álgebras, de núcleo* $\Delta_B^\infty = \bigcap_{r \geq 1} \Delta_B^r$.

OBSERVACIONES 7.8. a) Es sencillo explicitar los "coeficientes" $R_p(a)$ de la serie formal asociada al elemento $a \in B \hat{\otimes}_R B$; en efecto, aplicando el morfismo i_h $(h \in \overline{V})$ y comparando con 6.10, se obtiene

$$h\, R_p(a) = \frac{h\, \overline{D}^p(i_h(a))}{p!} \tag{14}$$

para cada $h \in \overline{V}$ y cada $p \geqslant 0$.

En particular, si $a = 1 \otimes x$, $i_h(a) = x$ para todo $h \in \overline{V}$ y por lo tanto para todo $p \geqslant 0$

$$R_p(1 \otimes x) = \frac{\overline{D}^p(x)}{p!} \tag{15}$$

Por el contrario, si $a = x \otimes 1$, $i_h(a) = h(x)$, así que de (14) deducimos que

$$R_p(x \otimes 1) = 0 \quad \text{si} \quad |p| > 0 \quad R_o(x \otimes 1) = x \tag{16}$$

b) De lo anterior obtenemos: para todo $x \in B$ y para todo $m \geqslant 0$ es

$$1 \otimes x - \sum_{|p| \leq m} \frac{\overline{D}^p(x)}{p!} (1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1)^{p_1} \ldots (1 \otimes x_n - x_n \otimes 1)^{p_n} \in \Delta_B^{m+1}$$

c) En particular, reemplazando en la fórmula anterior x por $\overline{D}^q$ y m por $m - |q|$, se obtiene

$$1 \otimes \overline{D}^q(x) - \sum_{|p|+|q| \leq m} \frac{\overline{D}^{p+q}(x)}{p!} (1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1)^{p_1} \ldots (1 \otimes x_n - x_n \otimes 1)^{p_n} \in$$
$$\in \Delta_B^{m+1-|q|} \tag{17}$$

para todo $m \geqslant 0$ y todo multi-índice q con $m+1 > |q|$.

Consideramos ahora la aplicación continua η: $X(A) \longrightarrow R^{n+m}$ definida por $\eta(h) = (h(x_1), \ldots, h(x_n), h(y_1), \ldots, h(y_m))$.

Esta aplicación es inyectiva gracias al hecho que los polinomios en $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ son densos en A.

Sea $K = \eta(\overline{V})$; K es un compacto y $\eta|\overline{V} = j$: $\overline{V} \longrightarrow K$ es un homeomorfismo.

Luego $j^* = :C^o(K) \longrightarrow C^o(X(B)) = C^o(\overline{V})$ es un isomorfismo, donde, por supuesto, $j^*(f) = fj$.

Utilizando la transformación de Gelfand g: $B \longrightarrow C^o(\overline{V})$ (que es inyectiva) podemos definir un morfismo (automáticamente continuo) φ: $B \longrightarrow C^o(K)$ de modo que $j^* \varphi = g$, lo que permite representar cada elemento $b \in B$ como una función continua $\varphi(b)$: $K \longrightarrow R$. Queremos probar que las funciones $\varphi(b)$ $(b \in B)$ son infinitamente diferenciables, esto es: $\varphi(b)$ es la restricción a K de alguna $f \in C^\infty(R^{n+m})$. Para ello bastará ver que para todo $m \geqslant 0$ se tiene un "jet de orden m" $F = (F^k)_{|k| \leq m}$ sobre K tal que $F^o = \varphi(b)$, y de modo que $F \in \mathcal{E}^m(K)$ (notaciones como en [11], ch. I). A tal efecto definimos un morfismo

$$F : B \longrightarrow C^{o}(K)\ [[t_1,\ldots,t_n,\xi_1,\ldots,\xi_m]] = J(K)$$

poniendo $$F(b) = \sum_{p\geq 0} \frac{F^p(b)}{p!}\ t^p \qquad \text{(cf. 7.7)}$$

y ponemos para cada multi-índice $p \geqslant 0$

$$F^p\ (b) = \begin{cases} \varphi(\overline{D}^p(b)) & \text{si } p_{n+1} = \ldots = p_{n+m} = 0 \\ 0 & \text{si algún } p_i > 0 \text{ con } n < i \leqslant n+m \end{cases} \qquad (18)$$

y entonces sólo habrá que verificar que, para cada $m \geqslant 0$, el jet así definido verifica las condiciones que definen $\mathcal{E}^m(K)$ (ver [11] ch. I, 2.2 y 2.3). Pero esto es consecuencia de las identidades (17) y del siguiente lema (comparar con [6], III, 3.1)

LEMA 7.9. *Sea* $a \in \Delta_B^r$ $(r \geqslant 1)$, f_a: $K\mathrm{x}K \longrightarrow R$ *la aplicación dada por* $f_a = (\varphi \otimes \varphi)(a)$. *Existe entonces una constante* $C > 0$ *tal que* $|f_a(v_1,v_2)| \leqslant C\|v_1-v_2\|^r$ *para todo* $(v_1,v_2) \in K\mathrm{x}K$.

Demostración. Por 7.3 i) existen elementos $c_p \in B \hat{\otimes}_R B$ (p recorriendo los multi-índices $(p_1,p_2,\ldots,p_{n+m})$) tales que

$$a = \sum_{|p|=r} c_p(1\otimes\overline{x}_1-\overline{x}_1\otimes 1)^{p_1}\ldots(1\otimes\overline{x}_n-\overline{x}_n\otimes 1)^{p_n}\ (1\otimes\overline{y}_1-\overline{y}_1\otimes 1)^{p_{n+1}}\ldots$$
$$\ldots\ (1\otimes y_m-y_m\otimes 1)^{p_{n+m}}$$

Notando que $\varphi(\overline{x}_i) = t_i|K$, $\varphi(\overline{y}_j) = \xi_j|K$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$, la tesis resulta de observar que

$$f_a((t,\xi),(t',\xi')) = \sum_{|p|=r} g_p(t,t',\xi,\xi')(t_1-t_1')^{p_1}\ldots(t_n-t_n')^{p_n}.$$
$$(\xi_1-\xi_1')^{p_{n+1}}\ldots(\xi_m-\xi_m')^{p_{n+m}}$$ poniendo $g_p(\varphi\otimes\varphi)(c_p)$, $v_1 = (t,\xi)$, $v_2 = (t',\xi')$. (la constante C dependerá de

$$\sup_{|p|=r}\ \{\sup|g(t,\xi,t',\xi')| : ((t,\xi)\ ,\ (t',\xi')) \in K\mathrm{x}K\}).$$

NOTA. Conviene observar que si $f \in C^\infty(R^{n+m})$ corresponde a un $\varphi(b)$, esto es: $\varphi(b) = f|K$, entonces las derivadas parciales de f restringidas a K son exactamente los $F^p(b)$; la serie de Taylor formal de f sobre K coincide con F(b).

Consideramos ahora el cálculo operacional C^∞ T'': $C^\infty(R^{n+m}) \longrightarrow B$ definido unívocamente por $T''(t_i) = \overline{x}_i$, $T''(\xi_j) = \overline{y}_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$.

COROLARIO 7.10. T'': $C^\infty(R^{n+m}) \longrightarrow B$ *es un morfismo suryectivo.*

Demostración. Sea $b \in B$; por lo anterior $\varphi(b) = f|K$ para alguna $f \in C^\infty(R^{n+m})$. Como φ $T''(f) = f|K$ trivialmente, resulta $b = T''(f)$ y todo queda probado.

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado siguiente:

PROPOSICION 7.11. *El morfismo* $T_o: \&_n \longrightarrow A/P(h_o)$ *es un isomorfismo.*

Demostración. (Para la definición de T_o ver el diagrama (10)).

Definamos el cálculo operacional $T': C^\infty(R^{n+m}) \longrightarrow A$ vía $T'(t_i) = x_i$, $T'(\xi_j) = y_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$; la composición de T' con el morfismo $\Pi: A \longrightarrow B$ es exactamente T'', luego $T'' = \Pi T'$ es suryectivo. Como el ideal I que define a B está incluído en $P(h_o)$, el morfismo $B \longrightarrow A/P(h_o)$ es suryectivo. Por consiguiente el morfismo $C^\infty(R^{n+m}) \xrightarrow{T'} A \longrightarrow A/P(h_o)$, indicado F, es suryectivo e induce trivialmente un epimorfismo $F_o: \&_{n+m} \longrightarrow A/P(h_o)$. En consecuencia $A/P(h_o)$ es un álgebra diferenciable en el sentido de [11], ch. III, 2.2. Ahora si $i: R^{n+m} \longrightarrow R^n$ es $i(t_1,\ldots,t_n,\xi_1,\ldots,\xi_m) = (t_1,\ldots,t_n)$ se verifica sin dificultad que

$$\begin{array}{ccc} \&_n & \xrightarrow{i^*} & \&_{n+m} \\ \Big\downarrow{=} & & \Big\downarrow{F_o} \\ \&_n & \xrightarrow{T_o} & A/P(h_o) \end{array}$$

es un diagrama conmutativo; ello significa que T_o es un morfismo de álgebras diferenciables. Como $\hat{T}_o$ es un isomorfismo (6.11), la tesis resulta de [11], ch. V, 4.4.

COROLARIO 7.12. *Con las notaciones del* §6, *existe un entorno* W *de* h_o *y* $f_j \in C^\infty(R^n)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ *tales que* $\hat{y}_j|W = \widehat{T(f_j)}|W$ *para todo* $j \leqslant n$.

8. Estableceremos ahora el resultado fundamental de este trabajo, para lo cual utilizaremos la maquinaria desarrollada en los parágrafos 6 y 7, así como el

LEMA 8.1. *Sea* Ω *un abierto no vacío de* R^n, A' *una subálgebra de* $C^o(\Omega)$. *Supongamos:*

1. *Las restricciones* $u_i = t_i|\Omega$ *de las funciones coordenadas están en* A' $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

2. *Para cada* $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \Omega$ *el ideal maximal* $M_\lambda = \{f \in A' : f(\lambda)=0\}$ *de* A' *es generado por* $u_i - \lambda_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

3. *Existen* $\delta_i \in \mathrm{Der}(A')$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *tales que* $\delta_i(u_j) = \delta_{ij}$ *para todo* i,j.

Entonces $A' \subset C^\infty(\Omega)$ *y* $\delta_i = \partial/\partial t_i$ *para todo* $i \leqslant n$.

Demostración. Es una adaptación evidente de [1], lema 3,

Sea A un álgebra de Fréchet que verifica las condiciones i), ii) y v) de 4.5; bajo hipótesis algo menos restrictivas es posible definir un haz $\mathcal{A}$ sobre el espacio X(A), cuyas secciones globales coinciden con A.

Se considera para ello, para cada abierto $U \subset X(A)$ el conjunto multiplicativo $S_U = \{a \in A: h(a) \neq 0$ para todo $h \in U\}$ y se define $\mathcal{A}(U) = A\,[S_U^{-1}]$ (álgebra de fracciones de A definida por S_U). Que esto define un haz, así como que cada $\mathcal{A}(U)$ admite una topología que la hace un álgebra de Fréchet m-convexa formalmente real, es un hecho conocido (ver [6], I.2).
En la misma referencia se prueba que $\mathcal{A}(U)$ puede describirse como el conjunto de aplicaciones $f: U \longrightarrow R$ que coinciden localmente con las restricciones a U de las aplicaciones $\hat{a}$ $(a \in A)$; asimismo la aplicación natural $A \longrightarrow \mathcal{A}(U)$ (indicada según es usual, con $a \longrightarrow a/1$) induce un homeomorfismo $X(\mathcal{A}(U)) \longrightarrow U$.

Finalmente mencionemos que para cada abierto $U \subset X(A)$ hay una aplicación A-lineal $\mathrm{Der}(A) \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathcal{A}(U))$ (indicada $D \longrightarrow D|U$) bien definida por la regla $D|U(a/b) = bD(a) - aD(b)/b^2$ para cada $a/1 \in \mathcal{A}(U)$.

TEOREMA 8.2. *Sea* A *un álgebra que verifica las condiciones* i) *a* vii) *de* 4.5. *Existe entonces una única estructura de variedad diferenciable en* X(A), *tal que la transformación de Gelfand induce un isomorfismo* $g: A \longrightarrow C^\infty(X(A))$.

Demostración. La unicidad es clara por 4.3. Veamos la existencia. En primer lugar, $X_o = \{h \in X(A): \rho(h) = 0\}$ es un subespacio discreto abierto y cerrado de X(A) (cf. 5.8); no hay dificultad en proveer a X_o de una estructura de variedad diferenciable de dimensión 0. El problema reside en los puntos de $X - X_o$; evidentemente para tratar este caso puede suponerse que $X_o = \emptyset$.

Construimos el haz asociado al álgebra A como se indicó arriba. Sea $h_o \in X(A)$; por 7.12 podemos suponer que hay un entorno W de h_o y aplicaciones $f_j \in C^\infty(R^n)$ tales que $\hat{y}_j|W = \widehat{f(x_1,\ldots,x_n)}|\,W$; sea U un entorno abierto de h_o con $\overline{U}$ compacto, $\overline{U} \subset W$, de tal forma que $\theta|U: U \longrightarrow E_\varepsilon(0)$ sea suryectiva para un cierto $\varepsilon > 0$ (cf. 6.4), $\overline{U} \subset U_o$ como en 6.2.

Notemos en primer lugar que $\theta|W$ es inyectiva; en efecto, sean h_1, h_2 en W y supongamos que $h_1(x_i) = h_2(x_i)$ para todo $i \leq n$. Entonces para todo $j \leq m$ $h_1(y_j) = h_1(f_j(x_1,\ldots,x_n)) = f_j(h_1(x_1),\ldots,h(x_n)) =$ $= f_j(h_2(x_1),\ldots,h_2(x_n)) = h_2(y_j)$; de esto y de 6.1.b) resulta que $M(h_1) = M(h_2)$ y por ende $h_1 = h_2$.

Por la hipótesis sobre U sigue que $\theta|U: U \longrightarrow E_\varepsilon(0)$ es un homeomorfismo. Antes de proseguir, convendrá probar que cualquiera sea el abierto

$V \subset U$ y $h \in V$, el ideal $M(h)$ de $A(V)$ es generado por los $x_i/1 - h(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Es evidente que $M(h)$ es generado por los $x_i/1-h(x_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ y los $y_j/1 - h(y_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, de modo que bastará ver que cada $y_j/1 - h(y_j)$ está en el ideal generado por los $x_i/1 - h(x_i)$. Sabemos que $y_j = T(f_j) + a$ con $\hat{a}_j|W = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Sea $s \in A$ tal que $sa_j = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, $\hat{s}|\bar{U} = 1$ $\hat{s}|X(A) - W = 0$. Así $s/1 = 1$ en $A(V)$ para cualquier abierto $V \subset U$, mientras que $a_j/1 = 0$ en $A(V)$. Pongamos $\lambda = \theta(h)$; entonces $f_j - f_j(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} g_{jk}\ (t_k-\lambda_k)$, para cada $j \leqslant m$, con $g_{jk} \in C^\infty(R^n)$; por consiguiente, si $1 \leqslant j \leqslant m$, será:

$y_j-h(y_j)-a_j = T(f_j) - hT(f_j) = T(f_j) - T(f_j(\lambda)) = T(f_j-f_j(\lambda)) =$
$= T(f_j-f_j(\lambda)) = \sum_{k=1}^{n} T(g_{jk})(x_k-h(x_k))$ y lo afirmado resulta aplicando el morfismo $x \longrightarrow x/1$ de A en $A(V)$.

Sea $V \subset U$ un abierto no vacío , sea $\Omega = \theta(V)$; probaremos que $\theta_o^*\colon C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^o(V)$ definida por $\theta_o^*(f) = f\,\theta\cdot$ establece una biyección entre $C^\infty(\Omega)$ y $A(V)$.

Consideramos el cálculo operacional $T\colon C^\infty(R^n) \longrightarrow A$ definido por $T(t_i) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; sean S_Ω y S_V los correspondientes conjuntos multiplicativos en $C^\infty(R^n)$ y A. Evidentemente $T(S_\Omega) \subset S_V$, luego queda inducido un único morfismo T_V que hace conmutativo el diagrama (20) (se utiliza que $C^\infty(R^n)\ [S_\Omega^{-1}] = C^\infty(\Omega)$).

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(R^n) & \xrightarrow{T} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^\infty(\Omega) & \xrightarrow{T_V} & A(V) \end{array} \qquad (20)$$

Sea $f \in C^\infty(\Omega)$ y representémosla en la forma f_1/f_2 con $f_1,f_2 \in C^\infty(R^n)$ y $f_2 \in S_\Omega$; se tiene para cada $h \in V = X(A(V))$:

$\widehat{T_V(f)}(h) = [\widehat{T(f_1)}/\widehat{T(f_2)}](h) = hT(f_1)/hT(f_2) = f_1(\theta(h))/f_2(\theta(h)) =$
$= f(\theta(h))$.

Esto prueba que $T_V = \theta_o^*$ y por lo tanto asegura que $\theta_o^*(C^\infty(\Omega)) \in A(V)$. Como θ^* es inyectiva, bastará probar que $\theta_o^*\ (C^\infty(\Omega)) = A(V)$. Para cada $a \in A(V)$ definimos $\varphi(a)\colon \Omega \longrightarrow R$ poniendo $\varphi(a)(\theta(h)) = h(a)$ (bien definido ya que $\theta|V\colon V \longrightarrow \Omega$ es homeomorfismo). Es inmediato que $\varphi\colon A(V) \longrightarrow C^o(\Omega)$ es un morfismo inyectivo, cuya imagen es una subálgebra de $C^o(\Omega)$ que se indicará A'. Afirmamos que A' está en las condiciones del lema 8.1.; en efecto, es claro que $\varphi(x_i/1) = t_i|\Omega$ si $1 \leqslant i \leqslant n$. Asimismo las disquisiciones previas dan enseguida la condición 2) ya que si $\lambda = \theta(h)$ tendremos "$a \in M(h) \Longleftrightarrow \varphi(a) \in \widehat{M}_\lambda$". Finalmente, si D_i $(1 \leq i \leq n)$ son las derivaciones de A que verifican $D_i(x_j)|U = \delta_{ij}$ (6.1. c)), podemos poner δ_i: $A' \longrightarrow A'$ mediante $\delta_i(\varphi(a)) = \varphi(D_i|U(a))$ y es elemental verificar que se cumple 3.

Por 8.1 tendremos $A' \subset C^\infty(\Omega)$ así que φ: $A(V) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$ es un morfismo inyectivo; ahora si $h \in V$, $\theta_o^* \varphi(a)(h) = \varphi(a)(\theta(h)) = \hat{a}(h)$, luego $\theta_o^* \varphi = 1_{A(V)}$ y entonces sigue que θ_o^*: $C^\infty(\Omega) \longrightarrow A(V)$ es un isomorfismo. De lo probado resulta que es posible definir en X(A) una estructura de variedad diferenciable, tal que para cada abierto $X \subset X(A)$ el álgebra $C^\infty(X)$ se identifica con $A(X)$, y entonces la tesis es evidente.

Como consecuencia de este teorema resulta que la "categoría de las C^∞-álgebras" se identifica con la subcategoría plena (de la categoría de álgebras) formada por las álgebras que verifican i) a vii) de 4.5.; los funtores $X \longrightarrow C^\infty(X)$, $A \longrightarrow X(A)$ establecen una equivalencia entre esta categoría y la categoría de variedades diferenciables.

Mencionemos que si $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación de clase C^∞ entre variedades diferenciables y f^*: $B \longrightarrow A$ es el morfismo correspondiente de sus álgebras, la diferencial usual de f en $h \in X(A) = X$ se identifica con la aplicación lineal inducida por f,

$(M(h)/M(h)^2)^* \longrightarrow (M(h')/M(h')^2)^*$, donde $h' = hf^*$.

REFERENCIAS

[0] R. ARENS, *Dense inverse limit rings*, Michigan Math. J., 5 n°2, (1958).

[1] B. BANASCHEWSKI, *An algebraic characterization of* $C^\infty(R^n)$, Bull. de l'Acad. Pol. Sci. XVI, n°3 (1968) 169-174.

[2] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique, Algèbre Commutative*, Hermann.

[3] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique, Espaces vectoriels topologiques*, Hermann.

[4] R. BROOKS, *The structure space of a commutative locally* m-*convex algebra*, Pacific Journal of Math., vol. 25 n°3 (1968) 443-454.

[5] C. BYRNES, *Closed algebras of smooth functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 81, n°1 (1975) 195-198.

[6] J. DIAZ, *Caracterización de las álgebras diferenciables*, Collectanea Mathematica XXIII (1972) 17-83.

[7] J. DIEUDONNÉ, *Éléments d'Analyse*, Gauthier-Villars (1970).

[8] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs AMS 16 (1955).

[9] A. GUICHARDET, *Leçons sur certaines algèbres topologiques*, Gordon & Brech.

[10] B.IVERSEN, *Generic local structure in commutative algebra*, Lecture Notes in Math. 310, Springer.

[11] B. MALGRANGE, *Ideals of differentiable functions*, Oxford Univ. Press (19) (1966).

[12] B . MICHAEL, *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Memoirs AMS 11 (1952).

[13] M. ROSENFELD, *Commutative F-álgebras*, Pacific Journal of Math. 16 (1966) 159-166.

[14] R. SWAN, *Vector bundles and projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962) 264-277.

[15] S. TELEMAN, *Lectures on the applications of sheaves to ring theory*, Lecture notes in Math. 248, Springer (1971) 100-311.

[16] S. TELEMAN, *Representation des anneaux tauberins discrets par des faisceaux*, Rev. Roumaine de Math. XIV, n°2 (1969) 249-264.

[17] L. WALBROECK, *Topological vector spaces and algebras*, Lecture Notes in Math. 230, Springer.

Universidad de Buenos Aires.
Argentina.

Recibido en julio de 1977.