Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 31, 1983.

ESTRELLADOS Y SEPARABILIDAD EN UN SISTEMA AXIOMATICO PARA LA CONVEXIDAD

Juan Carlos Bressan

1. INTRODUCCION.

Utilizaremos el sistema axiomático para operadores de cápsula convexa desarrollado en [1] y ciertas propiedades allí demostradas. Por analogía con el caso vectorial, daremos la definición de conjunto estrellado y probaremos algunas proposiciones que se deducen de (Ax.1) a (Ax.4). Finalmente demostraremos la equivalencia entre (Ax.5), el teorema de separación de Kakutani para convexos y el de Drešević [3] para conjuntos estrellados. Parte de los resultados de este trabajo se encuentra en el capítulo VI de la Tesis doctoral del autor [2].

2. NOTACION Y AXIOMAS.

Sean X un conjunto tal que card $X \geq 2$, P(X) la familia de todos los subconjuntos de X, $K:P(X) \longrightarrow P(X)$ una función que llamaremos *operador de cápsula convexa* y que cumple los siguientes axiomas:

(Ax.1) $A \subset X \Rightarrow K(K(A)) \subset K(A)$.

(Ax.2) $A \subset X \Rightarrow K(A) = \cup \{K(F) \mid F \text{ finito y } F \subset A\}$.

(Ax.3) $a \in X \Rightarrow K(\{a\}) = \{a\}$.

(Ax.4) $\emptyset \neq F \subset X$, F finito y $p \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow K(F \cup \{p\}) \subset \cup \{K(\{a,p\}) \mid a \in K(F)\}$.

Si $\{a_1,\ldots,a_n\} \subset X$, $K(\{a_1,\ldots,a_n\})$ se escribirá $K(a_1,\ldots,a_n)$. Dado $\{a,b\} \subset X$, diremos que K(a,b) es la *banda* determinada por a,b. Dado $A \subset X$, K(A) se llamará la *cápsula convexa* de A. Diremos que A es *convexo* si A = K(A). Por [1] (4.1), para todo $A \subset X$, K(A) es el menor conjunto convexo que incluye a A.

3. CONJUNTOS ESTRELLADOS, NUCLEO Y COMPONENTES CONVEXAS.

Sean $A \subset X$ y $p \in A$, diremos que A es *estrellado en* p si, para todo $x \in A$, $K(p,x) \subset A$.

Como consecuencia de [1] (4.2) obtenemos la siguiente proposición:

(3.1) Si $A \subset X$, los siguientes enunciados son equivalentes:

i) $K(A) = A$. ii) $p \in A \Rightarrow A$ es estrellado en p.

En forma inmediata se prueban las siguientes dos proposiciones:

(3.2) Si $\{A_j \mid j \in J\}$ es una familia de subconjuntos de X estrellados en p, entonces $\cap\{A_j \mid j \in J\}$ es estrellado en p.

(3.3) Si $\{A_j \mid j \in J\}$ es una familia no vacía de subconjuntos de X estrellados en p, entonces $\cup\{A_j \mid j \in J\}$ es estrellado en p.

Sea $A \subset X$, diremos que A es *estrellado* si existe $p \in A$ tal que A es estrellado en p. Observemos que si A es un subconjunto convexo no vacío de X, entonces A es estrellado. Evidentemente, la recíproca no es cierta. Por otra parte, la intersección y la unión de conjuntos estrellados pueden no ser estrellados.

Sea $A \subset X$, llamaremos *núcleo* de A al conjunto $N(A) = \{x \in A \mid A$ es estrellado en $x\}$. Evidentemente, A es estrellado sii $N(A) \neq \emptyset$. Como corolario de (3.2) y (3.3) obtenemos la siguiente proposición:

(3.4) Si $\{A_j \mid j \in J\}$ es una familia de subconjuntos de X, entonces:

i) $\cap\{N(A_j) \mid j \in J\} \subset N(\cap\{A_j \mid j \in J\})$.

ii) $J \neq \emptyset \Rightarrow \cap\{N(A_j) \mid j \in J\} \subset N(\cup\{A_j \mid j \in J\})$.

Como corolario de (3.1) obtenemos la siguiente proposición:

(3.5) Si $A \subset X$, los siguientes enunciados son equivalentes:

i) $K(A) = A$. ii) $N(A) = A$.

Sea $A \subset X$, diremos que C es una *componente convexa* de A si C es un subconjunto convexo maximal de A.

(3.6) Si $A \subset X$, entonces A es la unión de la familia de las componentes convexas de A.

Demostración. Sea $\{C_i \mid i \in I\}$ la familia de las componentes convexas de A. Evidentemente $\cup\{C_i \mid i \in I\} \subset A$. Por otra parte, tomando $x \in A$ y $\mathcal{F} = \{C \mid x \in C \subset A$ y C convexo$\}$, resulta, por (Ax.3), que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, y por [1] (4.8) ii), que toda cadena no vacía de $\mathcal{F}$ tiene cota superior en $\mathcal{F}$; de donde, por el principio maximal, existe M elemento maximal de $\mathcal{F}$. Así $x \in M$ y M es componente convexa de A; en consecuencia $A \subset \cup\{C_i \mid i \in I\}$.

Una subfamilia no vacía $\{C_j \mid j \in J\}$ de componentes convexas de $A \subset X$, se dirá *cobertora* si $A = \cup\{C_j \mid j \in J\}$. Por (3.6), la familia de todas las componentes convexas de A es cobertora, pudiendo existir subfamilias propias de la misma que también lo sean. La demostración de la siguiente proposición es una adaptación, a nuestro sistema axiomático, de la dada por Toranzos [5] , en espacios vectoriales:

(3.7) Si $A \subset X$ y $\{C_j \mid j \in J\}$ es una subfamilia cobertora de componentes convexas de A, entonces $N(A) = \cap\{C_j \mid j \in J\}$.

Demostración. Por (3.4) ii) y (3.5), resulta que $\cap\{C_j \mid j \in J\} \subset N(A)$. Por otra parte, si $p \in N(A)$ y $p \notin C_j$ para algún $j \in J$, resulta $C_j \subsetneq K(C_j \cup \{p\})$; pero, por [1] (4.12), $K(C_j \cup \{p\}) = \cup\{K(x,p) \mid x \in C_j\}$; así, como $p \in N(A)$ y $C_j \subset A$, $K(C_j \cup \{p\}) \subset A$, lo que contradice la maximalidad de C_j. De esta forma $N(A) \subset \cap\{C_j \mid j \in J\}$.

Como corolario de (3.6) y (3.7) obtenemos:

(3.8) Si $A \subset X$, entonces el núcleo de A es la intersección de la familia de las componentes convexas de A.

Si $A \subset X$ y $p \in X$, llamaremos *cápsula estrellada de* A *relativa a* p al menor conjunto estrellado en p que contiene a A. Dicho conjunto será denotado por st(A,p). Por (3.2), st(A,p) es la intersección de la familia de los subconjuntos de X estrellados en p que contienen a A. Mediante una demostración análoga a la dada en la Proposición 2 por Drešević [3] para espacios vectoriales, podemos probar la siguiente proposición en nuestro sistema axiomático:

(3.9) $\emptyset \neq A \subset X$ y $p \in X \Rightarrow st(A,p) = \cup\{K(a,p) \mid a \in A\}$.

En [1] pág.135, dados $A,B \subset X$ definimos $S(A,B) = \cup\{K(a,b) \mid a \in A$ y $b \in B\}$. Así obtenemos:

(3.10) $\emptyset \neq A \subset X$ y $p \in X \Rightarrow st(A,p) = S(A,\{p\})$.

Como corolario de (3.9) y de [1] (4.12) obtenemos:

(3.11) $\emptyset \neq A \subset X$ y $p \in X \Rightarrow K(A \cup \{p\}) = st(K(A),p)$.

4. EQUIVALENCIA ENTRE DIVERSAS CONDICIONES DE SEPARABILIDAD.

Cuando, en [1] (5.1), demostramos el teorema de separación de Kakutani, además de los cuatro axiomas ya considerados, utilizamos el siguiente axioma de separabilidad:

(Ax.5) $a \in K(b,p)$ y $c \in K(d,p) \Rightarrow K(a,d) \cap K(b,c) \neq \emptyset$.

Por otra parte, en [4] 6.1, Ellis prueba que dicho axioma es necesario para deducir el teorema de separación de Kakutani. En el capítulo VI de la Tesis doctoral del autor [2] se utilizó nuevamente (Ax.5) para demostrar el teorema de separación de Drešević [3] para estrellados. La siguiente proposición afirma la equivalencia entre el axioma y los teoremas de separación citados.

(4.1) Si K es un operador de cápsula convexa, es decir, K es una función de P(X) en P(X) con card $X \geqslant 2$ y K cumple (Ax.1) a (Ax.4), entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i) $a \in K(b,p)$ y $c \in K(d,p) \Rightarrow K(a,d) \cap K(b,c) \neq \emptyset$.

ii) Si C,D son subconjuntos convexos de X, disjuntos, y $p \in X$, entonces $K(C \cup \{p\}) \cap D = \emptyset$ o $C \cap K(D \cup \{p\}) = \emptyset$.

iii) Si A,B son subconjuntos convexos de X, disjuntos, entonces existen C,D convexos complementarios tales que $A \subset C$ y $B \subset D$.

iv) Si C,D son subconjuntos de X, disjuntos, tales que C es estrellado en p y D es estrellado en q, y $r \in X$, entonces $st(C \cup \{r\},p) \cap D = \emptyset$ o $C \cap st(D \cup \{r\},q) = \emptyset$.

v) Si A,B son subconjuntos de X, disjuntos, tales que A es estrellado en p y B es estrellado en q, entonces existen C,D subconjuntos complementarios tales que $A \subset C$, $B \subset D$, C es estrellado en p y D es estrellado en q.

Demostración. i) ⇒ ii), ii) ⇒ iii) y iii) ⇒ i), resultan, respectivamente, de las demostraciones dadas por Ellis [4] en 4.4, 4.5 y 6.1, tomando en lugar de dos operadores un solo operador K.

i) ⇒ iv). Sean $C_1 = st(C \cup \{r\},p)$, $D_1 = st(D \cup \{r\},q)$. Si $q_1 \in C_1 \cap D$, por (3.9) existe $s \in C \cup \{r\}$ tal que $q_1 \in K(s,p)$; de suponer que $s \in C$, resulta $q_1 \in C$ y $C \cap D \neq \emptyset$; de allí que $s = r$ y $q_1 \in K(r,p)$. Si además $p_1 \in C \cap D_1$, obtenemos $p_1 \in K(r,q)$; de donde, por i), $K(p,p_1) \cap K(q,q_1) \neq \emptyset$ y $C \cap D \neq \emptyset$.

iv) ⇒ v). Sea $G = \{(A_i,B_i) \mid A \subset A_i = st(A_i,p),\ B \subset B_i = st(B_i,q)$ y $A_i \cap B_i = \emptyset\}$ con el orden parcial $(A_i,B_i) \prec (A_j,B_j)$ sii $A_i \subset A_j$ y $B_i \subset B_j$. Evidentemente, $G \neq \emptyset$ y, por (3.3) y el lema de Zorn, existe (C,D) elemento maximal de G. Pero C,D son subconjuntos complementarios, pues si consideramos $r \in X$, $C_1 = st(C \cup \{r\},p)$ y $D_1 = st(D \cup \{r\},q)$, por iv) resulta $(C_1,D) \in G$ o $(C,D_1) \in G$; de donde, por la maximalidad de (C,D), $r \in C$ o $r \in D$.

v) ⇒ i). Supongamos que $a \in K(b,p)$ y $c \in K(d,p)$ pero $K(a,d) \cap K(b,c) = \emptyset$. Como $K(a,d)$ y $K(b,c)$ son convexos, resultan estrellados en todos sus puntos. Así, por v) existen C,D subconjuntos complementarios tales que $K(b,c) \subset C$, $K(a,d) \subset D$, y C y D estrellados en b y d respectivamente. Si $p \in C$, entonces $K(b,p) \subset C$ y $a \in C$, lo cual es una contradicción pues $a \in D$. Si $p \in D$, se llega a una contradicción análoga.

BIBLIOGRAFIA

[1] J.C. BRESSAN, *Sistema axiomático para operadores de cápsula convexa*, Rev. U.M.A. 26 (1972), 131-142.

[2] J.C. BRESSAN, *Sistemas axiomáticos para la convexidad*, Tesis doctoral, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, (1976).

[3] M. DREŠEVIĆ, *A note on Kakutani Lemma*, Noticiario Matemático (en ruso) 7 (22), (1970), 347-348.

[4] J.W. ELLIS, *A general set-separation theorem*, Duke Math. J. 19 (1952), 417-421.

[5] F.A. TORANZOS, *Radial functions of convex and star-shaped bodies*, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 278-280.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad de Buenos Aires
Argentina

Recibido en julio de 1982.