Revista de la
Unión Matemática Argentina
Vol. 35 1990.

ECONOMIAS DISTRIBUCIONALES

JULIO H. G. OLIVERA

Dedico respetuosamente este trabajo a la memoria del profesor Julio Rey Pastor.

Summary . This paper proves the existence of equilibrium in production economies characterized by means of generalized functions. The demonstration uses the properties of distributions spaces as inductive limits of normed spaces having positive cones with non-empty interiors. The interest of the result comes from the fact that every economic phenomenon described by a function or a measure can also be represented by a distribution .

Introducción

Durante los últimos años ha renacido el interés por la descentralización económica, tanto en los países capitalistas como en los estados colectivistas. La condición primaria para el eficaz funcionamiento de una economía descentralizada es la existencia de lo que en análisis económico se denomina "equilibrio general" o simplemente "equilibrio". Con este término se alude a la mutua compatibilidad de los planes económicos individuales, formados racionalmente por los consumidores y los productores sobre la base de los precios del mercado.

Aunque el concepto de equilibrio general fue definido por León Walras hace más de un siglo, la primera demostración rigurosa de que la economía de mercado posee ese atributo data de 1935 y se debió a Abraham Wald. El teorema de Wald y los resultados posteriores que hoy se conocen genéricamente como el "teorema clásico sobre la existencia del equilibrio competitivo" (v. Mc Kenzie, 1981) tienen por común denominador el empleo de espacios vectoriales de dimensión finita para caracterizar el marco de referencia de las decisiones y actividades económicas.

La investigación de la existencia de equilibrio general con relación a espacios vectoriales de dimensión infinita, que permiten incorporar de modo más completo la influencia del tiempo y de la incertidumbre sobre el proceso económico, se inició con un artículo de T. Bewley (1972). La teoría del equilibrio en el caso de dimensión infinita difiere apreciablemente del análisis tradicional del equilibrio, pues en espacios de dimensión infinita los conjuntos de consumo y de producción carecen con frecuencia de interior no vacío y los subconjuntos acotados no siempre poseen clausura compacta. Estos hechos obligan a postular hipótesis adicionales para garantizar la existencia de equilibrio (cf. Mas-Colell, 1986, y Jones, 1987).

En trabajos precedentes hemos introducido la descripción de los fenómenos económicos mediante funciones generalizadas o distribuciones (Olivera, 1984 y 1986). Nos proponemos ahora verificar la existencia de equilibrio en economías descentralizadas utilizando ese método. Según veremos, el resultado se obtiene con hipótesis normales exactamente análogas a las del contexto finito. Usaremos para la demostración los conceptos relativos a los espacios vectoriales topológicos y las propiedades de los espacios de distribuciones , además de las proposiciones pertinentes de la teoría económica.

Definiciones y supuestos

Sea V un espacio vectorial topológico.

Una economía es un sistema $((X_i), (P_i), (w_i), (Y_j), (\theta_{ij}))$; $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$. $X_i \subset V$ es el conjunto de consumo del consumidor i ; P_i , la relación de preferencia del consumidor i ; $w_i \in V$, la dotación inicial de recursos del consumidor i ; $Y_j \subset V$, el conjunto de producción de la empresa j ; θ_{ij}, la participación del consumidor i en la empresa j, $0 \leq \theta_{ij} \leq 1$.

Una asignación factible es una $(n + m)$-upla $((x_i), (y_j))$ tal que :

1) $x_i \in X_i, i = 1,\ldots,n$;

2) $y_j \in Y_j, j = 1,\ldots,m$;

3) $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} w_i + \sum_{j=1}^{m} y_j$.

La proyección sobre X_i del conjunto de las asignaciones factibles es el conjunto de consumo factible $\hat{X}_i$, y la proyección sobre Y_j del conjunto de las asignaciones factibles es el conjunto de producción factible $\hat{Y}_j$.

Un equilibrio es una asignación factible $((x_i), (y_j))$ y una funcional lineal continua $\Pi \neq 0$ sobre V que cumplen las siguientes condiciones:

1) $\Pi (y_j) = \max \{ \Pi (u) \mid u \in Y_j \}$, $j = 1, \ldots, m$;

2) $\Pi (x_i) = \Pi (w_i) + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \Pi (y_j)$, $i = 1,\ldots, n$;

3) $z \in P_i (x_i)$ implica $\Pi(z) > \Pi(w_i) + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \Pi(y_j)$, $i = 1, \ldots, n$;

Las siguientes hipótesis son usuales en la teoría del equilibrio :

A1) X_i es cerrado y convexo, $i = 1, \ldots, n$;

A2) la representación gráfica de $P_i : z \rightarrow P_i(z)$ es abierta en $X_i \times X_i$, $i = 1, \ldots, n$;

A3) $P_i(z)$ es convexo para cada $z \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$;

A4) $z \notin P_i (z)$ para cada $z \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$;

A5) $z \in \overline{P_i (z)}$ para cada $z \in \hat{X}i$, $i = 1, \ldots, n$;

A6) $w_i \in \mathring{X}_i$, $i = 1 , \ldots ,n$;

A7) Y_j es cerrado y convexo, $j = 1, \ldots, m$;

A8) $0 \in Y_j$, $j = 1, \ldots, m$;

A9) $\sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} = 1$, $j = 1,\ldots,m$;

A10) $\hat{X}_i$ y $\hat{Y}_j$ son compactos, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$.

Investigaremos la existencia de equilibrio en una economía distribucional, es decir, una economía donde V = E', el espacio de las distribuciones con soporte compacto. La topología de E' es la topología del dual, determinada por los conjuntos acotados de E. El cono positivo de E' tiene interior no vacío . Por otra parte, siendo E' un espacio de Montel, todos sus subconjuntos cerrados y acotados son compactos. Este punto reviste particular importancia con relación al supuesto A10.

Existencia de equilibrio

La demostración de la existencia de equilibrio en la economía distribucional se apoyará en la siguiente proposición, debida a W.R. Zame (1987, teorema 2):

Lema. *Sean* L *un espacio normado,* τ *una topología Hausdorff de espacio vectorial sobre* L, *más débil que la topología inducida por la norma, y* $((X_i), (P_i), (w_i), (Y_j), (\theta_{ij}))$ *una economía tal que* $X_i, Y_j \subset L$, $w_i \in L$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$. *Supongamos que:*

1) *se verifican las hipótesis* A3, A4, A8, y A9 ;

2) *las hipótesis* A1, A5, A6 y A7 *valen respecto a la topología de la norma ;*

3) *la representación gráfica de* P_i *es abierta en la topología producto de* τ *por la topología de la norma;*

4) X_i y Y_j *son compactos en la topología* τ, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$.

Entonces la economía de referencia posee un equilibrio.

Demostración. Ver Zame (1987) página 1095.

Teorema. En las hipótesis A1 - A10 la economía distribucional posee un equilibrio.

Demostración. Por virtud de A5, existe para cada consumidor i y cada $x \in \hat{X}_i$ un consumo $x' \in P_i(x)$. Siendo compactos los conjuntos factibles, podemos hallar un conjunto finito S_i con la particularidad de que, para cada $x \in \hat{X}_i$, hay un elemento $s \in S_i \cap P_i(x)$.

Utilizamos ahora el hecho de que E' es un espacio bornológico. Sea *C* la colección de los subconjuntos convexos, cerrados, acotados y balanceados de E', ordenados por inclusión. Para cada C ∈ *C* consideramos el subespacio $E'_c \bigcup_{n \in N} n\,C$, donde N es el conjunto de los números naturales.

Puesto que C es acotado y la topología de E' es una topología Hausdorff, la función de calibre g_c de C en E'_c constituye una norma. Por consiguiente, (E'_c, g_c) es un espacio normado cuya topología es más fuerte que la topología inducida en E'_c por la topología de E'.

Restringimos la atención a la familia *F* de los espacios E'_c tales que $(\cup S_i) \cup \{w_i\} \subset C$, $i = 1,\ldots, n$. La familia *F* está ordenada por inclusión. Para cada F ∈ *F* definimos una economía con los siguientes datos:

$$X_i^F = X_i \cap F,$$

$$P_i^F(x) = P_i(x) \cap F,$$

$w_i^F = w_i$,

$\theta_{ij}^F = \theta_{ij}$,

$Y_j^F = Y_j \cap F$.

Se deduce del Lema que cada economía caracterizada de este modo posee un equilibrio $((x^F), (y_j^F), \Pi^F)$. Observamos que también $((x^F), (y_j^F), k\,\Pi^F)$ es un equilibrio para cualquier $k > 0$. Podemos así suponer sin pérdida de generalidad que $\| \Pi^F \|_F = 1$ para todo F. Designaremos con Π^F tanto la funcional continua sobre F como su extensión a E' por vía del teorema de Hahn-Banach.

El conjunto $\{\Pi^F\}$ es relativamente compacto en E. De esta circunstancia y de la hipótesis A10 se desprende que existen elementos x_i en X_i, y_j en Y_j y Π en E con la propiedad siguiente:

$\{x_i^F\}$ converge a x_i,

$\{y_j^F\}$ converge a y_j,

$\{\Pi^F\}$ converge a Π,

para alguna subred de $\{((x_i^F), (y_j^F), \Pi^F)\}$. La continuidad de la aplicación P_i y de las seminormas g_c, juntamente con el supuesto de que $w_i \in X_i$, implican que $((x_i), (y_j), \Pi)$ es un equilibrio de la economía distribucional.

Extensión del resultado

Aunque nuestro argumento se ha desarrollado en términos del espacio E' de distribuciones con soporte compacto (la clase de funciones generalizadas más útil para el análisis de sistemas de "insumo-producto") las mismas consideraciones son válidas respecto al espacio D' de distribuciones con soporte arbitrario. La importancia de este punto deriva de que, para describir procesos económicos, se recurre con frecuencia a los siguientes espacios funcionales:

$L^\infty(\mu)$, espacio de funciones medibles equivalentes a funciones acotadas sobre un espacio de medida;

$L^1(\mu)$, espacio de funciones equivalentes a funciones integrables sobre un espacio de medida;

$L^2(\mu)$, espacio de funciones equivalentes a funciones de cuadrado integrable sobre un espacio de medida;

C(X), espacio de funciones continuas de valor real sobre un espacio métrico compacto;

M(X), espacio de medidas de Borel finitas y numerablemente aditivas sobre un espacio métrico compacto.

Todas las funciones y medidas indicadas definen elementos en D'. Desde este punto de vista el enfoque distribucional absorbe los modelos corrientes. Cualquier fenómeno económico susceptible de ser descrito por una función o una medida puede también representarse mediante una distribución.

Referencias

[1] BEWLEY, T. (1972), *Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities*, Journal of Economic Theory 4, 514-540.

[2] JONES, L.E. (1987), *Existence of equilibria with infinitely many commodities: Banach lattices reconsidered,* Journal of Mathematical Economics 16, 89-104.

[3] MAS-COLELL, A. (1986),*The price equilibrium existence problem in topological vector lattices,* Econometrica 54, 1039-1053.

[4] MACKENZIE, L. (1981), *The classical existence theorem of competitive equilibrium,* Econometrica 49, 819-841.

[5] OLIVERA, J.H.G. (1984), *Producción y tiempo: teoría distribucional,* Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales 36, 93-99.

[6] OLIVERA, J.H.G. (1986), *Conjuntos de producción distribucionales,* Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales 38, 49-56.

[7] ZAME, W.R. (1987), *Competitive equilibria in production economies with an infinite-dimensional commodity space,* Econometrica 55, 1075-1107.

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas
Buenos Aires - Argentina

Recibido por U.M.A. el 16 de mayo de 1989.