**Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 37, 1991.**

FUNCIONES CON CONDICIONES SOBRE SU OSCILACION MEDIA, DISTRIBUCION Y CONTINUIDAD

HUGO AIMAR

El problema de la relación entre continuidad Hölder puntual y estimaciones de valor medio integral para funciones en el espacio euclídeo n–dimensional, aparece a principios de la década de los sesenta, en conexión con el estudio de soluciones débiles de ecuaciones elípticas con coeficientes con poca regularidad.

Los propósitos de este trabajo son: mostrar cómo puede plantearse un programa análogo al elíptico en un contexto más general que contenga también el caso parabólico y resolver algunos de los problemas que lo constituyen.

Las referencias siguientes definen una línea básica con origen en problemas elípticos: J. Moser (1961); F. John y L. Nirenberg (1961);S. Campanato (1963); G. Meyers (1964); S. Spanne (1965); B. Muckenhoupt y R. Wheeden (1976); A. P. Calderón en U. Neri (1977); N. Burger (1978); R. Macías y C. Segovia (1979).

El siguiente resultado está contenido en el trabajo " *Rearrangement and continuity properties of $BMO(\phi)$ functions on spaces of homogeneous type*" que aparecerá próximamente en "Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa". Si $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisface $\phi(2r) \leq C\phi(r)$ y f es una función localmente integrable en el espacio de tipo homogéneo (X, d, μ), se dice que $f \in BMO(\phi)$ si y sólo si la desigualdad

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B | f - m_B(f) | \, d\mu \leq \phi(r(B)),$$

es válida para toda d–bola B en X. Aquí $r(B)$ denota el radio de B y

$$m_B(f) = \mu(B)^{-1} \int_B f \, d\mu$$

Si B es una bola, $\tilde{B}$ es la bola concéntrica con B y radio $2K$ veces el radio de B (K es la constante triangular de d) y $\psi_B(t)$ es la reordenada decreciente de $|f - m_{\tilde{B}}(f)|$ sobre B. El principal resultado, del que se sigue la equivalencia entre Lipschitz puntual e integral es el siguiente

Teorema 1: *$f \in BMO(\phi)$ si y sólo si existen constantes positivas α, β y γ tales que para toda bola $B = B(x,r)$ la desigualdad*

$$\psi_B(t) \leq \beta \int_{\frac{r}{5K^2}[\frac{1}{\gamma\mu(B)}]^\alpha}^{r} \frac{\phi(\xi)}{\xi} \, d\xi ,$$

vale para cada $t \in (0, \gamma\mu(B))$.

En 1964 y 1967, J. Moser introduce condiciones de tipo BMO parabólico que no sólo implican un cambio de geometría en el espacio, sino que agregan un retardo temporal a la condición de oscilación media. En 1985, E. Fabes y N. Garófalo extienden el método de A. P. Calderón para obtener un lema de tipo John–Nirenberg para logaritmos de soluciones de ecuaciones parabólicas. Un enfoque unificado de los espacios BMO parabólicos y elípticos en lo referente a distribuciones y continuidad aparece en [A1] en 1988 en el contexto de espacios de tipo homogéneo, con la introducción de retardos temporales generales que contienen como casos particulares aquellas dos situaciones y otras nuevas. Cabe mencionar en este punto la estrecha relación de estos problemas con los problemas de pesos laterales y maximales laterales que es objeto de intensas investigaciones y que ha sido el motivo de varias conferencias en esta X Escuela Latinoamericana de Matemática (ver A. de la Torre y F. Martín Reyes). Antes de introducir los problemas y resultados de aquel artículo y otros nuevos, probaremos el siguiente lema que sugiere la forma de los espacios BMO generales y cuya demostración sigue la línea de Moser (1961).

Sea $(X, d\mu)$ un espacio de tipo homogéneo, B la clase de todas las d–bolas en X y h una función de B en $\mathbb{R}^+$. Una función

$$v : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

está en $BMOP$ (parabólico) en $X \times \mathbb{R}$ si y sólo si existe una constante C tal que para cada $B \in B$ existe una función $V(t) = V_B(t)$ de clase $C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$h(B)\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\mu(B)}\int_B |v(x,t) - V(t)|^2 d\mu(x) \leq C.$$

Dada $B \in B$ y $t \in \mathbb{R}$, llamamos $t_1 = t - \frac{1}{2}h(B), t_2 = t + \frac{1}{2}h(B), t_3 = t - \frac{3}{2}h(B), R^+ = B \times (t_1, t_2)$ y $R^- = B \times (t_3, t_1)$. Denotamos con λ la medida de Lebesgue unidimensional.

Lema 1: Si $v \in BMOP$ en $X \times \mathbb{R}$, entonces existe C tal que $\forall B \in B$ y $\forall t \in \mathbb{R}\ \exists V \in \mathbb{R}$ que satisface las desigualdades

$$\frac{1}{\mu \times \lambda(R^+)}\int_{R+}\int \sqrt{(v - V)^+} d\mu d\lambda \leq C,$$

$$\frac{1}{\mu \times \lambda(R^-)}\int_{R-}\int \sqrt{(V - v)^+} d\mu d\lambda \leq C.$$

Demostración: Sean $x_o \in X, r > 0$ y t_0 $\mathbb{R}$ fijos. Sea $B_0 = B(x_0, r), R_0^+$ y R_0^- como arriba. Notemos en primer lugar que $h(B_0)\frac{dV}{dt} \leq C$ y, por lo tanto

$$V - V_1 = V(t) - V(t_1) \leq \frac{C}{h(B_0)}(t - t_1) \leq C.$$

Para $s > 3C$ definimos $B_s(t) = \{x \in B_0 : v(x,t) - V_1 > s\}$. Para cada $x \in B_s(t)$ tenemos que

$$v(x,t) - V > s + V_1 - V \geq s - c \geq 2c > 0,$$

de donde se sigue que

$$B_s(t) \subset \{x \in B_0 : v - V > s + V_1 - V\}.$$

Usando nuevamente la condición $BMOP$, se obtiene

$$h(B_0)\frac{dV}{dt}+\frac{\mu(B_s(t))}{\mu(B_0)}(s+V_1-V)^2\leq C,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{\mu(B_s(t))}{\mu(B_0)}\leq\frac{C}{(s+V_1-V)^2}-h(B_0)\frac{d}{dt}(\frac{1}{V-V_1-s}).$$

Integrando entre t_1 y t_2 tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(B_0)}\int_{t_1}^{t_2}\mu(B_s(t))dt&\leq\int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{(s-\frac{C}{h(B_0)}(t-t_1))^2}-h(B_0)[\frac{1}{V_2-V_1-s}+\frac{1}{s}]\\&=\frac{h(B_0)}{C}[\frac{1}{s-C}-\frac{1}{s}]-\frac{h(B_0)}{V_2-V_1-s}-\frac{h(B_0)}{s}\\&\leq h(B_0)[\frac{1}{C}+1]\frac{1}{s-C}\end{aligned}$$

Con la información obtenida podemos calcular ahora el promedio sobre R_0^+ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}2\int_{R_0^+}\int\{(v-V_1)^+\}^{\frac{1}{2}}d\mu d\lambda&=\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}(\mu\times\lambda)(\{(x,t)\in R_0^+:(v-V_1)^+\ >\ s\})\,ds\\&=\int_0^{3C}+\int_{3C}^\infty\\&\leq 3C(\mu\times\lambda)(R_0^+)+[\frac{1}{C}+1]\mu(B_0)h(B_0)\int_{3C}^\infty\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}(s-C)}ds\\&\leq\tilde{C}(\mu\times\lambda)(R_0^+).\end{aligned}$$

Un argumento similar prueba la segunda desigualdad de la tesis. #

Mencionemos que diferentes estructuras de espacio de tipo homogéneo X y diferentes funciones h aparecen naturalmente en problemas parabólicos con parte elíptica degenerada.

Con el objeto de contemplar simultáneamente las situaciones elípticas y parabólicas, en [A1] se introduce la noción de retardo en un espacio de tipo homogéneo. Si (Y,δ,ν) es un espacio de tipo homogéneo y B es la familia de las δ–bolas en Y, un retardo es una función

$$T:B\to B$$

tal que δ (centro de $T(B)$, centro de B) $\leq C$ radio de B y radio de $T(B)\sim$ radio de B.

Se dice que una función real f localmente integrable sobre Y está en el espacio $BMO(T,h)$ si y sólo si existe un constante $N(f)$ tal que para cada $B\in B$ existe C_B tal que

$$\frac{1}{\nu(B)}\int_B h(f-C_B)d\nu\leq N(f)$$

$$\frac{1}{\nu(T(B))}\int_{T(B)}h(C_B-f)d\nu\leq N(f).$$

La función h satisface: $h(t) = 0$ si $t < 0$, h es creciente, $h(t+s) \leq h(t) + h(s)$ y $e^{-\epsilon h(t)} \in L^1(0,\infty) \forall \epsilon > 0$.

El siguiente Lema de tipo John–Nirenberg es el principal resultado que luego puede aplicarse para probar condiciones de tipo A_2 laterales para potencias de soluciones de los operadores diferenciales.

Teorema 2: *Si T es un retardo en la bola $B(x_1, R_1)$, entonces existen constantes η, a y b positivas y finitas tales que la desigualdad*

$$\nu\{x \in B(x_1, \eta, R_1) : [f(x) - C_{B(x_1,R_1)}]^+ > \lambda\} \leq a e^{-\frac{bh(\lambda)}{N(f)}} \mu(B(x_1, \eta r_1))$$

vale para todo λ.

La demostración es, una vez más, una combinación de los lemas de cubrimiento y la técnica de A. P. Calderón.

Si en el miembro derecho de la desigualdad que define $BMOP$ se consideran funciones φ del radio de B, un análogo del Lema 1 es válido con $\varphi(r)$ en el miembro derecho de las desigualdades. El estudio de tales funciones, su distribución y regularidad será el objeto de un trabajo en preparación.

Referencias

[A–1] H. Aimar, *Elliptic and parabolic BMO and Harnack's Inequality*, Trans. Amer. Math. Soc. 306 (1988), 265–276.

[A–2] H. Aimar, *Rearrangement and continuity properties of $BMO(\phi)$ functions on spaces of homogeneous type*, a aparecer en Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.

[B] N. Burger, *Espace des fonctions a variation mogenne bornee sur un espace de nature homogene*, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A 286 (1978), 139–142.

[C] S. Campanato, *Propietá d hölderianitá di alcune classi di funzioni*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 17 (1963), 175–188.

[FG] E. Fabes and N. Garófalo, *Parabolic BMO and Harnack's inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. 95 (1985), 63–69.

[JN] F. John and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 415– 426.

[M] G.N. Meyers, *Mean oscillation over cubes and Hölder continuity*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964) 717–724.

[Mo1] J. Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 415–426.

[Mo2] J. Moser, *A Harnack inequality for parabolic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 17 (1964), 101–134.

[MS] R. Macías and C. Segovia, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. 33 (1979), 257–270.

[MW] B. Muckenhoupt and R. Wheeden, *Weighted mean oscillation and the Hilbert transform*, Studia Math. 54 (1976), 221–237.

[N] U. Neri, *Some properties of functions with bounded mean oscillation*, Studia Math. 61 (1977), 63–75.

[S] S. Spanne, *Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 19 (1965), 593–608.