Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 38, 1993.

CONJUNTOS DE PUNTOS FIJOS DE AUTOMORFISMOS INVOLUTIVOS EN ESPACIOS k-SIMETRICOS

Alicia García

INTRODUCCION.

En una serie de trabajos ([8], [9], [10] y [11]) D. Leung estudia, en una variedad riemanniana, las subvariedades obtenidas como conjuntos de puntos fijos de isometrías involutivas y las llama reflexivas. En [9] da una caracterización de las mismas, para espacios simétricos M, en términos del álgebra de Lie del grupo de isometrías de M.

El principal objetivo de este trabajo es caracterizar las subvariedades que son conjuntos de puntos fijos de automorfismos involutivos en espacios k-simétricos y que llamamos $\tilde{\nabla}$-reflexivas.

Una abundante cantidad de ejemplos de estas subvariedades aparecen naturalmente. En [3], J. Jiménez clasifica los espacios 4-simétricos simplemente conexos y compactos. Geométricamente, estos espacios se fibran sobre espacios simétricos con fibras totalmente geodésicas. Surge de su construcción que dichas fibras son subvariedades $\tilde{\nabla}$-reflexivas. Vale la pena notar que esta construcción se aplica a las variedades de bandera generalizadas y así [4] y [5] suministran una importante cantidad de ejemplos de subvariedades $\tilde{\nabla}$-reflexivas.

Presentamos este trabajo dividido en 4 secciones. En § 1 destacamos resultados conocidos en espacios k-simétricos y que usamos en el desarrollo. La sección § 2 contiene el resultado más importante (teorema 2.2) el cual da una caracterización, para M espacio k-simétrico y simplemente conexo, de las subvariedades $\tilde{\nabla}$-reflexivas que involucra esencialmente el álgebra de Lie del grupo de automorfismos de M. En § 3 extendemos el resultado anterior a situaciones donde el espacio k-simétrico no es simplemente conexo. Finalmente en § 4 damos relaciones entre subvariedades reflexivas y $\tilde{\nabla}$-reflexivas en espacios k-simétricos $M = \tilde{G}/\tilde{K}$ ($\tilde{G}$ grupo de isometrías de M y $\tilde{K}$ grupo de isotropía en el punto a de M) donde la descomposición $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{m}$ dada en (1.3) es, como ocurre en los espacios simétricos, naturalmente reductiva.

Los resultados de este artículo son parte del trabajo de tesis doctoral realizado bajo la dirección del Dr. Cristián Sánchez, a quien quiero agradecer muy sinceramente.

§ 1. PRELIMINARES.

Un espacio k-simétrico es una variedad riemanniana conexa M tal que para cada p en M existe una isometría s_p que satisface:

i) s_p tiene orden k , para todo p en M ,

ii) p es un punto fijo aislado de s_p ,

iii) $s_p\, s_q\, s_p^{-1} = s_{s_p(q)}$ para todo p, q en M .

Una familia de isometrías satisfaciendo i), ii) y iii) es llamada una s-estructura regular de orden k en M.

En un espacio k-simétrico existe un tensor S de tipo 1-1 y una conexión $\tilde{\nabla}$ llamada conexión canónica, asociados ambos a la s-estructura y relacionados por $\tilde{\nabla}S = 0$. Ellos están definidos por $(SX)_p = s_p\big|_{*p} X_p$, $\tilde{\nabla} = \nabla - D$ donde ∇ es la conexión de Levi-Civita y $D(X,Y) = (\nabla_{(I-S)^{-1} X} S)\, S^{-1}\, Y$.

Es bien conocido (ver [6] y [2]) que:

1.1. Si $I(M)$ es el grupo de isometrías de M , entonces la clausura en $I(M)$ del grupo generado por $\{s_p : p \in M\}$ actúa transitiva y diferenciablemente sobre M .

1.2. El grupo de automorfismos de M , $Aut(M) = \{\rho : \rho$ es difeomorfismo $\tilde{\nabla}$-afín de M y $\rho s_p = s_{\rho(p)}\rho$, para todo p en M$\}$ es un grupo de Lie N_2 y transitivo de transformaciones de M ; así $\overset{\circ}{Aut}(M)$ actúa transitivamente sobre M ($\overset{\circ}{H}$ denota la componente conexa de la identidad del grupo de Lie H) .

1.3. Si $G = \overset{\circ}{Aut}(M)$ y a está en M , el espacio homogéneo $M \simeq G/G_a$ es reductivo respecto a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ (esto es, $Ad(g)\ (\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ para g en $K = G_a$) donde $\mathfrak{k} = \mathcal{L}(K) = Ker\ (id - \sigma|_{*e})$, $\mathfrak{m} = Im(id - \sigma|_{*e})$, σ es el automorfismo de G dado por $\sigma(g) = s_a g s_a^{-1}$ y $\mathcal{L}(H)$ denota el álgebra de Lie de H . Además $\tilde{\nabla}$ es completa y coincide con la conexión canónica del espacio homogéneo reductivo G/G_a.

1.4. El grupo de transvecciones Tr(M) , generado por $s_x s_y^{-1}$, x,y en M, es un subgrupo de Lie conexo y normal en Aut(M). Además, es transitivo sobre M .

Recordemos que una subvariedad N de M es $\tilde{\nabla}$-autoparalela si para cada curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow N$ y $X \in T_{\gamma(0)}N$, la $\tilde{\nabla}$-traslación paralela de X a lo largo de γ es un vector tangente a N .

§ 2. SUBVARIEDADES $\tilde{\nabla}$-REFLEXIVAS. CARACTERIZACION.

Sea M un espacio k-simétrico. En esta sección consideramos subvariedades de M que coinciden con la componente conexa del conjunto de puntos fijos de un automorfismo involutivo de M (ver (1.2)) y por su similitud con las subvariedades reflexivas introducidas por Leung (ver [9]), las llamaremos *subvariedades $\tilde{\nabla}$-reflexivas*. Estas subvariedades resultan subvariedades cerradas y $\tilde{\nabla}$-autoparalelas (ver [7]).

Las hojas de la conocida fibración de Hopf $S^1 \longrightarrow S^5 \longrightarrow CP^2$ son ejemplos de subvariedades $\tilde{\nabla}$-reflexivas. En efecto, consideremos en S^5 la s-estructura regular de orden 4 (ver [6]) dada por:

(2.1) Si $p = (0,0,1)$, $s_p(z_1,z_2,z_3) = (\bar{z}_2,-\bar{z}_1,\bar{z}_3)$ y si $q = g(p)$ con $g \in SU(3)$ entonces $s_q = gs_pg^{-1}$.

Es fácil verificar que $N_q = (F(s_q^2, S^5))_q$ es la hoja que pasa por q ($(F(\rho,M))_a$ denota la componente conexa de a del conjunto de puntos fijos del automorfismo ρ de M).

En (2.2) daremos una caracterización, cuando M es simplemente conexa, de subvariedades de M $\tilde{\nabla}$-reflectivas en términos del álgebra de Lie de $G = \overset{\circ}{Aut}(M)$. Por la transitividad de la acción de G sobre M, es suficiente caracterizar las subvariedades $\tilde{\nabla}$-reflexivas que pasan por a, para a fijo en M .

Conservaremos la notación de § 1. Además, denotaremos por $[X,Y]_{m}$ a la m-componente de $[X,Y]$.

<u>Teorema 2.2.</u> *Sea* $(M, \{s_x\}_{x \in M})$ *un espacio* k*-simétrico simplemente conexo y* N *una subvariedad conexa y cerrada de* M *que pasa por* $a \in M$. *Entonces:* N *es* $\tilde{\nabla}$*-reflexiva si y sólo si* N *es* $\tilde{\nabla}$*-autoparalela y existe un complemento* ℓ *de* $n \equiv T_aN$ *en* $m \equiv T_aM$ *que satisface:*

i) n *y* ℓ *son* $S_a = s_a|_{*a}$*-invariantes,*

ii) $[n,n]_{m} \subset n$, $[n,\ell]_{m} \subset \ell$, $[\ell,\ell]_{m} \subset n$,

iii) $[[n,n]_{k},n] \subset n$, $[[n,\ell]_{k},\ell] \subset n$

$[[n,n]_{k},\ell] \subset \ell$, $[[\ell,\ell]_{k},n] \subset n$

$[[n,\ell]_{k},n] \subset \ell$, $[[\ell,\ell]_{k},\ell] \subset \ell$

Demostración. Veremos en primer lugar que estas condiciones son suficientes para que N sea $\tilde{\nabla}$-reflexiva. Como $m = n \oplus \ell$ podemos definir el isomorfismo lineal ϕ en m por $\phi|_{n}= \mathrm{id}$ y $\phi|_{\ell}= -\mathrm{id}$.

Los tensores torsión y curvatura de la conexión canónica $\tilde{\nabla}$ de M están dados por: $\tilde{T}_a(X,Y) = -[X,Y]_{m}$, $\tilde{R}_a(X,Y)Z = -[[X,Y]_{k},Z]$ para $X,Y,Z \in m$ (ver (1.3)). De (ii) y (iii) resultan $\tilde{T}_a$ y $\tilde{R}_a$ ϕ-invariantes.

Sea $v = \{V_1 , \dots , V_q\} \subset m$ y $\gamma_v : [0,q] \longrightarrow M$ la $\tilde{\nabla}$-geodésica quebrada asociada a v con $\gamma_v(0) = a$ (ver [13]). Sean $\tilde{\tau}_v$ la $\tilde{\nabla}$-traslación paralela a lo largo de γ_v desde $\gamma_v(0)$ a $\gamma_v(q)$, $\phi v = \{\phi V_1 , \dots , \phi V_q\}$ y ϕ_v el isomorfismo lineal de $T_{\gamma_v(q)}M$ sobre $T_{\gamma_{\phi v}(q)}M$ dado por $\phi_v = \tilde{\tau}_{\phi v}\phi\tilde{\tau}_v^{-1}$. Como $\tilde{T}$ y $\tilde{R}$ son $\tilde{\nabla}$-paralelos, ϕ_v preserva $\tilde{T}_{\gamma_v(q)}$ y $\tilde{R}_{\gamma_v(q)}$. Siendo M simplemente conexa, como consecuencia del teorema de Cartan-Ambrose-Hicks ([13]), se obtiene que $\rho(\gamma_v(q)) = \gamma_{\phi v}(q)$ es el difeomorfismo $\tilde{\nabla}$-afín de M que satisface $\rho(a) = a$, $\rho|_{*a} = \phi$ y $\rho|_{*\gamma_v(q)} = \phi_v$.

Sea x en M y $v = \{V_1 , \dots , V_q\} \subset m$ tal que la $\tilde{\nabla}$-geodésica quebrada asociada a v una a con x . Como $\rho|_{*x} = \phi_v$, ϕ y S_a conmutan (ver (i)) y S es $\tilde{\nabla}$-paralelo, es inmediato que $(\rho s_x)|_{*x} = (s_{\rho(x)}\rho)|_{*x}$. Luego $\rho \in \mathrm{Aut}(M)$ y $\rho^2 = \mathrm{id}$.

Para finalizar la demostración de la condición suficiente, consideremos la subvariedad cerrada $F = (F(\rho,M))_a$ de M y veamos que $F = N$. Como $n = T_aF$, basta probar que $N \subset F$. Esto resulta de observar que si $x \in N$ existe una $\tilde{\nabla}$-geodésica quebrada de a a x , γ_v tal que $\gamma_v \subset N$ y $v \subset n$.

Probaremos ahora la recíproca. Sea $N = (F(\rho,M))_a$ donde ρ es un automorfismo involutivo de M . La función $\tilde{\rho}$ de Aut(M) dada por $\tilde{\rho}(h) = \rho h \rho^{-1}$ define un automorfismo del grupo de Lie G y por lo tanto, $\tilde{\rho}|_{*e}$ es un automorfismo de álgebra de Lie g . Si $g = k \oplus m$ es la descomposición reductiva dada en (1.3), es fácil ver que k y m son

$\tilde{\rho}|_{*e}$-invariantes. Como $(\tilde{\rho}|_{*e})|_{m} \neq \mathrm{id}$ (con la identificación natural, $\rho|_{*a} = (\tilde{\rho}|_{*e})|_{m}$) y $\tilde{\rho}^2 = \mathrm{id}$, si m_j es el autoespacio de $\tilde{\rho}|_{*e}$ correspondiente al autovalor $j = \pm 1$, resulta $m_1 = n$. Eligiendo $\ell = m_{-1}$ se concluye fácilmente la demostración. ■

§ 3. SUBVARIEDADES LOCALMENTE $\tilde{\nabla}$-REFLEXIVAS EN ESPACIOS k-SIMETRICOS.

Sea $(M, \{s_x\}_{x \in M})$ un espacio k-simétrico.

<u>Definición 3.1.</u> *Una subvariedad* N *de* M *es localmente* $\tilde{\nabla}$-*reflexiva si para cada* p *en* N *existen entornos abiertos de* p , A_p *y* B_p *en* N *y* M *respectivamente y un automorfismo involutivo* ρ *de* B_p , *tales que* $A_p = (F(\rho,B_p))_p$. (Entendemos por automorfismo de B_p a un difeomorfismo $\tilde{\nabla}$-afín ρ de B_p tal que $\rho s_x = s_{\rho(x)}\rho$ en un entorno abierto de x , x en B_p) .

Todo subconjunto abierto de una subvariedad $\tilde{\nabla}$-reflexiva es una subvariedad localmente $\tilde{\nabla}$-reflexiva.

Nuestro objetivo es encontrar, cuando M no es simplemente conexa, subvariedades N de M , que puedan ser levantadas localmente a subconjuntos abiertos de subvariedades $\hat{N}$ del cubrimiento universal $\hat{M}$ de M , de modo que N sea localmente $\tilde{\nabla}$-reflexiva si y sólo si $\hat{N}$ es $\tilde{\nabla}$-reflexiva (ver (3.6) y (3.7)).

Asumimos en esta sección que toda variedad y subvariedad satisface el segundo axioma de numerabilidad (N_2).

<u>Definición 3.2.</u> *Una subvariedad conexa* N *de* M *es localmente del tipo* * *si satisface las siguientes condiciones:*

i) *Para cada* p *en* N , *existe un entorno abierto* U_p *de* p *en* N *tal* *que* $s_p|_{U_p}$ *es una isometría.* (1)

ii) *Para cada* p, q *en* N *y cada* g *en* Tr(M) *tal que* $g(p) = q$, *existe un entorno abierto* U_p *de* p *en* N *tal que* $g\colon U_p \longrightarrow g(U_p) \subset N$ *es una isometría.* (1)

Diremos que N *es de tipo* * *si los entornos que aparecen en* (i) *y* (ii) *pueden ser reemplazados por* N .

Es inmediato que si Q es (localmente) de tipo * , $\{s_p : p \in Q\}$ induce una s-estructura regular (local) de orden j , $2 \le j \le k$.

Un ejemplo de una subvariedad de tipo * está dado por S^5 con la s-estructura regular definida en (2.1). Como $s_p\, g\, s_p^{-1} \in SU(3)$ para g en SU(3), resulta que $Tr(M) \subset SU(3)$. Es fácil ver que $S^1 = \{(0,0,u)\} \subset$ $\subset S^5$ es de tipo * y por lo tanto, todo subconjunto abierto de S^1 es localmente de tipo * . Veremos en (3.3) que también vale la recíproca.

<u>*Lema 3.3.*</u> *Sea* Q *una subvariedad de* M *localmente de tipo* * . *Entonces existe una única subvariedad* N *de* M , *de tipo* * , *tal que* dim N = dim Q *y* Q *es una subvariedad abierta de* N .

Demostración. Notemos que:

(3.4) Q es $\tilde{\nabla}$-autoparalela y por lo tanto $\tilde{\nabla}|_Q$ es una conexión en Q. Además, si $\tilde{\nabla}^Q$ es la conexión canónica asociada a la s-estructura de Q inducida por M , entonces:

(3.5) $\tilde{\nabla}^Q = \tilde{\nabla}|_Q$

Las pruebas de (3.4) y (3.5) son análogas a las de IV.2 y IV.3 de [6]. (3.5) implica que $\tilde{\nabla}$ induce una conexión completa en una

(1) Notemos que N en general no es subvariedad regular de M .

subvariedad de tipo * .

Fijemos a en Q y sea $W = T_aQ$. Notemos que W es invariante por la representación lineal isotrópica de $(Tr(M))_a$ en T_aM . Este hecho nos permite definir la siguiente distribución Δ en M :

si $x \in M$, $\Delta_x = g|_{*a}W$

donde $g \in Tr(M)$ es tal que $g(a) = x$.

Observando que Δ es $Tr(M)$-invariante y W es $\tilde{T}_a$-invariante, podemos probar, como en IV.5 de [6], que Δ es una distribución diferenciable e involutiva. Sea N la subvariedad integral conexa maximal de Δ que pasa por a . Mostraremos ahora que N es la subvariedad deseada. Para verificar que es de tipo * , veremos que $s_p|_N$ es una isometría de N cuando $p \in N$ (la otra condición se prueba en forma análoga). Para esto es suficiente probar que $s_p(N) \subset N$ (ver [12]). Si $p \in N$ y α es una curva diferenciable a trozos con $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(t) \in \Delta_{\alpha(t)}$, veremos que $\beta(t) = s_p\alpha(t)$ satisface $\dot{\beta}(t) \in \Delta_{\beta(t)}$. Consideremos h_t en $Tr(M)$ tal que $h_t(p) = \alpha(t)$, entonces $l_t = s_ph_ts_p^{-1} \in Tr(M)$ y $l_t(p) = \beta(t)$. Como W es $s_a|_{*a}$-invariante y la s-estructura es regular, Δ_p es $s_p|_{*p}$-invariante y en consecuencia $\Delta_{\beta(t)} = (l_ts_p)|_{*p}\,\Delta_p = (s_ph_t)|_{*p}\,\Delta_p = s_p|_{*p}\,\Delta_{\alpha(t)}$. Luego, $\dot{\beta}(t) \in \Delta_{\beta(t)}$.

Es inmediato que Q es una subvariedad integral de Δ , por lo tanto $Q \subset N$ y Q es una subvariedad de N (ver [12]). Como $T_aQ = T_aN$, Q es una subvariedad abierta de N .

La unicidad sigue de (3.4) y (3.5). En efecto, si N_1 es otra subvariedad que satisface las condiciones, $\tilde{\nabla}$ induce conexiones completas en N y N_1 . Como $T_aN = T_aN_1$, usando argumentos canónicos podemos concluir que los conjuntos N y N_1 son iguales. De [12] resulta que N y N_1 coinciden como subvariedades. ∎

Veremos en (3.6) que si Q es una subvariedad de M localmente de tipo $*$, podemos considerar a Q (localmente) como un abierto de una subvariedad de tipo $*$ de un espacio k-simétrico simplemente conexo.

Sea $\hat{M}$ el cubrimiento universal de M y denotemos por π a la función de cubrimiento. Siendo M una variedad riemanniana analítica completa (ver [6]) resulta que $\hat{M}$, con la s-estructura y la métrica inducidas naturalmente, hereda las mismas propiedades; además π es una isometría local. Como consecuencia, las simetrías locales $\hat{s}_z$ naturalmente definidas en $\hat{M}$ pueden ser extendidas a simetrías globales, satisfaciendo $\pi\hat{s}_z = s_{\pi(z)}\pi$. Así, $(\hat{M},\{\hat{s}_z : z \in \hat{M}\})$ es un espacio k-simétrico. Si $\tilde{\nabla}$ denota también su conexión canónica, $\pi|_*$ preserva el tensor $D = \nabla - \tilde{\nabla}$ y por lo tanto π resulta $\tilde{\nabla}$-afín.

<u>*Proposición 3.6.*</u> *Sea Q una subvariedad de M localmente de tipo $*$ y sea N la subvariedad asociada a Q según (3.3). Entonces Q es localmente isométrica y afín (respecto de las conexiones canónicas) a una subvariedad $\hat{N}$ de $\hat{M}$, de tipo $*$, que satisface $\pi(\hat{N}) = N$.*

Demostración. Sea $q \in Q$, $z \in \pi^{-1}(q)$ y $W = (\pi|_{*z})^{-1}\, T_qQ$. Como en la demostración de (3.3), podemos encontrar una subvariedad $\hat{N}_z$ de $\hat{M}$, de tipo $*$, tal que $z \in \hat{N}_z$ y $T_z\hat{N}_z = W$. Sea $\hat{V}$ un entorno abierto de z en $\hat{M}$ tal que $\pi : \hat{V} \longrightarrow \pi(\hat{V}) = V$ sea un difeomorfismo. Sea U la componente conexa en Q de $V \cap Q$ con $q \in U$. Entonces U es abierta en Q y $\hat{U} = (\pi|_{\hat{V}})^{-1}U$, con la estructura diferencial llevada de U por $(\pi|_{\hat{V}})^{-1}$, es subvariedad de $\hat{M}$.

Veremos ahora que $\hat{U}$ es abierto en $\hat{N}_z$. Sea u en $\hat{U}$. Por (3.4) y (3.5) podemos encontrar $v \subset T_qQ$ tal que la $\tilde{\nabla}$-geodésica quebrada γ_v esté contenida en U y una $\pi(z)$ con $\pi(u)$. Así $\hat{\gamma} = (\pi|_{\hat{V}})^{-1}\gamma_v$ es la

$\tilde{\nabla}$-geodésica quebrada asociada a $\hat{v} = (\pi|_{*z})^{-1}v \subset T_z\hat{N}_z$ que une z con u . Siendo $\tilde{\nabla}$ una conexión completa en $\hat{N}_z$ resulta u en $\hat{N}_z$ o sea $\hat{U} \subset \hat{N}_z$. Por lo tanto podemos concluir que $\hat{U}$ es una subvariedad abierta de $\hat{N}_z$ (ver la demostración de (3.3)) y que $\pi : \hat{U} \longrightarrow U$ es una isometría y un difeomorfismo afín con respecto a las conexiones canónicas.

Ahora veremos que la subvariedad $\hat{N}_z$ es independiente del punto q en Q . Más precisamente, si q' está en Q mostraremos que existe z' en $\hat{N}_z$ tal que $\hat{N}_{z'} = \hat{N}_z$. Sea q' otro punto en Q . Si γ es una $\tilde{\nabla}$-geodésica quebrada en Q desde q a q' , su levantamiento con punto inicial z es una $\tilde{\nabla}$-geodésica quebrada en $\hat{M}$ y es fácil ver que γ está contenida en $\hat{N}_z$. Así, obtenemos z' en $\hat{N}_z$ tal que $\pi(z') = q'$. Sea $\hat{g}$ en $Tr(\hat{M})$ satisfaciendo $\hat{g}(z) = z'$ y g en $Tr(M)$ tal que $g\pi = \pi\hat{g}$. Luego $(g\pi\hat{g}^{-1})|_{*z'}T_{z'}\hat{N}_z = T_{q'}Q$, esto es, $\pi|_{*z'}T_{z'}\hat{N}_z = T_{q'}Q$ con lo cual fácilmente se concluye lo deseado.

Sea $\hat{N} = \hat{N}_z$. Como N y $\hat{N}$ son $\tilde{\nabla}$-autoparalelas, $\tilde{\nabla}$-completas y $\pi|_{*z}T_z\hat{N} = T_zN$, usando argumentos canónicos es fácil concluir que $\pi(\hat{N}) = N$. ■

Ahora probaremos el resultado más importante de ésta sección.

<u>*Teorema 3.7.*</u> *Sea* Q *una subvariedad de* M *localmente de tipo* $*$ *y sea* $\hat{N}$ *una subvariedad de* $\hat{M}$ *dada por (3.6). Entonces* Q *es localmente* $\tilde{\nabla}$*-reflexiva si y sólo si* $\hat{N}$ *es* $\tilde{\nabla}$*-reflexiva.*

Demostración. Condición suficiente: sea $(F(\rho,W))_x$ un entorno abierto de x en Q donde W es un entorno abierto de x en M y ρ es un automorfismo involutivo de W . Usando (3.6) podemos asumir que existe

z en $\hat{N}$ y un automorfismo involutivo $\hat{\rho}$ de un abierto $\hat{W}$ en $\hat{M}$ tal que $z \in \hat{W}$ y $A = (F(\hat{\rho},\hat{W}))_z$ es un entorno abierto de z en $\hat{N}$. Como $\hat{\rho}$ es $\tilde{\nabla}$-afín, $\hat{\rho}|_{*z}$ es un isomorfismo lineal sobre $T_z\hat{M}$ que preserva $\tilde{T}_z$ y $\tilde{R}_z$. Por el teorema de Cartan-Ambrose-Hicks existe un difeomorfismo $\tilde{\nabla}$-afín f en $\hat{M}$ tal que $f(z) = z$ y $f|_{*z} = \hat{\rho}|_{*z}$. Es inmediato verificar que f extiende a $\hat{\rho}$ y $f^2 = id$. Además, con los argumentos utilizados en la demostración de (2.2) se prueba que $f \in Aut(M)$.

Sea $F = (F(f,\hat{M}))_z$. Como A es abierto en F y $\hat{N}$, $T_zF = T_zA = = T_z\hat{N}$ (las estructuras diferenciales en A inducidas por F y $\hat{N}$ coinciden); además F es $\tilde{\nabla}$-autoparalela, entonces $F \subset \hat{N}$. Luego F es abierto en $\hat{N}$. Por ser F cerrado en $\hat{M}$ resulta F cerrado en $\hat{N}$ y en consecuencia $F = \hat{N}$ (como subvariedades de $\hat{M}$).

Para probar la condición necesaria, notemos que si $\hat{N}$ es una subvariedad de $\hat{M}$ $\tilde{\nabla}$-reflexiva, entonces $\hat{N}$ es una subvariedad regular de $\hat{M}$.

Para cada q en Q elegimos z en $\hat{N} = (F(\hat{\rho},\hat{M}))_z$ con $\pi(z) = q$ y consideramos los conjuntos $\hat{U}$ y $\hat{V}$ definidos en la prueba de (3.6). Es fácil ver que existe un abierto $\hat{B}$ en $\hat{M}$ tal que $\hat{B} \subset \hat{V}$, $\hat{\rho}(\hat{B}) = \hat{B}$ y $(F(\hat{\rho},\hat{B}))_z = \hat{U}$ y con esto concluir la demostración. ∎

§ 4. SUBVARIEDADES REFLEXIVAS Y $\tilde{\nabla}$-REFLEXIVAS.

En esta sección $\tilde{G}$ denotará la componente conexa de la identidad, de la clausura en $I(M)$ del grupo generado por $\{s_x : x \in M\}$. Para $\tilde{G}$ también vale (1.3), siendo dicha descomposición naturalmente reductiva en el caso 2-simétrico. Debido a que en [9], Leung caracteriza las subvariedades reflexivas de espacios 2-simétricos, es natural estudiar la relación entre las subvariedades reflexivas y las $\tilde{\nabla}$-reflexivas en espacios k-simétricos M para los cuales la descomposición para $\tilde{\mathfrak{g}}$ dada en (1.3) es naturalmente reductiva. Esto será nuestro próximo objetivo.

Sea $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{m}$ la descomposición reductiva de $M \simeq \tilde{G}/\tilde{K}$, $\tilde{K} = \tilde{G}_a$ ($\mathfrak{m}$ coincide con el subespacio $\mathfrak{m}$ de (1.3)).

Asumimos en esta sección que la descomposición anterior es naturalmente reductiva. Usaremos la identificación natural de $\mathfrak{m}$ con T_aM y mantendremos la notación de las secciones previas.

Recordemos que un espacio riemanniano homogéneo $M \simeq \tilde{G}/\tilde{K}$ es naturalmente reductivo con respecto a la descomposición $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{m}$ si $\mathfrak{m}$ es $Ad(\tilde{K})$-invariante y $<[X,Y]_{\mathfrak{m}},Z> + <Y,[X,Z]_{\mathfrak{m}}> = 0$ para $X,Y,Z \in \mathfrak{m}$, donde $<,>$ denota el producto interno en $\mathfrak{m}$ inducido por la métrica de M .

Denotemos por τ_X y $\tilde{\tau}_X$ a las ∇ y $\tilde{\nabla}$-traslaciones paralelas a lo largo de la geodésica $\gamma(t) = (\exp tX).a$, $X \in \mathfrak{m}$, desde el punto a al punto $\gamma(1)$ (exp denota la exponencial de grupo de Lie). Es conocido que en este caso (ver [1]), las ∇ y $\tilde{\nabla}$-geodésicas coinciden y $\tau_X Y = \exp X|_{*a} e^{-D(X,Y)}$, $D = \nabla - \tilde{\nabla}$, $\tilde{\tau}_X Y = \exp X|_{*a} Y$.

Como $\tilde{T}(X,Y) = 2D(Y,X)$ (ver [1]), si ϕ es un isomorfismo de $\mathfrak{m}$ que preserva $\tilde{T}_a$, entonces $\phi e^{-D(X,Y)} = e^{-D(\phi X,\phi Y)}$ y por lo tanto

(4.1) $\quad \tau_{\phi X}\phi\tau_X^{-1} = \tilde{\tau}_{\phi X}\phi\tilde{\tau}_X^{-1}$

<u>Proposición 4.2.</u> *Sea ρ un automorfismo involutivo de M . Si $N = (F(\rho,M))_a$ y ℓ es el complemento de $\mathfrak{n}$ en $\mathfrak{m}$ dado en el teorema (2.2), entonces*

i) *ρ es ∇-afín,*

ii) *si ℓ y $\mathfrak{n}$ son ortogonales, entonces ρ es una isometría (y por lo tanto, N es una subvariedad reflexiva).*

Demostración. i) resulta fácilmente usando que ρ es $\tilde{\nabla}$-afín y preserva D ($\rho|_*$ preserva $\tilde{T}$) .

Es claro que ρ es el difeomorfismo $\tilde{\nabla}$-afín dado por el teorema de Cartan-Ambrose-Hicks [13]. Como M es riemanniana homogénea para cada y en M existe Y en m tal que $\gamma_Y(t) = (\exp tY).a$ es una ∇-geodésica uniendo a con y . Usando (4.1) se prueba que $\rho|_{*y} =$ $= \tau_{\phi Y}\phi\tau_Y^{-1}$, con lo cual se concluye fácilmente (ii). ∎

Observación 4.3. Si $\tilde{g} = \tilde{k} \oplus m$ es una descomposición naturalmente reductiva de $M \simeq \tilde{G}/\tilde{K}$ con $\tilde{K} = \tilde{G}_a$ y $g \in \tilde{G}$, no es difícil verificar que $\tilde{g} = \tilde{k}_x \oplus m_x$ es una descomposición naturalmente reductiva de $\tilde{G}/\tilde{K}_x$ donde $\tilde{K}_x$ es la isotropía en $x = g(a)$ y $m_x = Ad(g)\, m$.

Como $\tilde{G} \subset I(M)$, $Ad(\rho)\, m_x \subset \mathcal{L}(I(M))$ para ρ en I(M) y x en M .

Proposición 4.4. *Sea* ρ *una isometría involutiva de* M *y* $N = (F(\rho,M))_a$. *Si* $Ad(\rho)\, m_x \subset m_{\rho(x)}$ *para cada* x *en* M , *entonces:*

i) ρ *es* $\tilde{\nabla}$*-afín,*

ii) *si* n *es un subespacio* $s_a|_{*a}$*-invariante de* m , *entonces* N *es* $\tilde{\nabla}$*-reflexiva.*

Demostración. Como ρ es ∇-afín, para probar (i) es suficiente mostrar que $\rho|_*$ preserva el tensor D . Sea x en M , X en m_x y $\gamma(t) =$ $= (\exp tX).x$. Entonces, $\beta(t) = \rho\gamma(t) = (\exp t\, Ad(\rho)X).\rho(x)$ pues β es la $\tilde{\nabla}$-geodésica con $\beta(0) = \rho(x)$ y $\dot{\beta}(0) = \rho|_{*x}X = Ad(\rho)X \in m_{\rho(x)}$. Si Y^* es el campo local obtenido de $Y \in m_x$ por $\tilde{\nabla}$-traslación paralela a lo largo de $\tilde{\nabla}$-geodésicas y $Y^*(t) = Y^*_{\gamma(t)}$, obtenemos que $\rho|_*Y^*(t) =$ $= (\exp t\, Ad(\rho)X)|_{*\rho(x)}\rho|_{*x}Y$. Como consecuencia, $\rho|_*Y^*(t)$ es el $\tilde{\nabla}$-trasladado paralelo de $\rho|_{*x}Y$ a lo largo de $\beta(t)$. Ahora podemos escribir $\tilde{\nabla}_X Y^* = 0 = \tilde{\nabla}_{\rho|_{*x}X}\, \rho|_* Y^*$. Así, $\rho|_{*x} D(X,Y) =$

$= \rho|_{*x}(\nabla_X Y^*) - \rho|_{*x}(\tilde{\nabla}_X Y^*) = \nabla_{\rho|_{*x}X}\, \rho|_* Y^* =$

$= \tilde{\nabla}_{\rho|_{*x}X}\, \rho|_* Y^* + D(\rho|_{*x}X \, , \, \rho|_{*x}Y^*) = D(\rho|_{*x}X \, , \, \rho|_{*x}Y)$.

Para probar (ii), mostraremos que $\rho s_x = s_{\rho(x)}\rho$ para x en M . Si ℓ es el complemento ortogonal de n en m , ℓ es $s_a|_{*a}$-invariante y así

(4.5) $\rho|_{*a}\, s_a|_{*a} = s_a|_{*a}\, \rho|_{*a}$.

Usando que ρ es una isometría y (4.1), podemos escribir $\rho|_{*x} =$ $= \tau_{\rho|_{*a}X}\, \rho|_{*a}\, \tau_X^{-1} = \tilde{\tau}_{\rho|_{*a}X}\, \rho|_{*a}\, \tilde{\tau}_X^{-1}$ donde $X = \dot{\gamma}(0) \in m$ y γ es una geodésica uniendo a con x . De (4.5) y $\tilde{\nabla}S = 0$ obtenemos que $(\rho\, s_x)|_{*x} = (s_{\rho(x)}\rho)|_{*x}$. ∎

REFERENCIAS.

[1] I. Chavel. Riemannian symmetric space of rank one. Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol 5, 1972. M. Dekker. New York.

[2] S. Helgason. Differencial geometry and symmetric spaces. Academic Press, 1962.

[3] J. Jiménez. Riemannian 4-symmetric spaces. Trans. Amer. Math. Soc. Vol 306, N° 2, abril 1988

[4] J. Jiménez. Existence of hermitian n-symmetric spaces and of non-commutative naturally reductive spaces. Math. Zeitschrift 196, 1987.

[5] J. Jiménez. Addendum to "existence of hermitian n-symmetric spaces and of non-commutative naturally reductive spaces". Math. Zeitschrift 197, 1988.

[6] O. Kowalski. Generalized symmetric spaces. Lectures Notes in

Mathematics 805, 1980. Springer-Verlag.

[7] S. Kobayashi - K. Nomizu. Foundations of differencial geometry. Vol I, 1963, Vol II, 1969. Interscience Publishers.

[8] D. Leung. The reflection principle for minimal submanifolds on riemannian symmetric spaces. J. Diff. Geometry, Vol 8, N° 1, 1973.

[9] D. Leung. On the classification of reflective submanifolds of riemannian symmetric spaces. Indiana Univ. Math. Journal, Vol 24, N° 4, 1974.

[10] D. Leung. Reflective submanifolds III. J. Diff. Geometry, Vol 14, 1979.

[11] D. Leung. Reflective submanifolds IV. J. Diff. Geometry, Vol 14, N° 12, 1979.

[12] F. Warner. Foundations of differentiable manifolds and Lie group. Springer-Verlag.

[13] J. Wolf. Spaces of constant curvature. Publish or Perish, Berkeley

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
Valparaíso y Rogelio Martínez
5000 Córdoba - ARGENTINA

Recibido en marzo de 1992.