REVISTA DE LA
UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA
Volumen 47, Número 2, 2006, Páginas 67–75

HIPERVARIEDADES MÍNIMAS ALGEBRAICAS EN S^n

OSCAR MARIO PERDOMO AND HÉBER MESA P.

Resumen. En este artículo se discutirá la existencia de hipervariedades compactas mínimas en la esfera n-dimensional S^n que se pueden escribir como la hipersuperficie de nivel de un polinomio homogéneo de grado k. Es decir estamos interesados en hipervariedades mínimas de la forma $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1, p(x) = 0\}$ para algún polinomio homogéneo irreducible $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

Introducción y preliminares

Sea M una variedad $n-1$ dimensional compacta y sin frontera, orientable, y $\phi : M \to S^n$ una inmersión. Para todo $p \in M$ existe una vecindad $U \subseteq M$ que contiene a p tal que $\phi(U) \subset S^n$ es difeomorfa a U. Identificaremos p con $\phi(p)$, U con $\phi(U)$ y cada vector $v \in T_pM$ con $d\phi_p(v) \in T_{\phi(p)}S^n$. Denotaremos por $\nu : M \to S^n$ una aplicación de Gauss sobre M, es decir, ν satisface que $\langle \nu(p), \nu(p)\rangle = 1$, $\langle \nu(p), p\rangle = 0$ y $\langle \nu(p), v\rangle = 0$ para todo $v \in T_pM$. Así, para todo $p \in M$ se tiene que $T_pS^n = T_pM \oplus \mathrm{gen}\{\nu(p)\}$. Es posible demostrar que para esta aplicación se tiene que $d\nu_p(v) \in T_pM$ para todo vector $v \in T_pM$. Definimos el operador de forma $A_p : T_pM \to T_pM$ como $A_p(v) = -d\nu_p(v)$. No es difícil demostrar que A_p es una aplicación lineal autoadjunta, esto es $\langle A_p(v), w\rangle = \langle v, A_p(w)\rangle$ para todo par de vectores $v, w \in T_pM$; esto garantiza la existencia de $n-1$ vectores $e_1, \dots, e_{n-1} \in T_pM$ ortogonales y $n-1$ números reales $\kappa_1(p), \dots, \kappa_{n-1}(p)$ tales que $A_p(e_i) = \kappa_i(p)e_i$ para $i = 1, \dots, n-1$. Estos valores propios de A_p son conocidos como curvaturas principales de M en p. La curvatura media $H : M \to \mathbb{R}$ se define en cada punto como el promedio de las curvaturas principales, esto es $H(p) = \frac{1}{n-1}(\kappa_1(p) + \cdots + \kappa_{n-1}(p))$. M es llamada *mínima* si la curvatura media es idénticamente cero y es llamada *totalmente geodésica* si las curvaturas principales en cada punto de M son cero. Diremos que una hipervariedad M en S^n es *algebraica* si existe un polinomio homogéneo irreducible $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(M) = f^{-1}(0) \cap S^n$. Si el grado de f es k diremos que M es algebraica de grado k. En el caso en que $|\nabla f(p)| \neq 0$ para todo $p \in M$ podemos definir una aplicación de Gauss ν en cada punto p como $\nu(p) = \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$, y ya que M es la preimagen de un valor regular de una función diferenciable, entonces M se encuentra encajada en S^n.

A la hora de buscar ejemplos de hipervariedades en S^n que sean mínimas y algebraicas podemos ver el problema desde dos perspectivas diferentes, considerar el conjunto de polinomios homogéneos y determinar cuáles de ellos reproducen variedades mínimas, o determinar cuáles de los ejemplos conocidos de variedades mínimas en S^n pueden ser modelados por algún polinomio homogéneo.

1. Ejemplos conocidos

A continuación mostraremos algunos ejemplos conocidos de hipervariedades mínimas $M \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que se pueden escribir como la preimagen de cero de algún polinomio homogéneo irreducible.

1.1. **Ecuadores.** Uno de los ejemplos más sencillos son los ecuadores, los cuales son de la forma $S^{n-1}(v) = \{x \in S^n \mid \langle x, v\rangle = 0\}$ donde $v \in S^n$. En este caso la aplicación de Gauss se puede definir por $\nu(p) = v$, dado que ν es constante, entonces $d\nu_p$ es idénticamente cero, igualmente el operador de forma. Claramente las curvaturas principales son cero en cada punto, y así, $S^{n-1}(v)$ es totalmente geodésica y por tanto mínima. Si consideramos el polinomio homogéneo $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definido por $p(x) = \langle x, v\rangle$, entonces $S^{n-1}(v) = p^{-1}(0) \cap S^n$, lo que nos indica que $S^{n-1}(v)$ es algebraica. Esto prueba que los ecuadores son algebraicos de grado 1. Recíprocamente es fácil verificar que si $M = p^{-1}(0) \cap S^n$, donde p es un polinomio homogéneo de grado 1, entonces M es un ecuador. Luego estos son los únicos ejemplos de hipervariedades mínimas algebraicas de grado 1.

1.2. **Variedades de Clifford.** Sean k, l enteros tales que $k + l = n - 1$ con $1 \leq k, l \leq n - 1$, definimos $M_{k,l} = \{x \in S^n \mid l(x_1^2 + \cdots + x_{k+1}^2) - k(x_{k+2}^2 + \cdots + x_{n+1}^2) = 0\}$. No es difícil ver que $M_{k,l} = S^k\left(\sqrt{\frac{k}{n-1}}\right) \times S^l\left(\sqrt{\frac{l}{n-1}}\right)$, donde $S^m(r)$ es la esfera m-dimensional en $\mathbb{R}^{m+1}$ con centro en el origen y radio r. Se puede demostrar que las curvaturas principales son constantes y están dadas por $\kappa_1 = \cdots = \kappa_k = \sqrt{\frac{l}{k}}$ y $\kappa_{k+1} = \cdots = \kappa_{n-1} = -\sqrt{\frac{k}{l}}$. Fácilmente se comprueba que $M_{k,l}$ es mínima. Diremos que una hipervariedad $M \subset S^n$ es Clifford si se puede obtener por un movimiento rígido de $M_{k,l}$. Note que $M_{k,l}$ también es algebraica pues $M_{k,l} = p^{-1}(0) \cap S^n$, donde $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ es el polinomio homogéneo $p(x) = l(x_1^2 + \cdots + x_{k+1}^2) - k(x_{k+2}^2 + \cdots + x_{n+1}^2)$.

En el caso en que $k = l = 1$ tenemos la superficie mínima algebraica $M_{1,1}$ en S^3; esta superficie es llamada toro de Clifford y va a ser de gran importancia ya que aparece en otras familias de superficies mínimas algebraicas en S^3.

1.3. **Variedades isoparamétricas.** Una hipervariedad es llamada *isoparamétrica* si sus curvaturas principales son constantes, es decir, no dependen del punto en la variedad donde se determinan. Como hemos visto en los ejemplos anteriores, los ecuadores y las hipervariedades de Clifford son ejemplos de hipervariedades isoparamétricas en S^n. Un teorema importante en el estudio de estas hipervariedades afirma que solo existen como máximo dos posibilidades para las multiplicidades de las curvaturas principales, las cuales se denotan m_1 y m_2 [7]. En 1980 Munzner demostró que toda hipervariedad isoparamétrica con g curvaturas principales distintas es algebraica de grado g. Más aún, él probó que un polinomio homogéneo p de grado g determina una hipervariedad isoparamétrica, si y solo si p satisface las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \Delta p &= \tfrac{g^2(m_2-m_1)}{2}|x|^{g-2} \\ |Dp|^2 &= g^2|x|^{2g-2} \end{aligned} \tag{1}$$

Un año más tarde, Munzner determinó los posibles valores de g para los cuales existen hipervariedades isoparamétricas, específicamente demostró que el grado de un polinomio que es solución de (1) solo puede ser $1, 2, 3, 4$, ó 6.

Todo polinomio homogéneo p solución de (1) tiene la propiedad de que para todo $-1 < t < 1$ la hipervariedad $M_t = p^{-1}(t) \cap S^n$ es suave e isoparamétrica, además la curvatura media de M_t varía de forma monótona entre $-\infty$ y $+\infty$ cuando t varía entre -1 y 1; luego existe un t_0 tal que la curvatura media de M_{t_0} es cero, es decir M_{t_0} es mínima. Se sabe que para $g = 1, 2, 3$ estas hipervariedades mínimas e isoparamétricas están caracterizadas: para $g = 1$ son los ecuadores y para $g = 2$ las variedades de Clifford; para $g = 4, 6$ hay algunos ejemplos pero no se han caracterizado.

1.4. **Ejemplos no encajados.** En [1] Lawson demuestra que para el polinomio homogéneo $p_{k,m}(x) = Im(z^k\overline{w}^m)$ se tiene que $p^{-1}(0) \cap S^3$ es mínima, donde $z = x_1 + ix_2$ y $w = x_3 + ix_4$. Note que estos ejemplos muestran la existencia de superficies mínimas algebraicas de cualquier grado en S^3. Para el caso en que $k = 1$ y $m = 1$ se tiene que $p_{1,1}$ determina el toro de Clifford; se puede verificar que este es el único ejemplo de esta familia que está encajado.

2. Los ejemplos de Lawson

Ejemplos de hipervariedades mínimas en S^n son escasos. En 1970, Lawson construyó una gran familia de superficies mínimas y compactas en S^3, [1]. Estos ejemplos mostraron que toda superficie compacta, excepto el espacio proyectivo, se puede inmersar en S^3 de manera mínima. Más aún, toda superficie compacta y orientable se puede encajar en S^3. Lawson dividió esta gran familia de superficies en varias subfamilias. En esta sección describiremos una de estas familias y abordaremos la pregunta sobre si estas superficies son o no algebraicas.

2.1. **Superficies $\xi_{m,k}$.** Consideremos las circunferencias $C_1 = \{(x \in S^3 \mid x_1 = x_2 = 0\}$ y $C_2 = \{x \in S^3 \mid x_3 = x_4 = 0\}$. Para cada par de enteros no negativos m y k tomemos puntos $P_1, P_2 \in C_1$ y $Q_1, Q_2 \in C_2$ tales que la distancia en S^3 entre P_1 y P_2 sea $\frac{\pi}{m+1}$ y la distancia en S^3 entre Q_1 y Q_2 sea $\frac{\pi}{k+1}$. Construyamos el polígono $P_1Q_1P_2Q_2$ tal que sus lados sean segmentos de geodésica y dos vértices son unidos a través del segmento de geodésica más corto entre ellos. Denotaremos a este polígono geodésico $\Gamma_{m,k}$. Consideraremos $\mathfrak{M}_{\Gamma_{m,k}}$ la superficie en S^3 solución al problema de Plateau asociada a esta curva cerrada, entonces $\mathfrak{M}_{\Gamma_{m,k}}$ es mínima y $\partial(\mathfrak{M}_{\Gamma_{m,k}}) = \Gamma_{m,k}$. La geodésica que pasa por P_1 y Q_1 la notaremos γ_1, la que pasa por Q_1 y P_2 la notaremos γ_2, y análogamente denotamos γ_3 y γ_4. Note que toda geodésica en S^3, cuando es vista como un subconjunto de $\mathbb{R}^4$, está contenida en un plano 2 dimensional que pasa por el origen. Es fácil verificar que $\gamma_1 \subset \text{gen}\{P_1, Q_1\}$, $\gamma_2 \subset \text{gen}\{P_2, Q_1\}$, $\gamma_3 \subset \text{gen}\{P_2, Q_2\}$ y $\gamma_4 \subset \text{gen}\{P_1, Q_2\}$. A cada geodésica γ_i asociaremos una isometría $r_{\gamma_i} : S^3 \to S^3$ que consiste en una reflexión sobre el plano donde la geodésica γ_i se encuentra. La primera simetría r_{γ_1} se determina como sigue $r_{\gamma_1}(x) = 2(\langle x, P_1\rangle P_1 + \langle x, Q_1\rangle Q_1) - x$; las demás se definen de manera análoga. Denotaremos $G_{\Gamma_{m,k}}$ el grupo generado por las simetrías asociadas a cada geodésica, esto es $G_{\Gamma_{m,k}} = \langle r_{\gamma_1}, r_{\gamma_2}, r_{\gamma_3}, r_{\gamma_4}\rangle$. Sea $\xi_{m,k} = \bigcup_{g\in G_{\Gamma_{m,k}}} g(\mathfrak{M}_{\Gamma_{m,k}}) \subset S^3$; se demuestra que esta es una superficie mínima, orientable, compacta y sin frontera de género mk. Acerca de la algebraicidad de estas superficies, se tiene que $\xi_{1,1,}$ es el toro de Clifford y por tanto una superficie algebraica. Lawson en [1] conjetura que $\xi_{2,2}$ no es algebraica, la conjetura aún sigue abierta. Nosotros demostramos que si $\xi_{2,2}$ es algebraica, entonces su grado debe ser impar mayor o igual a 5.

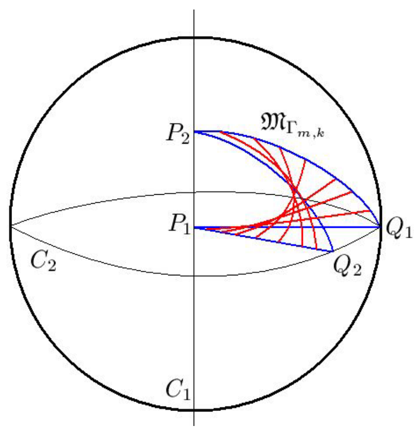

Figura 1. Región fundamental

3. Condición y conjetura

Para cada polinomio $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ de grado k definimos $\operatorname{Expr}(p) = |\nabla p|^2 \Delta p - \frac{1}{2}\left\langle \nabla |\nabla p|^2, \nabla p\right\rangle$. Note que $\operatorname{Expr}(p)$ es un polinomio homogéneo de grado $3k-4$. Es conocido que si M es algebraica y mínima, entonces el polinomio irreducible p que determina a M satisface que $\operatorname{Expr}(p)$ se anula en M, [1]. Polinomios que satisfacen esta propiedad serán llamados polinomios que satisfacen la condición de minimalidad. En general no es cierto que todo polinomio que satisface la condición de minimalidad determina una hipersuperficie mínima. Por ejemplo, el polinomio $p : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ definido por $p(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ satisface la condición de minimalidad, pero el conjunto $p^{-1}(0)$ no es la imagen de una inmersión ya que $p^{-1}(0)$ tiene una singularidad en $\pm(0,0,0,0,1)$.

Note que el problema de hallar estos polinomios no es algebraico ni de ecuaciones diferenciales parciales, por que se requiere que $\operatorname{Expr}(p)$ se anule en el conjunto $p^{-1}(0)$ donde p es desconocido.

En el caso en que p divida a $\operatorname{Expr}(p)$, es decir, si $p \mid \operatorname{Expr}(p)$, claramente se tiene que p satisface la condición de minimalidad, pero no sabemos si es cierto que si esta condición se cumple entonces $\mathrm{Expr}(p)$ deba ser un múltiplo de p. Observamos que si en lugar de estar trabajando con polinomios sobre los reales, estuviésemos trabajando con polinomios sobre los complejos, entonces *el teorema de los ceros de Hilbert* garantizaría que el polinomio p debería dividir al polinomio $\mathrm{Expr}(p)$. Es decir, si se tuviese un teorema de los ceros de Hilbert para polinomios sobre los reales, entonces, el problema de hallar hipervariedades mínimas en S^n sería un problema algebraico, un problema que se reduce a resolver un sistema de ecuaciones. Algunos ejemplos sencillos de polinomios p y q de variable real, donde q se anula en todos los puntos donde se anula p, pero q no es un múltiplo de p, ocurren porque p tiene "pocos ceros reales" en el sentido de que el conjunto $p^{-1}(0)$ está contenido en una variedad de dimensión menor que n y no determina una subvariedad n-dimensional, como ocurre en general.

Por esta razón esperamos que si exigimos al polinomio p anularse en una variedad n-dimensional entonces se tenga una versión del teorema de los ceros de Hilbert en $\mathbb{R}^{n+1}$. Propondremos la siguiente conjetura:

Conjetura: Si $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ es un polinomio homogéneo tal que $p^{-1}(0)$ es una hipervariedad mínima, entonces $p \mid \mathrm{Expr}(p)$.

En el caso en que el grado de p sea uno o dos, dado que se conocen las hipervariedades mínimas en cada caso, se puede demostrar que la conjetura es cierta. Más aún, los polinomios que determinan hipervariedades isoparamétricas de grado 3 satisfacen la conjetura. Esto se demuestra usando la ecuación (1) de la sección 1.3 y el hecho de que en este caso $m_1 = m_2$, [7].

Si la conjetura fuese probada, el problema de determinar hipervariedades mínimas en S^n se convertiría en un problema algebraico. Si denotamos por $\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{n+1})$ al espacio de polinomios homogéneos de grado k en $\mathbb{R}^{n+1}$, podemos considerar la función $\psi : \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{n+1}) \times \mathcal{P}^{2k-4}(\mathbb{R}^{n+1}) \to \mathcal{P}^{3k-4}(\mathbb{R}^{n+1})$ definida por $\psi(p,q) = \mathrm{Expr}(p) - pq$, y entonces estaríamos interesados en encontrar los ceros (p,q) de este operador con p irreducible, ya que éstos determinarían los posibles ejemplos de hipervariedades mínimas algebraicas.

4. Resultados e ideas de la demostración

En esta sección se discutirán algunos resultados parciales obtenidos. Como se puede apreciar después de pensar un poco en el problema de encontrar polinomios que satisfacen la condición de minimalidad, la dificultad de este problema aumenta a medida que el grado del polinomio y la dimensión de la esfera aumentan. El primer caso interesante es el caso de los polinomios de grado 3 en $\mathbb{R}^4$, es decir, superficies algebraicas en S^3. Este caso lo resolvimos completamente, y demostramos que no existen superficies algebraicas de grado 3 que estén encajadas; luego demostramos que la únicas que están inmersas son los ejemplos de Lawson de grado 3 discutidos en la sección 1.4. Desde el punto de vista algebraico se ha demostrado que los únicos polinomios irreducibles en el espacio 20 dimensional de polinomios homogéneos de grado 3 en $\mathbb{R}^4$ que satisfacen la condición de minimalidad son los obtenidos por el polinomio $p(x) = Im(z^2\overline{w})$, donde $z = x_1 + ix_2$ y $w = x_3 + ix_4$, salvo un cambio ortogonal de coordenadas. El siguiente caso en orden de dificultad es el de polinomios de grado 4 en $\mathbb{R}^4$. La dificultad en este caso aumenta considerablemente ya que la dimensión del espacio de polinomios homogéneos en $\mathbb{R}^4$ cambia de 20 a 35 cuando el grado de los polinomios cambia de 3 a 4. En general, la dimensión del espacio $\mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{n+1})$ es $\binom{n+k}{k}$. Nosotros consideramos el caso de los polinomios de grado 4 en $\mathbb{R}^4$ y demostramos que ninguno de estos polinomios determinaba una de las superficies $\xi_{m,k}$, es decir, demostramos que ninguna superficie de esta familia de ejemplos de Lawson es analítica de grado 4.

Una observación importante en este estudio de hipervariedades algebraicas es que todas ellas tienen simetría antipodal, esto se debe a que si $x \in p^{-1}(0)$ entonces $-x \in p^{-1}(0)$. Concentrándonos por un momento en superficies algebraicas regulares M en S^3, es decir, superficies tales que $|\nabla p(x)| \neq 0$ para todo $x \in p^{-1}(0) = M$, podemos notar que M es una superficie encajada en S^3 y por lo tanto orientable. Si identificamos cada punto con su antipodal en M obtenemos una superficie $\widetilde{M}$ compacta y encajada en $\mathbb{R}P^3$, donde para cada $x \in M$ se tiene que $[x] = \{x, -x\} \in \widetilde{M}$. Acerca de superficies encajadas en $\mathbb{R}P^3$ se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1 [6]. *Sea $\widetilde{M}$ una superficie no orientable y compacta. $\widetilde{M}$ se puede encajar en $\mathbb{R}P^3$ si y sólo si la característica de Euler de $\widetilde{M}$ es impar.*

Resolvamos ahora la pregunta ¿cuándo la superficie $\widetilde{M}$ es orientable? Note que $T_{[x]}\mathbb{R}P^3 = T_xS^2 \coprod T_{-x}S^2/\sim$, donde identificamos cada vector $v \in T_xS^2$ con $-v \in T_{-x}S^2$ y $\coprod$ representa la operación unión disjunta de conjuntos. Dado que $\mathbb{R}P^3$ es orientable, entonces $\widetilde{M}$ es orientable si y sólo si existe un campo vectorial normal $\widetilde{\nu} : \widetilde{M} \to T\mathbb{R}P^3$. Si el grado del polinomio p que determina a M es par, entonces $\nabla p(x)$ es impar y $\widetilde{\nu}([x]) = \left[\frac{\nabla p(x)}{|\nabla p(x)|}\right]$ está bien definido y por tanto $\widetilde{M}$ es orientable. Análogamente si el grado de p es impar, entonces $\widetilde{M}$ no es orientable. Note que usando el teorema anterior y el hecho de que la característica de Euler de toda superficie compacta sin frontera y orientable es par, se demuestra que la característica de Euler de $\widetilde{M}$ es impar si y sólo si el grado de p es impar.

A continuación enunciaremos los resultados obtenidos por los autores en esta línea. Aunque no presentaremos las demostraciones correspondientes, daremos algunos puntos claves de su desarrollo.

Teniendo en cuenta que $\chi(M) = 2\chi(\widetilde{M})$, entonces del Teorema 1 y las observaciones hechas acerca de la orientabilidad de $\widetilde{M}$, deducimos información sobre la superficie M en términos de su característica de Euler según la paridad del grado del polinomio homogéneo p que la determina.

Resultado 1 [3]. *Sea $M \subset S^3$ una superficie algebraica regular. M es de grado par si y sólo si la característica de Euler de $\widetilde{M}$ es par.*

La demostración se obtiene directamente del Teorema 1 y de las observaciones hechas arriba.

Resultado 2 [4]. *No existen superficies mínimas algebraicas encajadas de grado tres en S^3.*

La demostración de este resultado consiste en considerar un polinomio general p de grado 3 en $\mathbb{R}^4$ y suponer que este satisface la condición de minimalidad. Luego, sin pérdida de generalidad, se hacen algunas consideraciones sobre el polinomio, correspondientes al hecho de suponer que el punto $(0,0,0,1)$ es un punto de la variedad, y que el espacio tangente en $(0,0,0,1)$ es el espacio $\{(x,y,0,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$. Estas consideraciones brindan algunas ecuaciones sobre los coeficientes de p, en particular algunos de estos coeficientes se anulan, disminuyendo el número de variables a considerar. Una vez hecha esta reducción se determinan algunas soluciones de la ecuación $p(x) = 0$ en términos de sus coeficientes, un problema difícil, pues el polinomio es general; en realidad estamos encontrando puntos sobre la superficie $p^{-1}(0)$. Estas soluciones también satisfacen la ecuación $\mathrm{Expr}(p)(x) = 0$ dada la condición de minimalidad, y esto nos brinda nuevas ecuaciones sobre los coeficientes de p. Ahora se desea encontrar suficientes ecuaciones sobre estos coeficientes como para determinar el polinomio p ó llegar a una contradicción con la existencia de dicho polinomio. Un paso clave en la demostración de este teorema fue utilizar el hecho de que la superficie no puede ser topológicamente un toro por el Teorema 1, y por lo tanto, las curvaturas principales deben anularse en algún punto [1].

Resultado 3 [5]. *Salvo un cambio de coordenadas, la única superficie mínima e inmersa en S^3 que es algebraica de orden 3, es la dada por el polinomio $p_{1,2}$ de la sección 1.4.*

La demostración de este teorema es análoga a la anterior pero algunas ecuaciones sobre los coeficientes del polinomio p que determina la superficie mínima se hacen usando los siguientes dos lemas:

Lema 1 [5]. *Si M esta inmersa de manera mínima en S^3 y para algún subespacio tres dimensional $V \subset \mathbb{R}^4$ se tiene que $M \cap V$ es una circunferencia de radio 1, entonces M debe ser un ecuador.*

Lema 2 [5]. *Todo polinomio de grado 3 en $\mathbb{R}^4$ que satisface la condición de minimalidad debe anularse en un subespacio dos dimensional.*

Resultado 4 [3]. *Ninguno de los ejemplos de Lawson $\xi_{m,k}$ con suma de índices impar es algebraico. Aún más, no tienen simetría antipodal.*

Para la demostración de este teorema se realizó una división de la esfera S^3 en subconjuntos que denominamos cuadrantes generalizados, y determinamos cuáles de estos cuadrantes eran ocupados por la superficie $\xi_{m,k}$ estudiando la acción del grupo $G_{\Gamma_{m,k}}$ sobre esta familia de cuadrantes. Demostramos que en el caso en que $m+k$ es impar, la superficie ocupaba un cuadrante, pero no el cuadrante antipodal, concluyendo así que la superficie no puede tener simetría antipodal.

Resultado 5 [3]. *Si $\xi_{m,k}$ es una superficie algebraica regular, entonces $\xi_{m,k}$ es de grado impar si y solo si mk es par. En particular ninguno de los ejemplos de Lawson $\xi_{k,m}$ con mk par, es algebraico de grado par.*

En el caso de que la superficie $\xi_{m,k}$ sea algebraica de grado par se concluye por el Resultado 1 que la superficie $\widetilde{\xi}_{m,k}$ tiene característica de Euler par. Dado que la característica de Euler de $\xi_{m,k}$ es $2-2mk$, entonces $\widetilde{\xi}_{m,k}$ tiene característica de Euler $1-mk$, y por lo tanto mk es impar. Análogamente el resultado se tiene cuando suponemos que $\xi_{m,k}$ es de grado impar.

Resultado 6 [3]. *Si la superficie $\xi_{m,k}$ es algebraica de grado n, entonces $n > \text{máx}\{m,k\}$.*

Note que si un polinomio en $\mathbb{R}$ tiene muchas raíces, entonces su grado debe ser al menos igual al número de raíces; para la demostración de este resultado razonamos de manera análoga. Suponemos que existe un polinomio p de grado n tal que $\xi_{m,k} = p^{-1}(0) \cap S^n$ y demostramos que este polinomio se anula en un conjunto de planos, lo que permite una escritura del polinomio p que da la condición buscada sobre el grado de p. Esto se deriva del siguiente lema:

Lema 3 [3]. *Sean $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_m \in S^{n-1}$ tales que para todo $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$ se tiene $\langle u_i, v_j \rangle = 0$ y para $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$ cada par de vectores u_{i_1}, u_{i_2} y v_{j_1}, v_{j_2} son linealmente independientes. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un polinomio que se anula en los conjuntos $W_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^n : l_{u_i}(x) = 0 \text{ y } l_{v_j}(x) = 0\}$, entonces existen polinomios $p, q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = \left(\prod_{i=1}^{k} l_{u_i}(x)\right) p(x) + \left(\prod_{j=1}^{m} l_{v_j}(x)\right) q(x)$, donde $l_u(x) = \langle u, x \rangle$.*

Resultado 7 [3]. *Ninguno de los ejemplos de Lawson $\xi_{m,k}$ es algebraico de grado cuatro.*

La demostración de este teorema se obtiene aplicando algunos de los resultados anteriores y usando algunas ideas de la demostración del Resultado 2. Note que el Resultado 6 implica que las únicas posibles superficies algebraicas de grado 4 son $\xi_{1,1}$, $\xi_{1,2}$, $\xi_{1,3}$, $\xi_{2,2}$, $\xi_{2,3}$, $\xi_{3,3}$. El Resultado 5 garantiza que $\xi_{1,2}$, $\xi_{2,2}$, $\xi_{2,3}$ no lo son y $\xi_{1,1}$ es el toro de Clifford. Para demostrar que $\xi_{1,3}$ y $\xi_{3,3}$ tampoco son algebraicas de grado 4, se supone la existencia de un polinomio homogéneo p tal que satisface la condición de minimalidad y $\xi_{m,k} = p^{-1}(0) \cap S^n$. Dado que se conocen algunos puntos de la superficie podemos encontrar ecuaciones para los coeficientes de p usando la ecuación $\text{Expr}(p)(x) = 0$ y así se llega a una contradicción.

Referencias

[1] Lawson, H. *Complete minimal surfaces in S^3*. Ann. of Math. (2) 92 1970 335–374.

[2] Munzner, H. *Isoparametrische Hyperflachen in Spharen (geometrischer Teil)*, Math. Ann. **251**, (1980) pp 57–71.

[3] Mesa, H. *Superficies mínimas algebraicas de grado cuatro en* S^3. Tesis de Maestría, Universidad del Valle, 2005.

[4] Perdomo, O. *Non-existence of regular algebraic surfaces of spheres of degree 3.* Aceptado para publicación en The Journal of Geometry.

[5] Perdomo, O. *Characterization of minimal algebraic surfaces of the sphere with degree 3.* En preparación.

[6] Perdomo, O. *nonembeddability of the Klein bottle in* RP^3 *and Lawson's conjecture.* Rev. Acad. Colombiana Cienc. Exact. Fís. Natur. **29** (2005), no. 110, 149–154.

[7] Solomon, B. *The harmonic analisys of cubic isoparametric minimal hypersurfaces I: dimensions* 3 *and* 6. Amer. J. Math. 112 (1990), no. 2, 157–203

Oscar Mario Perdomo
Universidad del Valle,
Cali - Colombia
iosperdom@univalle.edu.co

Héber Mesa P.
Universidad del Valle,
Cali - Colombia
hebermes@univalle.edu.co

Recibido: 26 de enero de 2006
Aceptado: 7 de agosto de 2006