



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

TESIS DOCTOR EN MATEMATICA

**SOBRE UN PROBLEMA DE CLASIFICACION Y
COHOMOLOGIA DE HOCHSCHILD DE EXTENSIONES LOCALES**

Sandra Michelena

BAHIA BLANCA

ARGENTINA

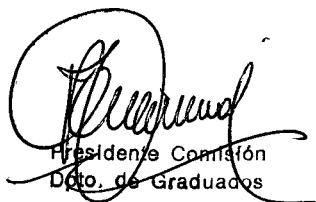
1998

PREFACIO

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática y en el Instituto de Matemática (INMABB) durante el período comprendido entre el 16 de mayo de 1996 y el 26 de junio de 1998, bajo la dirección de la Dra. María Inés Platzcek, Profesor Titular del Departamento de Matemática.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Departamento de Graduados

La defensa oral de la presente tesis
ha sido aprobada el 20/8 98, mereciendo
la calificación de Sobresaliente - 10 (diez)



Presidente Comisión
Dpto. de Graduados

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que colaboraron y sin cuyo apoyo este trabajo no hubiese sido posible.

En primer lugar, a la persona que le debo gran parte de mi formación profesional, mi directora de tesis Dra. María Inés Platzeck, por su dedicación incondicional y apoyo en todo momento.

A Alejandro quien compartió día a día mis alegrías y sinsabores. Gracias por tu paciencia y comprensión.

A mi familia y amigos que respetaron mi intensa dedicación muchas veces incomprensible para ellos.

A Susana Gastaminza y María Julia Redondo por su minuciosa lectura de este trabajo y sugerencias.

Finalmente agradezco al CONICET por su apoyo económico mediante el otorgamiento de la Beca de Iniciación y Perfeccionamiento que hizo factible la realización de este trabajo.

RESUMEN

En este trabajo K denota a un cuerpo algebraicamente cerrado y todas las álgebras son álgebras finitamente generadas como espacio vectorial sobre K .

El trabajo está dividido en dos capítulos. En el primer capítulo se estudian álgebras Λ con la siguiente propiedad

(IIP) Todos sus ideales (biláteros) idempotentes son Λ - módulos a izquierda proyectivos.

Se obtiene una clasificación completa de las álgebras con esta propiedad y de tipo de representación finito. La misma está dada por una lista de diagramas con relaciones.

El segundo capítulo está dedicado al estudio de la cohomología de Hochschild de extensiones locales.

Para dos K - álgebras R y A con R un anillo local, y un $A - R$ - bimódulo finitamente generado M , se llama extensión local de A por M al anillo de matrices triangulares $\begin{pmatrix} R & 0 \\ M & A \end{pmatrix}$.

Probamos la existencia de una sucesión exacta larga de K - espacios vectoriales que conecta la cohomología de Hochschild de A , la de B y los grupos $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e)$ donde $P_e = B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, generalizando un importante resultado demostrado por D. Happel para extensiones por un punto, es decir, extensiones locales de la forma $\begin{pmatrix} K & 0 \\ M & A \end{pmatrix}$.

Dado que en general el cálculo de los grupos $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e)$ no es sencillo, probamos también la existencia de otra sucesión exacta larga de K - espacios vectoriales que conecta la cohomología de Hochschild del anillo local R , la de A y los grupos $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e)$.

Finalmente, mostramos la utilidad de estas sucesiones en diversas situaciones.

INDICE

<i>Introducción</i>	<i>i</i>
Capítulo I Algebras de artin con todos sus ideales idempotentes proyectivos de tipo de representación finito	1
1 Relaciones en las álgebras con todos sus ideales idempotentes proyectivos	7
2 Grupo fundamental de un grafo. Cubrimiento topológico universal de un grafo orientado	20
3 Funtores de cubrimiento Galois. Cubrimiento Galois universal de una K - categoría localmente acotada	26
4 Algebras con la propiedad (IIP) de tipo de representación finito	48
Capítulo II Cohomología de Hochschild de extensiones locales	155
1 Producto tensorial de K - álgebras como álgebra de caminos de un diagrama con relaciones	160
2 Grupos de cohomología de Hochschild	166
3 Una sucesión exacta larga de grupos de cohomología de Hochschild para extensiones locales	168
4 Un caso particular	180
<i>Referencias</i>	<i>191</i>

INTRODUCCION

Un álgebra de artin es un álgebra finitamente generada como módulo sobre su centro que es un anillo conmutativo artiniano. Una propiedad importante que tienen las álgebras de artin y que las distingue de los anillos artinianos, es que el anillo de endomorfismo de un módulo finitamente generado es un álgebra de artin.

En teoría de representaciones interesa, para un álgebra Λ dada, obtener información sobre Λ a partir del conocimiento de sus módulos. Un sencillo ejemplo de esta idea es el siguiente: todo Λ -módulo es suma de copias de un Λ -módulo simple fijo si y sólo si $\Lambda \simeq M_n(D)$ con D un anillo con división.

Esta idea se ve reflejada también en el trabajo de Auslander, Platzeck y Todorov en el que estudian propiedades homológicas de los ideales idempotentes de un álgebra de artin Λ . Se caracterizan allí a los ideales (biláteros) idempotentes \mathcal{A} de Λ que son Λ -módulos proyectivos a izquierda comparando resoluciones proyectivas en las categorías de módulos finitamente generados sobre Λ/\mathcal{A} , sobre Λ y sobre $End_{\Lambda}\mathcal{A}$.

Anillos artinianos que tienen la propiedad de que todos sus ideales idempotentes son proyectivos fueron estudiados más tarde por M.I. Platzeck quien los caracterizó -en el caso básico- como aquellos anillos Λ que contienen en su radical un ideal bilátero J proyectivo a izquierda tal que Λ/J es producto de anillos locales. Ella probó además que tales anillos tienen dimensión finitista menor o igual que 1 y caracterizó los módulos de dimensión proyectiva finita como aquellos que tienen una filtración con factores de composición entre ciertos módulos A_1, \dots, A_n , donde n es el número de simples no isomorfos.

Esta clase de álgebras será el objeto de estudio en el primer capítulo de este trabajo. Es decir, las álgebras Λ que satisfacen la siguiente propiedad

(IIP) Todos los ideales idempotentes de Λ son proyectivos como Λ -módulos a izquierda

y que llamaremos álgebras (IIP). Más precisamente, clasificaremos allí las álgebras finitamente gen-

eradas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K con la propiedad (IIP) de tipo de representación finito, esto es, con un número finito de módulos indescomponibles no isomorfos. Una manera de estudiar las representaciones sobre un álgebra de artin Λ es relacionarlas con representaciones sobre álgebras con menos módulos simples que Λ . Observemos primero que si Λ es un álgebra de artin de la forma $\Lambda = P \amalg Q$ con P y Q Λ -módulos a izquierda entonces

$$\Lambda \simeq (End_{\Lambda} \Lambda)^{op} = \begin{pmatrix} (End_{\Lambda} P)^{op} & Hom_{\Lambda}(P, Q) \\ Hom_{\Lambda}(Q, P) & (End_{\Lambda} Q)^{op} \end{pmatrix}. \text{ Cuando } Hom_{\Lambda}(P, Q) = 0 \text{ resulta que } \Lambda \text{ es}$$

un anillo de matrices triangulares $\Lambda = \begin{pmatrix} R & 0 \\ M & A \end{pmatrix}$ donde R y A son álgebras de artin y M es un $A - R$ -bimódulo finitamente generado.

En general no es fácil obtener información sobre Λ a partir del conocimiento de las álgebras R y A . En el caso particular en que R es un cuerpo se obtienen las llamadas extensiones por un punto definidas por Ringel, las cuáles han sido ampliamente estudiadas resultando de importancia en ciertos teoremas de clasificación y en muchas otras circunstancias.

Es sabido que una extensión por un punto B de A puede tener propiedades muy diferentes a las de A , por ejemplo, B puede tener un número infinito de módulos indescomponibles no isomorfos aún cuando A tenga un número finito. Sin embargo, hay muchas situaciones en las que es posible obtener información sobre B a partir del conocimiento de A , dependiendo del problema planteado.

Ahora bien, no toda álgebra B se puede expresar como extensión por un punto de otra álgebra A . Para ello es necesario que exista un B -módulo proyectivo maximal P , en el sentido que $Hom_B(P, Q) = 0$ para todo B -proyectivo Q no isomorfo a P , y tal que $End_B P$ es un cuerpo. Cuando esto es posible, el método de escribir a un álgebra B como extensión por un punto de otra álgebra A resulta de gran utilidad para realizar argumentos inductivos o iterativos dado que A tiene menos módulos simples no isomorfos que B .

Generalizando esta noción de extensión por un punto dada por Ringel, J. A. de la Peña y M. Martins definen para dos álgebras de artin R y A con R un anillo local, y un $A - R$ -bimódulo finitamente generado M , la extensión local de A por M como el anillo de matrices triangulares $\begin{pmatrix} R & 0 \\ M & A \end{pmatrix}$.

Esta clase de álgebras incluye álgebras con propiedades muy diferentes como lo son las heredi-

tarias, que han sido muy bien estudiadas, y las locales de las cuales se tiene menos información.

Las álgebras (IIP) que nos interesan tienen la particularidad que se pueden obtener a partir de un cierto anillo local por sucesivas extensiones locales de álgebras que tienen la misma propiedad.

En este trabajo se consideran álgebras Λ finitamente generadas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K , lo cual permite describir a Λ como el álgebra de caminos de un diagrama finito Q con relaciones, como prueba un importante teorema de P. Gabriel.

Para un diagrama Q con relaciones, dar una representación del diagrama es dar para cada vértice i un K - espacio vectorial V_i y para cada flecha β de i en j una transformación lineal $T_\beta : V_i \longrightarrow V_j$ de modo que las transformaciones lineales dadas respeten las relaciones del diagrama. Se construye la categoría de representaciones del diagrama Q con relaciones y es bien conocido que la misma es equivalente a la categoría de módulos finitamente generados sobre Λ . De esta manera se tiene una descripción de los módulos sobre Λ en términos de espacios vectoriales y transformaciones lineales la cual es particularmente efectiva en la descripción de los módulos simples, proyectivos e inyectivos, los que juegan un rol central en el estudio de la categoría de Λ - módulos.

Un importante problema en teoría de representaciones es el de clasificar álgebras de tipo de representación finito, es decir, con un número finito de Λ - módulos indescomponibles no isomorfos. Una contribución fundamental en esta dirección, la dio el conocido teorema de P. Gabriel que caracteriza a las álgebras de caminos hereditarias de tipo de representación finito como aquéllas que corresponden a diagramas de Dynkin.

Otro trabajo más reciente y de gran importancia en esta línea es el de D. Happel - D. Vossieck y el de Bongartz. En ellos se da la clasificación de las álgebras de caminos $\Lambda = KQ/I$, minimales de tipo de representación infinito cuyo gráfico de Auslander - Reiten tiene una componente preproyectiva. Allí se entiende por álgebra minimal de tipo infinito a toda álgebra Λ de tipo de representación infinito tal que el cociente $\Lambda/\Lambda e_i \Lambda$ es de tipo finito para todo idempotente e_i de un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de Λ . Esta última clasificación está dada por una lista de diagramas con relaciones que llamaremos lista [BHV].

Dada un álgebra Λ , una forma de probar que Λ es de tipo de representación infinito es dar un cociente Λ' de Λ de tipo infinito. Cuando Λ es el álgebra de caminos de un diagrama Q con

relaciones, todo subdiagrama lleno Q' de Q determina un álgebra cociente Λ' de Λ .

Por esta razón son de suma importancia los trabajos de Happel - Vossieck y Bongartz mencionados arriba, dado que basta hallar un subdiagrama lleno Q' de Q perteneciente a la lista [BHV] para concluir que $\Lambda = KQ/I$ es de tipo de representación infinito.

Para el teorema recíproco, se sabe que bajo ciertas condiciones, la no existencia de subdiagramas convexos llenos Q' de Q pertenecientes a la lista [BHV] garantiza que Λ es de tipo de representación finito, pero estas condiciones no se satisfacen si Q es un diagrama con lazos.

Se puede ver que las álgebras (IIP) que no son hereditarias están dadas por diagramas Q con lazos. Como dijimos, el caso hereditario fue estudiado por P. Gabriel, de modo que sólo nos interesa el caso en que Q es un diagrama con lazos. Por esta razón no es posible utilizar directamente la lista [BHV] en la resolución de nuestro problema de clasificación.

Es aquí donde la teoría de cubrimientos de álgebras resulta de gran utilidad. Estas técnicas fueron introducidas en la teoría de representaciones para el estudio de álgebras de tipo de representación finito y para la descripción de sus módulos indescomponibles, y tienen sin duda su inspiración en la teoría de cubrimientos topológicos.

Los llamados cubrimientos Galois de un álgebra Λ permiten reducir el problema de determinar si Λ es de tipo de representación finito al de determinar si un cubrimiento Galois de Λ es localmente de tipo de representación finito debido a un resultado de P. Gabriel.

La ventaja en nuestro caso, es que si el álgebra (IIP) Λ está dada por un diagrama Q con lazos existe un cubrimiento Galois $\tilde{\Lambda}$ de Λ dado por un diagrama \tilde{Q} , posiblemente infinito, pero sin lazos. Nos encontramos entonces con el problema de decidir cuándo el cubrimiento $\tilde{\Lambda}$ es localmente de tipo finito, problema que en general no es sencillo. Aquí resulta sumamente útil un criterio dado por K. Bongartz basado en el uso de la lista [BHV]. Este criterio se aplica sólo bajo ciertas hipótesis y condiciones técnicas, muchas veces difíciles de verificar. Afortunadamente, en el caso de las álgebras (IIP), pudimos utilizar dicho criterio resultando una herramienta fundamental para la resolución de nuestro problema. En muchos casos la aplicación es directa mientras que en otros se combina con otras técnicas.

Interesada en calcular la cohomología de Hochschild de las álgebras (IIP) clasificadas en el primer capítulo estudie la cohomología de Hochschild de extensiones locales. Dedicamos el capítulo 2 a

dicho estudio.

Comenzamos el capítulo 2 describiendo el producto tensorial de dos álgebras finitamente generadas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K como el álgebra de caminos de un diagrama con relaciones. Si bien la descripción, en principio parece complicada, fue sumamente útil para hacer ejemplos y resultó esencial para encontrar ciertas resoluciones proyectivas e inyectivas necesarias para demostrar nuestros resultados.

Los grupos de cohomología de Hochschild $H^i(B, X)$ con $i \geq 0$, que notamos con $H^i(B)$ si $X = B$, para una K -álgebra B y un $B - B$ -bimódulo X , fueron introducidos por Hochschild y si $i \leq 2$ tienen una interpretación concreta de estructuras algebraicas clásicas como derivaciones y extensiones. Por otro lado, es conocido que $H^2(B)$ controla la teoría de deformaciones de B . Se sabe que si $H^2(B) = 0$ entonces B es rígida.

En general, el cálculo por definición de los grupos de cohomología de Hochschild de un álgebra B dada presenta dificultades. Cuando B es el álgebra de caminos de un diagrama Q_B con un vértice c al cual no llegan flechas, o sea una fuente, entonces B es la extensión por un punto de un álgebra A por un A -módulo M y en este caso hay un importante teorema probado por D. Happel que muestra la existencia de una sucesión exacta larga de K -espacios vectoriales conectando los grupos $H^i(B)$, $H^i(A)$ y $Ext_A^i(M, M)$. En muchas ocasiones este teorema permite hacer argumentos inductivos o iterativos resultando de gran utilidad.

Probamos aquí un resultado que generaliza al mencionado teorema de Happel, para extensiones locales. El mismo da una sucesión exacta larga de K -espacios vectoriales que conecta la cohomología de Hochschild de A , la de la extensión local $\begin{pmatrix} R & 0 \\ M & A \end{pmatrix}$ y los grupos $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e)$ donde P_e es el B -módulo proyectivo indescomponible correspondiente al idempotente $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de B .

Para que esta sucesión resulte útil es necesario calcular los grupos $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e)$, que en general presentan dificultades. En el caso de extensiones por un punto, los grupos $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e)$ y $Ext_A^i(M, M)$ coinciden lo cual tiene la ventaja que los módulos involucrados en su cálculo son módulos sobre el anillo A . Sin embargo, en el caso general, trabajar con módulos sobre el anillo $B \otimes_K R^{op}$ se torna más complicado.

Con el objetivo de contar con métodos alternativos que puedan facilitar los cálculos, probamos

aquí la existencia de otra sucesión exacta larga de K - espacios vectoriales que conecta los grupos de cohomología $H^i(R)$ del anillo local R y los grupos $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e)$ y $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, M)$.

Finalmente, aplicamos los resultados obtenidos a un caso particular de extensiones locales $B = \begin{pmatrix} R & 0 \\ M & A \end{pmatrix} = KQ_B/I$ que son las que satisfacen las condiciones:

- i) Q_B tiene un único lazo α en el vértice e y $R = K[\alpha] / \langle \alpha^i \rangle$, $i > 1$.
- ii) Si β_1, \dots, β_n son todas la flechas de Q_B con origen en e que no son lazos, entonces el ideal I está generado por relaciones que no involucran a las flechas β_1, \dots, β_n .

Probamos que en este caso la primera sucesión exacta larga obtenida es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(B) \rightarrow H^0(A) \rightarrow Ext_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) \rightarrow H^1(B) \rightarrow H^1(A) \rightarrow H^2(R) \rightarrow \dots \\ \rightarrow H^j(B) \rightarrow H^j(A) \rightarrow H^{j+1}(R) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

conectando directamente la cohomología de Hochschild de los anillos A , B y R . Mostramos además que el K - espacio vectorial $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e)$ tiene dimensión $1 + (n - 1)dim_K R$ donde n es el número de flechas que no son lazos con origen en el vértice e de Q_B .

Para terminar calculamos los grupos $H^n(B)$ cuando B satisface las condiciones i) y ii) de arriba y $H^j(A) = 0 \forall j \geq 1$.

Vale la pena mencionar que si bien los resultados obtenidos no nos permitieron calcular la cohomología de Hochschild de cualquier álgebra con la propiedad (IIP), los mismos son resultados más generales aplicables a una clase más amplia de álgebras.

Capítulo I

ALGEBRAS DE ARTIN CON TODOS SUS IDEALES IDEMPOTENTES PROYECTIVOS DE TIPO DE REPRESENTACION FINITO

Las álgebras de artin Λ que tienen la siguiente propiedad

(IIP) Todos sus ideales (biláteros) idempotentes son Λ - módulos a izquierda proyectivos

forman una clase amplia de álgebras que contienen a las álgebras hereditarias y a las locales.

Las propiedades homológicas de los ideales idempotentes de un álgebra de artin fueron estudiadas por M. Auslander, M.I. Platzeck y G. Todorov en [APT]. Por otro lado, M.I. Platzeck estudió y caracterizó los anillos artinianos con la propiedad (IIP), en el caso que son básicos, como aquellos anillos artinianos básicos Λ que contienen en su radical un ideal bilátero proyectivo a izquierda J tal que el anillo cociente Λ/J es un producto de anillos locales ([P1]). Más aún, probó que tales anillos tienen dimensión finitística a lo sumo uno y dió una descripción de los módulos de dimensión proyectiva finita. Además, las álgebras de artin con esta propiedad han sido objeto de estudio de otros matemáticos como F. Coelho, H. Merklen, E. Marcos, M.I. Martins y J.A de la Peña.

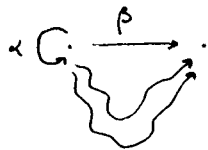
En este capítulo se resuelve el siguiente problema: clasificar todas las álgebras Λ de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K , que tienen la propiedad (IIP) y son de tipo de representación finito.

Para resolver el problema se puede suponer que Λ es básica y conexa, lo que permite describir a Λ como el álgebra de caminos KQ/I de un diagrama finito y conexo Q . Se trata entonces de hallar todos los diagramas Q y todas las relaciones R tales que $\Lambda = KQ/ \langle R \rangle$ tiene la propiedad (IIP) y es de tipo de representación finito.

La primera dificultad a sortear en la resolución del problema es determinar la familia de diagramas y relaciones a estudiar. Es conocido el hecho que si Λ tiene la propiedad (IIP) y P, P' son Λ -módulos proyectivos indescomponibles no isomorfos tales que $\text{Hom}_\Lambda(P, P') \neq 0$ entonces $\text{Hom}_\Lambda(P', P) = 0$. De aquí resulta que el diagrama ordinario de un álgebra con la propiedad (IIP) no tiene circuitos orientados que no sean lazos. F. Coelho, E. Marcos, H. Merklen y M.I. Platzeck probaron en [CMaMP] que si $\Lambda = KQ/I$ satisface la propiedad (IIP) y Q no tiene lazos entonces Λ es un álgebra hereditaria, y es bien conocido que las álgebras hereditarias de tipo de representación finito son las dadas por los diagramas de Dynkin. De aquí que en principio, los diagramas a estudiar son diagramas con lazos y sin otros circuitos orientados que no sean lazos.

Si un álgebra Λ' es cociente de un álgebra Λ por un ideal (bilátero) J entonces todo Λ' -módulo es un Λ -módulo y más aún, Λ' es de tipo de representación finito si Λ lo es. Usando esto y el hecho que las álgebras determinadas por los diagramas $\cdot \rightrightarrows \cdot$ y $\cup \cup$ son de tipo de representación infinito se puede probar que los diagramas a estudiar tienen a lo sumo un lazo en cada vértice y no contienen flechas dobles.

El siguiente paso es decidir qué tipo de relaciones estudiar sobre tales diagramas. Para ello fue esencial el estudio hecho por M.I. Platzeck en [P2] que describe las relaciones sobre las álgebras de caminos que satisfacen la propiedad (IIP). Aplicando los resultados de [P2] al caso particular en que Q tiene a lo sumo un lazo en cada vértice probamos aquí que las relaciones pueden elegirse de la forma $\beta\alpha^i = \sum \delta_j$ donde α es un lazo en el vértice k , β es una flecha con origen en k y los δ_j son caminos de k en el final de β .



Una vez determinada la familia de diagramas a estudiar y las relaciones a considerar sobre los mismos, sólo resta decidir cuándo las correspondientes álgebras de caminos son de tipo de representación finito.

En general no es sencillo decidir si un álgebra es de tipo de representación finito, dificultad que aumenta cuando el álgebra está dada por un diagrama con lazos.

En nuestro caso la herramienta fundamental es la teoría de cubrimientos de álgebras. Estas técnicas fueron introducidas en la teoría de representaciones para el estudio de álgebras de tipo de representación finito y para la descripción de sus módulos indescomponibles, y tienen sin duda su inspiración en la teoría de cubrimientos topológicos.

Dentro de la teoría de cubrimientos son de particular interés los llamados cubrimientos Galois. Tales cubrimientos permiten reducir el problema de determinar si un álgebra Λ es de tipo de representación finito al de determinar si un cubrimiento Galois de Λ es localmente de tipo de representación finito ([Ga]).

Dada un álgebra $\Lambda = KQ/I$ con Q un diagrama con lazos, a veces es posible elegir un cubrimiento Galois $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ de Λ con \tilde{Q} , tal que \tilde{Q} no tiene lazos, aunque puede ser un diagrama infinito. He aquí la ventaja de estudiar localmente el tipo de representación del cubrimiento $\tilde{\Lambda} = k\tilde{Q}/\tilde{I}$.

Para el caso en que Λ es un álgebra distributiva de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K , y tal que existe un cubrimiento Galois simplemente conexo (en el sentido simplicial de Bongartz en [Bo]) de Λ , existe un criterio para decidir si Λ es de tipo de representación finito a partir de ciertas condiciones que debe satisfacer el cubrimiento $\tilde{\Lambda}$. Este importante resultado fue probado por K. Bongartz en [Bo].

Si bien el Criterio de Bongartz soluciona numerosas dificultades que aparecen en la práctica cuando se trata de decidir el tipo de representación de un álgebra, tiene varias hipótesis y condiciones técnicas que no siempre son sencillas de verificar. Quizás la condición más restrictiva de este criterio es que sólo puede aplicarse a álgebras standard (distributivas con un cubrimiento Galois simplemente conexo). Afortunadamente, las álgebras con la propiedad (IIP) a estudiar aquí resultaron ser ó bien de tipo de representación infinito ó bien standard, por lo que este criterio fue una herramienta fundamental en la resolución del problema. A pesar de ello, en muchos casos el Criterio de Bongartz no es aplicado directamente. Se usan otras técnicas para reducir el problema de determinar el tipo de representación de un álgebra Λ al de determinar el tipo de representación de otra álgebra Λ' a la cual se le aplica el Criterio de Bongartz. En general para trasladar el problema de un álgebra Λ a otra álgebra Λ' se combinan los siguientes resultados:

- i) Si Λ tiene la propiedad (IIP) y J es un ideal (bilátero) idempotente de Λ entonces Λ/J

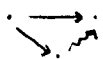
también satisface la propiedad (IIP).

- ii) Si Λ es de tipo de representación finito y Λ' es un cociente de Λ por un ideal (bilátero) J entonces Λ' es de tipo de representación finito.
- iii) Sea $\Lambda = KQ/I$ y P_i el Λ - módulo proyectivo indescomponible asociado al vértice i de Q . Entonces $End_{\Lambda}(P_i)$ es un anillo local.

Particularmente iii) permite conocer por ejemplo qué elementos son inversibles en $End_{\Lambda}(P_i)$ y con ello efectuar cálculos y “sustituciones” que determinan un álgebra Λ' isomorfa al álgebra Λ que se desea estudiar. Esto reduce el problema sobre Λ a un problema sobre Λ' .

Combinando las técnicas mencionadas, se estudia cada caso en detalle y se obtiene una lista completa de todas las álgebras con la propiedad (IIP) de tipo de representación finito.

El capítulo está dividido en cuatro secciones. La primera sección está dedicada al estudio de las relaciones sobre las álgebras con la propiedad (IIP). Incluimos allí los resultados probados por M.I. Platzeck en [P2] para un mejor entendimiento de la descripción de las relaciones sobre éstas álgebras dado que la misma es de importancia central en la resolución de nuestro problema de clasificación. Las dos secciones siguientes contienen definiciones técnicas y resultados relativos a la teoría de cubrimientos de K - categorías localmente acotadas necesarios para la última sección. Específicamente, la sección 2 está dedicada al grupo fundamental y el cubrimiento topológico universal de un grafo. La sección 3 trata sobre funtores de cubrimiento Galois y el cubrimiento Galois universal de una K - categoría localmente acotada. Damos allí la construcción del mismo e incluimos también el Criterio de Bongartz para tipo finito que es esencial en la resolución de nuestro problema. Por último, la sección 4 es la parte principal de este capítulo. Se incluyen allí, en forma detallada, todos los cálculos realizados para la resolución del problema de clasificación. Esta sección ha sido dividida en subsecciones en las que se estudian, respectivamente, diagramas de Dynkin con uno, dos, tres y cuatro lazos y diagramas que contienen un subdiagrama de la forma



. Al final de la sección 4 se prueba que la lista de álgebras obtenida es completa.

PRELIMINARES

Sea K un cuerpo. Una K - álgebra Λ se dice *básica* si en la descomposición, $\Lambda = \coprod P_i$, de Λ como suma de Λ - módulos proyectivos indescomponibles, $P_i \not\sim P_j$ para $i \neq j$.

Para una K - álgebra Λ notaremos con $Mod \Lambda$ a la categoría de Λ - módulos, con $mod \Lambda$ a la subcategoría llena de $Mod \Lambda$ de Λ - módulos finitamente generados y con $ind \Lambda$ a la subcategoría llena de $mod \Lambda$ cuyos objetos son representantes no isomorfos de los Λ - módulos indescomponibles finitamente generados.

Vale el siguiente Teorema.

Teorema. *Para toda K - álgebra Λ de dimensión finita, existe una única (a menos de isomorfismos) K - álgebra Λ' de dimensión finita y básica tal que las categorías $mod \Lambda$ y $mod \Lambda'$, de Λ y Λ' - módulos finitamente generados, son equivalentes. (es decir, Λ y Λ' son Morita equivalentes.)*

De acuerdo a este teorema, para estudiar la categoría $mod \Lambda$ (si Λ es una K - álgebra de dimensión finita) es posible suponer, sin pérdida de generalidad, que Λ es básica.

En este trabajo todas las álgebras serán básicas, conexas y de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K fijo. La palabra ideal significará ideal bilátero. Para un álgebra Λ , denotaremos con $\underline{r}\Lambda$ al radical de Jacobson de Λ y por Λ - módulo entenderemos Λ - módulo a izquierda. Sabemos que si Λ es una K - álgebra y M un Λ - módulo, el radical de M coincide con $(\underline{r}\Lambda)M$. Denotaremos $\underline{r}M$ en vez de $(\underline{r}\Lambda)M$.

Es bien sabido que toda álgebra Λ básica, de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K , es isomorfa al cociente $KQ(\Lambda)/I$ de un álgebra de caminos $KQ(\Lambda)$ donde $Q(\Lambda)$ es un diagrama finito y conexo, e I es un ideal admisible de $KQ(\Lambda)$. Recordemos que un ideal I de $KQ(\Lambda)$ es *admisible* si $\underline{r}^n[KQ(\Lambda)] \subseteq I \subseteq \underline{r}^2[KQ(\Lambda)]$ para algún entero n , donde $\underline{r}[KQ(\Lambda)]$ coincide con el ideal generado por todas las flechas de $Q(\Lambda)$. En este trabajo todas las relaciones serán admisibles, es decir, $\Lambda = KQ/I$ significará siempre que I es un ideal admisible.

Se llama *diagrama ordinario* de Λ al diagrama $Q(\Lambda)$ con un número mínimo de vértices tal que $KQ(\Lambda)/I \simeq \Lambda$, para algún ideal admisible I .

Para un diagrama Q dado, notaremos con Q_0 al conjunto de vértices de Q y con Q_1 al conjunto

de flechas de Q . Si α es una flecha de Q_1 , $s(\alpha)$ y $e(\alpha)$ denotarán, respectivamente, a los vértices origen y final de α . Un *lazo* es una flecha α tal que $s(\alpha) = e(\alpha)$. Para un vértice k , un *monomio* en lazos en k será, ó el punto k (monomio trivial) ó un producto $\prod \alpha_i^{r_i}$ donde los α_i son lazos para todo i .

Si $\Lambda = KQ(\Lambda)/I$ es un álgebra y $k \in (Q(\Lambda))_0$, notaremos con S_k al Λ - módulo simple asociado a k y con P_k e I_k a las cápsulas proyectiva e inyectiva de S_k respectivamente.

Si Q es un diagrama finito con vértices $1, \dots, n$ y $\Lambda = KQ/I$, para cada Λ - módulo proyectivo indescomponible P_i notaremos \widehat{P}_i a la suma $\prod_{j \neq i} P_j$.

Para un par de Λ - módulos X, Y indicaremos con $\tau_X Y$ a la traza de X en Y , esto es al submódulo de Y generado por todas las imágenes homomórficas de X en Y .

Para un Λ - módulo M notaremos con $add M$ a la subcategoría llena de $mod \Lambda$ que consiste de todas las sumas finitas de sumandos de M .

Es sabido que para un diagrama Q dado se puede construir la K - categoría Λ_Q de caminos, cuyos objetos son los vértices de Q y dados dos vértices x e y en Q el espacio de morfismos $\Lambda_Q(x, y)$ consiste de combinaciones lineales formales de caminos de x a y . Algunas veces consideraremos equivalentemente al álgebra de caminos KQ como la K - categoría Λ_Q .

1. RELACIONES EN LAS ALGEBRAS CON TODOS SUS IDEALES IDEMPOTENTES PROYECTIVOS

Sea Λ un álgebra. Si M y N son Λ - módulos, la traza, $\tau_M(N)$, de M en N es el submódulo de N generado por todas las imágenes homomórficas de M en N . Se sabe que si P es un Λ - módulo proyectivo entonces $\tau_P(\Lambda)$ es un ideal idempotente de Λ y tales ideales se obtienen de esta manera. Además, si $P = \Lambda.e$, con $e^2 = e$, entonces $\tau_P(\Lambda) = \Lambda.e.\Lambda$

Se dice que un álgebra de artin Λ tiene la propiedad (IIP) si:

(IIP) Todos los ideales (biláteros) idempotentes de Λ son proyectivos como Λ - módulos a izquierda.

En la primera parte de esta sección describimos las relaciones sobre álgebras con esta propiedad. Esta descripción fue hecha por M.I. Platzeck en [P2] y la incluimos en este trabajo para una mejor comprensión ya que la misma tiene un rol central en la resolución de nuestro problema.

En la segunda parte utilizamos estos resultados para dar una descripción más precisa de las relaciones sobre un álgebra de caminos $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP) cuando Q es un diagrama con a lo sumo un lazo en cada vértice.

Comenzamos recordando algunos resultados de [P1] y [P2] válidos para álgebras con la propiedad (IIP).

Proposición. *Sea Λ un álgebra (de artin) con (IIP) y sean P y P' Λ - módulos proyectivos indescomponibles tales que $\text{Hom}_\Lambda(P, P') \neq 0$. Entonces $\tau_P(P') \simeq P^r$ para algún $r > 0$.*

Es consecuencia inmediata de esta Proposición que si P y P' son Λ - módulos proyectivos indescomponibles no isomorfos y $\text{Hom}_\Lambda(P, P') \neq 0$ entonces $\text{Hom}_\Lambda(P', P) = 0$. De aquí, si Λ tiene la propiedad (IIP), los Λ - módulos proyectivos indescomponibles P_1, \dots, P_n pueden ordenarse de modo tal que $\text{Hom}_\Lambda(P_i, P_j) = 0$ para $i < j$. En particular, el diagrama ordinario $Q(\Lambda)$ de Λ no tiene ciclos orientados que involucren flechas que no son lazos.

Proposición. *Sea $\Lambda = KQ(\Lambda)/I$ una K - álgebra de dimensión finita con (IIP). Si $Q(\Lambda)$ no tiene lazos entonces Λ es hereditaria, es decir, $I = 0$.*

Es bien conocido que las álgebras $\Lambda = KQ(\Lambda)$ hereditarias de tipo de representación finito son aquellas tales que $Q(\Lambda)$ es un diagrama de Dynkin. Luego, por la proposición anterior, para clasificar todas las K - álgebras Λ con la propiedad (IIP) de tipo de representación finito sólo debemos estudiar $\Lambda = KQ(\Lambda)/I$, donde $Q(\Lambda)$ es un diagrama con lazos.

En el resto de esta sección $\Lambda = KQ/I$ será un álgebra con la propiedad (IIP) donde Q es un diagrama de n vértices con lazos. Podemos suponer además que los Λ - módulos proyectivos indecomponibles no isomorfos P_1, \dots, P_n están ordenados como dijimos anteriormente.

Si P_1, \dots, P_n es un conjunto completo de Λ - módulos proyectivos indecomponibles no isomorfos, notaremos \widehat{P}_k a la suma $\coprod_{i \neq k} P_i$. Sigue inmediatamente de la definición de álgebra con la propiedad (IIP) que $\tau_{\widehat{P}_k}(P_k) \simeq \coprod_j P_j^{d_{j,k}}$ donde $j \in \{i : \text{Hom}_\Lambda(P_i, P_k) \neq 0\}$, $j \neq k$.

Una K - combinación lineal c de caminos de k en j define un morfismo φ_c de P_j en P_k dado por $\varphi_c(\gamma) = \gamma.c$, para $\gamma \in P_j$, y todo morfismo de P_j en P_k es de esta forma. Además, la imagen de φ_c está contenida en $\tau_{P_j}(P_k)$. Así, una m - upla (c_1, \dots, c_m) de K - combinaciones lineales c_i de caminos con origen en k y fin en $j_i \neq k$ define un morfismo, que también designaremos (c_1, \dots, c_m) , de $\coprod_j P_j^{d_{j,k}}$ en $\tau_{\widehat{P}_k}(P_k)$, donde $d_{j,k}$ es el número de c_i en la m - upla que son combinación lineal de caminos de k en j .

Además, cuando digamos que (c_1, \dots, c_m) define un tal morfismo daremos por sobreentendido que los c_i son como se acaba de indicar arriba.

Como Λ tiene la propiedad (IIP), $\tau_{\widehat{P}_k}(P_k) \simeq \coprod_j P_j^{d_{j,k}}$, para todo k . Luego para cada $k > 0$, existe un monomorfismo $\phi_k = (c_{k,1}, \dots, c_{k,m_k}) : \coprod_j P_j^{d_{j,k}} \longrightarrow P_k$ con $\text{Im } \phi_k = \tau_{\widehat{P}_k}(P_k)$.

Observación 1.1. El Λ - módulo $\tau_{\widehat{P}_k}(P_k)$ está generado por todos los caminos δ de k en j con $j \neq k$. Luego si $\phi_k : \coprod_{(P_j, P_k) \neq 0} P_j^{d_{j,k}} \longrightarrow \tau_{\widehat{P}_k}(P_k)$ es un isomorfismo, todo camino δ de k en j ($j \neq k$) está en la imagen de ϕ_k y por lo tanto puede escribirse de manera única en la forma:

$$\delta = \phi_k(\gamma_{\delta,1}, \dots, \gamma_{\delta,m_k}) = \sum \gamma_{\delta,i} c_{k,i}$$

donde $\gamma_{\delta,i}$ es combinación lineal de caminos del final de $c_{k,i}$ en el final j de δ . Como los Λ - módulos proyectivos indecomponibles P_1, \dots, P_n están ordenados de manera que $\text{Hom}_\Lambda(P_i, P_j) = 0$ si $i < j$ entonces $\gamma_{\delta,i}$ es cero si $e(c_{k,i}) > e(\delta) = j$. O sea, se puede suponer que la expresión de δ como

imagen de la m_k -upla ϕ_k es de la forma:

$$(1) \quad \delta = \sum_{i \in S} \gamma_{\delta,i} c_{k,i}$$

donde $S = \{i : \text{final de } c_{k,i} \leq \text{final de } \delta = j\}$.

Nos referiremos a la expresión (1) como *la expresión de δ en los $c_{k,i}$* . \square

Para cada $k > 0$ elegimos un tal isomorfismo $\phi_k = (c_{k,1}, \dots, c_{k,m_k}) : \coprod P_j^{d_{j,k}} \longrightarrow \tau_{\widehat{P}_k}(P_k)$. En lo que sigue ϕ_k denotará el isomorfismo elegido a menos que se indique lo contrario y (1) será la expresión de un camino $\delta : k \longrightarrow j$, $j \neq k$ en los $c_{k,i}$. Estas m_k -uplas serán de gran utilidad en el estudio de las relaciones de Λ .

Comenzamos dicho estudio con la siguiente Proposición que da un conjunto de generadores del ideal I de las relaciones de Λ .

Designemos con \mathcal{L} al conjunto de relaciones de Λ que sólo involucran lazos.

Proposición 1.2. *Sea $S = \{\delta - \phi_k(\gamma_{\delta,1}, \dots, \gamma_{\delta,m_k}) = \delta - \sum_{i=1}^{m_k} \gamma_{\delta,i} c_{k,i} \in KQ(\Lambda)$, δ camino de k en j , $j \neq k$, $k = 1, \dots, n\}$. Entonces $S \cup \mathcal{L}$ es un conjunto de generadores del ideal I de las relaciones de Λ .*

Demostración. Consideramos relaciones r de k en j y hacemos inducción en $n - k$.

Si $n - k = 0$, o sea, si $n = k$, entonces r es una relación de n en n y por lo tanto está en \mathcal{L} . Supongamos que la Proposición es válida para relaciones r' que comienzan en el vértice t con $n - t < n - k$, o sea, $t > k$; es decir, supongamos que toda relación r' que comienza en $t > k$ pertenece al ideal generado por $S \cup \mathcal{L}$. Sea $r \in I$, $r = \sum_{\delta} \lambda_{\delta} \delta$ con $\lambda_{\delta} \in K$ y δ un camino de k en j .

Si $k = j$ entonces la relación pertenece a \mathcal{L} . Si $k \neq j$, entonces cada δ tiene una expresión única de la forma $\delta = \sum_{i=1}^{m_k} \gamma_{\delta,i} c_{k,i}$. Reemplazando en r tenemos

$$r = \sum_{\delta} \lambda_{\delta} \delta = \sum_{\delta} \lambda_{\delta} \left(\sum_i \gamma_{\delta,i} c_{k,i} \right) = \sum_i \left(\sum_{\delta} \lambda_{\delta} \gamma_{\delta,i} \right) c_{k,i} = \phi_k \left(\sum_{\delta} \lambda_{\delta} \gamma_{\delta,i} \right) \in I$$

Luego $\sum_{\delta} \lambda_{\delta} \gamma_{\delta,i} \in I$ porque ϕ_k es monomorfismo.

Como $s(\gamma_{\delta,i}) = e(c_{k,i}) > k$, (los $c_{k,i}$ no son lazos), aplicamos la hipótesis de inducción a la relación $\sum_{\delta} \lambda_{\delta} \gamma_{\delta,i}$, de donde resulta que $\sum_{\delta} \lambda_{\delta} \gamma_{\delta,i} \in (S \cup \mathcal{L})$ para todo i .

Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{\delta} \lambda_{\delta} \delta &= \sum_{\delta} \lambda_{\delta} (\delta - \sum_i \gamma_{\delta,i} c_{k,i}) + \sum_{\delta} \lambda_{\delta} (\sum_i \gamma_{\delta,i} c_{k,i}) \\ &= \sum_{\delta} \lambda_{\delta} (\delta - \sum_i \gamma_{\delta,i} c_{k,i}) + \sum_i (\sum_{\delta} \lambda_{\delta} \gamma_{\delta,i}) c_{k,i} \end{aligned}$$

y ambos sumandos pertenecen al ideal generado por $\mathcal{S} \cup \mathcal{L}$, lo que termina la demostración. \square

En lo que sigue la siguiente notación será útil.

Si $\phi = (c_1, c_2, \dots, c_m) : \coprod P_j^{d_j} \longrightarrow P_k$, ($\sum d_j = m$) es un monomorfismo y c'_1 es una K -combinación lineal de caminos con origen en k y fin en $e(c_1)$, diremos que " c_1 puede reemplazarse por c'_1 " si la m -upla $\phi' = (c'_1, c_2, \dots, c_m) : \coprod P_j^{d_j} \longrightarrow P_k$ es un monomorfismo e $Im \phi' = Im \phi$.

Lema 1.3. Si $\phi = (c_1, \dots, c_m)$, $\phi' = (c'_1, c_2, \dots, c_m) : \coprod P_j^{d_j} \longrightarrow P_k$ son homomorfismos con $Im \phi = Im \phi'$ y ϕ es un monomorfismo entonces ϕ' también lo es. Es decir, c_1 puede reemplazarse por c'_1 .

Demostración. $(c'_1, c_2, \dots, c_m) : \coprod P_j^{d_j} \longrightarrow Im \phi$ es un epimorfismo por hipótesis. Como ϕ es un monomorfismo $\coprod P_j^{d_j} \simeq Im \phi$. Luego, la longitud de $Nuc (c'_1, c_2, \dots, c_m)$ es 0 y por lo tanto $Nuc (c'_1, c_2, \dots, c_m) = 0$. \square

Los próximos resultados describen las relaciones sobre álgebras con la propiedad (IIP). El principal es el siguiente teorema que prueba, en particular, que los $c_{k,i}$ de la m_k -upla $\phi_k = (c_{k,1}, \dots, c_{k,m_k})$ pueden elegirse de la forma $\beta^{(k)}a$, donde $\beta^{(k)}$ es una flecha con origen en k y a es un monomio en lazos en k , para cada $k = 1, \dots, n$.

En adelante será conveniente, para un camino γ , escribir " $\gamma \in \phi_k$ " para indicar que γ es uno de los elementos $c_{k,i}$ del conjunto ordenado $(c_{k,1}, \dots, c_{k,m_k})$.

Teorema 1.4. (M.I. Platzeck) Para cada $k > 0$ existe una m_k -upla $\mathcal{D}_k = (d_{k,i})$, donde cada $d_{k,i}$ es un producto βa con β una flecha con origen en el vértice k que no es un lazo, y a un monomio en lazos en k tal que $\mathcal{D}_k : \coprod_{(P_j, P_k) \neq 0} P_j^{d_{j,k}} \longrightarrow \tau_{\widehat{P}_k}(P_k)$ es un isomorfismo. Más aún, si $\mathcal{D}_k = (d_{k,1}, \dots, d_{k,m_k})$ es un tal isomorfismo satisface las siguientes condiciones:

- a) El ideal I de las relaciones de Λ está generado por expresiones que sólo involucran lazos y

expresiones de la forma:

$$\beta a' - \sum_{\beta^{(k)} a \in \mathcal{D}_k} \gamma_{\beta a', \beta^{(k)} a} (\beta^{(k)} a)$$

donde $\beta, \beta^{(k)}$ son flechas con origen en k que no son lazos, a y a' son monomios en los lazos en k , los $\gamma_{\beta a', \beta^{(k)} a}$ son K - combinaciones lineales de caminos con origen en $e(\beta^{(k)})$ y $k = 1, \dots, n$.

- b) Toda flecha con origen en k que no es un lazo aparece en la m_k - upla \mathcal{D}_k .
- c) Si $\sum_{\beta^{(k)} a \in \mathcal{D}_k} \gamma_{\beta^{(k)} a} (\beta^{(k)} a) \in I$ y los $\gamma_{\beta^{(k)} a}$ son caminos con origen en $e(\beta^{(k)})$ entonces todos los $\gamma_{\beta^{(k)} a} \in I$, para cada $k = 1, \dots, n$.

Para demostrar el teorema veremos que se puede reemplazar sucesivamente a los $c_{k,i}$ de la m_k - upla ϕ_k hasta obtener una m_k - upla de la forma requerida en el mismo. Comenzamos probando el siguiente lema.

Lema 1.5. Supongamos que $c_{k,1} \in \phi_k$ es una combinación lineal de caminos con final en el vértice j , $c_{k,1} = \delta \beta a + \sum_{i,r} \delta_{i,r} (\beta_i a_r)$ donde β, β_i son flechas que no son lazos, a y los a_r son monomios en lazos en k , $\delta_{i,r}, \delta \in \Lambda$ y $\beta a \neq \beta_i a_r$ para todo i, r . Entonces, o bien:

- a) $c_{k,1}$ puede reemplazarse por βa .

ó

- b) $c_{k,1}$ puede reemplazarse por $c_{k,1} - \delta \beta a$.

Demostración. Como $\beta a \in \tau_{\hat{P}_k}(P_k)$, $\beta a = \sum_{i=1}^{m_k} \gamma_i c_{k,i}$. Si algún $\gamma_r \notin \underline{r} \Lambda$ entonces tal γ_r es inversible en Λ y por lo tanto $c_{k,r} = \gamma_r^{-1} \beta a - \sum_{i \neq r} \gamma_i^{-1} \gamma_i c_{k,i}$. Luego $c_{k,r}$ puede reemplazarse por βa obteniendo una nueva m_k - upla ($c'_{k,i}$) tal que $c'_{k,i}$ es igual a βa ó $c_{k,i}$ según i sea igual o distinto a r . Si $r = 1$, vale a). Si $r \neq 1$, $c'_{k,1} = c_{k,1}$ puede reemplazarse por $c'_{k,1} - \delta c'_{k,r} = c_{k,1} - \delta \beta a$, en cuyo caso vale b).

Podemos suponer entonces que $\gamma_r \in \underline{r} \Lambda$ para todo r . Escribimos:

$$\beta a = \sum_{i=1}^{m_k} \gamma_i c_{k,i} = \gamma_1 (\delta \beta a + c_{k,1} - \delta \beta a) + \sum_{i=2}^{m_k} \gamma_i c_{k,i}$$

Sea $z' = \gamma_1(c_{k,1} - \delta\beta a) + \sum_{i=2}^{m_k} \gamma_i c_{k,i}$. Entonces tenemos la siguiente expresión:

$$(*) \quad \beta a = \gamma_1 \delta\beta a + z'$$

con $z' \in \text{Im}(c_{k,1} - \delta\beta_1 a, c_{k,2}, \dots, c_{k,m_k}) = N_1$. Sea $N = \text{Im}(c_{k,1}, \dots, c_{k,m_k})$. Queremos probar que $N = N_1$.

Como $c_{k,1} = (c_{k,1} - \delta\beta a) + \delta\beta a$, sigue de la igualdad (*) que $N \subseteq N_1 + \underline{r} N$, pues $\gamma_1 \in \underline{r} \Lambda$. De aquí, $N + N_1 = N_1 + \underline{r} (N + N_1)$ y por el Lema de Nakayama resulta que $N \subseteq N_1$. Esto implica que $N = N_1$. Es decir, los morfismos $(c_{k,1}, \dots, c_{k,m_k})$ y $(c_{k,1} - \delta\beta_1 a, \dots, c_{k,m_k})$ tienen la misma imagen y por el Lema 1.3 se puede reemplazar $c_{k,1}$ por $c_{k,1} - \delta\beta a$. \square

Corolario 1.6. *Sea ϕ_k el isomorfismo elegido anteriormente. Entonces se puede reemplazar cada $c_{k,i}$ por un producto de la forma βa donde β es una flecha con origen en k que no es un lazo y a es un monomio en lazos en k .*

Demostración. Supongamos que algún $c_{k,i}$ no es de la forma βa . Podemos suponer que $i = 1$ y aplicar reiteradamente el Lema 1.5. de la siguiente manera. Supongamos $c_{k,1} = \delta\beta a + \sum \delta_{i,r}(\beta_i a_r)$ como en el Lema anterior. Entonces por el mismo lema $c_{k,1}$ se puede reemplazar por βa ó por $c'_{k,1} = c_{k,1} - \delta\beta a = \sum \delta_{i,r}(\beta_i a_r)$. Si $c_{k,1}$ fue reemplazado por $c'_{k,1}$ aplicamos nuevamente el Lema anterior a la m_k - upla $(c'_{k,1}, c_{k,2}, \dots, c_{k,m_k})$. Reiterando este proceso se obtiene el reemplazo deseado. \square

Estamos en condiciones ahora de demostrar el Teorema 1.4.

Demostración del Teorema 1.4. Sea $\phi_k = (c_{k,1}, \dots, c_{k,m_k}) : \coprod P_j^{d_j, k} \rightarrow \tau_{\widehat{P}_k}(P_k)$ un isomorfismo. Por el Lema 1.5 existe una m_k - upla $\mathcal{D}_k = (d_{k,1}, \dots, d_{k,m_k})$ con cada $d_{k,i}$ de la forma βa , donde β es una flecha que no es un lazo, a es un monomio en lazos y tal que \mathcal{D}_k y ϕ_k tienen la misma imagen. De aquí $\mathcal{D}_k : \coprod_{(P_j, P_k) \neq 0} P_j^{d_j, k} \rightarrow \tau_{\widehat{P}_k}(P_k)$ es un isomorfismo.

Luego la condición c) se satisface porque \mathcal{D}_k es un monomorfismo. Probemos ahora la condición b).

Sea β una flecha con origen en k . Veamos que β aparece en la m_k - upla \mathcal{D}_k . Esto sigue de que el ideal I es admisible.

En efecto, como β no es un lazo y comienza en k , $\beta \in \tau_{\bar{P}_k}(P_k)$. Luego β está en la imagen de \mathcal{D}_k y de aquí tiene una expresión de la forma $\beta = \sum \gamma_{\beta,i} d_{k,i}$. Esto contradice el hecho que todas las relaciones son admisibles pues cada $d_{k,i}$ es un camino en $\underline{r}KQ$ y es diferente de β . Hemos probado entonces b).

Probamos ahora a). Sea \mathcal{D}_k como arriba en la demostración de b). Para cada flecha β que no es un lazo y cada monomio a' en los lazos en el vértice k , consideremos la expresión de $\beta a'$ en los $\beta^{(k)}a$, $\beta a' = \sum_{\beta^{(k)}a \in \mathcal{D}_k} \gamma_{\beta a', \beta^{(k)}a} \beta^{(k)}a$ y sea $S' = \{\beta a' - \sum_{\beta^{(k)}a \in \mathcal{D}_k} \gamma_{\beta a', \beta^{(k)}a} \beta^{(k)}a : \beta \text{ es una flecha con origen en } k, a' \text{ un monomio en lazos en } k, k = 1, \dots, n\}$.

Veamos que $S' \cup \mathcal{L}$ genera al ideal I de las relaciones de Λ .

De acuerdo a la Proposición 1.2, el conjunto $S \cup \mathcal{L}$ genera I , donde

$S = \{\delta - \sum_{\beta^{(k)}a \in \mathcal{D}_k} \gamma_{\delta, \beta^{(k)}a} \beta^{(k)}a \in KQ(\Lambda), \delta \text{ camino de } k \text{ en } j, j \neq k\}$. Basta probar entonces que toda relación $\delta - \sum_{\beta^{(k)}a \in \mathcal{D}_k} \gamma_{\delta, \beta^{(k)}a} \beta^{(k)}a$ de S pertenece al ideal generado por $S' \cup \mathcal{L}$.

Como $k \neq j$, el camino δ puede escribirse como $\delta = \gamma \beta a'$ donde a' es un monomio en lazos en k , β es una flecha que no es un lazo y γ es un camino de $e(\beta)$ en j .

Sea $\beta a' = \sum_{\beta^{(k)}a \in \mathcal{D}_k} \gamma_{\beta a', \beta^{(k)}a} \beta^{(k)}a$ la expresión de $\beta a'$ en los $\beta^{(k)}a$. Multiplicando esta expresión por γ obtenemos:

$$\delta = \gamma \beta a' = \sum_{\beta^{(k)}a \in \mathcal{D}_k} (\gamma \cdot \gamma_{\beta a', \beta^{(k)}a}) \beta^{(k)}a$$

De aquí

$$\delta - \sum_{\beta^{(k)}a \in \mathcal{D}_k} \gamma_{\delta, \beta^{(k)}a} \beta^{(k)}a = \sum_{\beta^{(k)}a \in \mathcal{D}_k} (\gamma \cdot \gamma_{\beta a', \beta^{(k)}a} - \gamma_{\delta, \beta^{(k)}a}) \beta^{(k)}a = 0$$

en $\Lambda = KQ/I$. Por c) sabemos que los elementos $z_{\beta^{(k)}a} = \gamma \cdot \gamma_{\beta a', \beta^{(k)}a} - \gamma_{\delta, \beta^{(k)}a}$ de KQ están en I , para todo $\beta^{(k)}a \in \mathcal{D}_k$. Luego

$$\begin{aligned} \delta - \sum_{\beta^{(k)}a \in \mathcal{D}_k} \gamma_{\delta, \beta^{(k)}a} \beta^{(k)}a &= \gamma \beta a' - \sum_{\beta^{(k)}a \in \mathcal{D}_k} (\gamma_{\delta, \beta^{(k)}a} + \gamma \gamma_{\beta a', \beta^{(k)}a} - \gamma \gamma_{\beta a', \beta^{(k)}a}) \beta^{(k)}a \\ &= \gamma \cdot (\beta a' - \sum_{\beta^{(k)}a \in \mathcal{D}_k} \gamma_{\beta a', \beta^{(k)}a} \beta^{(k)}a) + \sum_{\beta^{(k)}a \in \mathcal{D}_k} z_{\beta^{(k)}a} \beta^{(k)}a \end{aligned}$$

El primer sumando está en el ideal (S') generado por S' , y el segundo pertenece a $I \cdot \underline{r}KQ$. Esto prueba que $S \subseteq (S') + I \cdot \underline{r}KQ$. Como $S \cup \mathcal{L}$ genera I sigue que $I \subseteq (S' \cup \mathcal{L}) + I \cdot \underline{r}KQ$. Del Lema de Nakayama sigue entonces que $I = (S \cup \mathcal{L})$. Esto termina la demostración de a) y del Teorema 1.4. \square

La siguiente Observación es consecuencia inmediata del Teorema 1.4 y la Observación 1.1 y será de gran utilidad en los próximos resultados.

Observación 1.7. Para cada $k > 0$ elegimos el isomorfismo $\phi_k : \coprod P_j^{d_{j,k}} \longrightarrow \tau_{\widehat{P}_k}(P_k)$ como en el Teorema 1.4. Entonces la Observación 1.1 se puede reescribir de la siguiente manera. Todo camino $\delta : k \longrightarrow j$, $k \neq j$ tiene una expresión única de la forma:

$$\delta = \sum_{\beta^{(k)} a \in S} \gamma_{\delta, \beta^{(k)} a} (\beta^{(k)} a)$$

donde cada $\gamma_{\delta, \beta^{(k)} a}$ es combinación lineal de caminos del final de $\beta^{(k)}$ en el final j de δ y $S = \{\beta^{(k)} a \in \phi_k : \text{final de } \beta^{(k)} \leq \text{final } j \text{ de } \delta\}$.

Como otra consecuencia inmediata del Teorema 1.4 tenemos la siguiente observación sencilla.

Observación 1.8. Sea Q un diagrama con lazos, i un vértice de Q y supongamos que las únicas flechas de Q con origen en i son lazos. Entonces para cada lazo α en i , la única relación de $\Lambda = KQ/I$ que involucra al lazo α es $\alpha^j = 0$, para algún $j > 0$. \square

Es bien conocido que el álgebra de caminos del diagrama $\cdot \rightrightarrows \cdot$ llamada álgebra de Kronecker, es de tipo de representación infinito. Se sabe también que el álgebra $KQ/\underline{r}^2(KQ)$ donde Q es el diagrama $\circ \circ$ es de tipo de representación infinito y de aquí también son de tipo de representación infinito KQ y KQ/I para todo ideal admisible I de KQ .

Como nuestro objetivo es clasificar las álgebras Λ con la propiedad (IIP) de tipo de representación finito, podemos suponer que ninguno de los diagramas anteriores es subdiagrama de $Q(\Lambda)$. O sea, que $Q(\Lambda)$ es un diagrama sin flechas dobles y con a lo sumo un lazo en cada vértice.

Usamos los resultados de [P2] arriba mencionados para probar a continuación un teorema que da una descripción más precisa de las relaciones sobre álgebras con la propiedad (IIP) dadas por un diagrama con a lo sumo un lazo en cada vértice. Este teorema será esencial en la clasificación de las álgebras con la propiedad (IIP) de tipo de representación finito.

Teorema 1.9. Supongamos que hay un único lazo α en k y sean β_1, \dots, β_t todas las flechas con origen en k que no son lazos. Entonces la m_k -upla del Teorema 1.4 puede elegirse de la siguiente

manera:

$$(\beta_1, \beta_1\alpha, \dots, \beta_1\alpha^{r_1}, \beta_2, \beta_2\alpha, \dots, \beta_2\alpha^{r_2}, \dots, \beta_t, \beta_t\alpha, \dots, \beta_t\alpha^{r_t})$$

Demostración. Sea $(\beta_1\alpha^{i_1}, \beta_2\alpha^{i_2}, \dots, \beta_t\alpha^{i_t})$ $i_j \in J_j$ una m_k -upla como en el Teorema 1.4. Probaremos por inducción sobre t que esta m_k -upla puede reemplazarse por $(\beta_1, \beta_1\alpha, \dots, \beta_1\alpha^{r_1}, \beta_2, \beta_2\alpha, \dots, \beta_2\alpha^{r_2}, \dots, \beta_t, \beta_t\alpha, \dots, \beta_t\alpha^{r_t})$ donde $r_j + 1$ es el cardinal de J_j para cada j .

Sea $j_i = e(\beta_i)$. Podemos suponer que $j_1 < j_2 < \dots < j_t$ pues en caso contrario renombramos las flechas β_i .

De la Observación 1.7 sigue que cualesquiera sean i y s , la expresión de $\beta_i\alpha^s$ en los $\beta_1\alpha^{i_1}, \dots, \beta_t\alpha^{i_t}$, $i_j \in J_j$, $j = 1, \dots, t$ es de la forma:

$$(1) \quad \beta_i\alpha^s = \sum_{l=1}^i \sum_{i_l \in J_l} \gamma_{i_l, s} \beta_l\alpha^{i_l}$$

Veremos primero que se pueden reemplazar todos los productos $\beta_1\alpha^{i_1}$, $i_1 \in J_1$ por $\beta_1, \beta_1\alpha, \dots, \beta_1\alpha^{r_1}$.

El Teorema 1.4 asegura que la flecha β_1 aparece entre los productos $\beta_1\alpha^{i_1}$, $i_1 \in J_1$. Supongamos por el absurdo que sólo es posible reemplazar r de los restantes productos $\beta_1\alpha^{i_1}$, $i_1 \in J_1$, con $r < r_1$. Obtenemos entonces una nueva m_k -upla

$(\beta_1\alpha^{i_1}, \dots, \beta_t\alpha^{i_t})_{i_j \in J_j}$ donde $J_1 = J'_1 \cup J''_1$, $J'_1 = \{0, 1, \dots, r\}$ y $\min \{i \in J''_1\} = r + d$ con $d > 1$. Consideramos todos los posibles conjuntos J_1 con $\text{card } J'_1 = r + 1$ y elegimos uno con d minimal.

Teniendo en cuenta la expresión (1) resulta que para cada $0 < j < d$, $\beta_1\alpha^{r+j}$ tiene una expresión única de la forma:

$$(2) \quad \beta_1\alpha^{r+j} = \sum_{i=0}^r \gamma_{i,j} \beta_1\alpha^i + \sum_{i \in J''_1} \gamma_{i,j} \beta_1\alpha^i, \text{ con } \gamma_{i,j} \in \mathbb{Z} \Lambda, \forall i \in J''_1$$

En efecto: si para algún $i_0 \in J''_1$, $\gamma_{i_0,j} \notin \mathbb{Z} \Lambda$ entonces $\gamma_{i_0,j}$ es inversible y por lo tanto

$$\beta_1\alpha^{i_0} = \gamma_{i_0,j}^{-1} \cdot (\beta_1\alpha^{r+j} - \sum_{i=0}^r \gamma_{i,j} \beta_1\alpha^i - \sum_{\substack{i \in J''_1 \\ i \neq i_0}} \gamma_{i,j} \beta_1\alpha^i)$$

es decir, se puede reemplazar $\beta_1 \alpha^{i_0}$ por $\beta_1 \alpha^{r+j}$, con $0 < j < d$, lo que contradice la minimalidad de d . En particular, $\gamma_{(r+d),j} \in \underline{r} \Lambda$ para todo $0 < j < d$.

Haciendo $j = 1$ en la igualdad anterior (2), tenemos que $\beta_1 \alpha^{r+d}$ tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \beta_1 \alpha^{r+d} &= (\beta_1 \alpha^{r+1}) \cdot \alpha^{d-1} = \sum_{i=0}^r \gamma_{i,1} \beta_1 \alpha^{i+d-1} + \sum_{i \in J_1''} \gamma_{i,1} \beta_1 \alpha^{i+d-1} \\ &= \underbrace{\sum_{\substack{0 \leq i+d-1 \leq r \\ i \in J_1'}} \gamma_{i,1} \beta_1 \alpha^{i+d-1} + \sum_{\substack{i+d-1 > r \\ i \in J_1'}} \gamma_{i,1} \beta_1 \alpha^{i+d-1}}_{(*)} + \underbrace{\sum_{i \in J_1''} \gamma_{i,1} \beta_1 \alpha^{i+d-1}}_{(**)} \end{aligned}$$

Reemplazamos en (*) y (**) a cada $\beta_1 \alpha^{i+d-1}$ por su expresión en los $\beta_1 \alpha^{i_1}, \dots, \beta_t \alpha^{i_t}$, $i_j \in J_j$, $j = 1, \dots, t$. Veremos que el coeficiente de $\beta_1 \alpha^{r+d}$ tanto en (*) como en (**) está en $\underline{r} \Lambda$, lo cual es una contradicción por la unicidad de la expresión de $\beta_1 \alpha^{r+d}$ en los $\beta_1 \alpha^{i_1}, \dots, \beta_t \alpha^{i_t}$.

Recordemos que $r+j \in J''$, $\forall j = 1, \dots, t$. La segunda afirmación resulta de que $\gamma_{i,1} \in \underline{r} \Lambda$ si $i \in J_1''$. Suponemos entonces $i \in J_1'$, esto es, $i < r+1$ y estudiamos el coeficiente de $\beta_1 \alpha^{r+d}$ en (*).

Es claro que el coeficiente de $\beta_1 \alpha^{r+d}$ es cero en el primer sumando de (*).

Notemos que como estamos considerando $i < r+1$, en el segundo miembro de (*) se tiene $r < i+d-1 < r+d$. De (2) sigue entonces que el coeficiente de $\beta_1 \alpha^{r+d}$ en la expresión de $\beta_1 \alpha^{i+d-1}$, en los $\beta_1 \alpha^{i_1}, \dots, \beta_t \alpha^{i_t}$, está en $\underline{r} \Lambda$ lo que termina la demostración del caso $t = 1$.

Sea $t > 1$ y $1 < s \leq n$. Suponemos que se pueden reemplazar los productos $\beta_1 \alpha^{i_1}, \dots, \beta_{s-1} \alpha^{i_{s-1}}$, $i_j \in J_j$, $j = 1, \dots, s-1$ por $\beta_1, \beta_1 \alpha, \dots, \beta_1 \alpha^{r-1}, \dots, \beta_{s-1}, \beta_{s-1} \alpha, \dots, \beta_{s-1} \alpha^{r_{s-1}}$ y veremos que también se pueden reemplazar de la misma forma los $\beta_s \alpha^{i_s}$, $i_s \in J_s$.

De manera análoga al caso $t = 1$ suponemos por el absurdo que no se pueden reemplazar todos los productos $\beta_s \alpha^{i_s}$, $i_s \in J_s$ y elegimos J_s tal que $J_s = J_s' \cup J_s''$ con $J_s' = \{0, 1, \dots, r\}$ maximal, $\min \{i \in J_s''\} = r+d$ y $d > 1$ minimal.

Por la Observación 1.7 tenemos que para cada $0 < j < d$, $\beta_s \alpha^{r+j}$ tiene una expresión única de

la forma:

$$\beta_s \alpha^{r+j} = \sum_{l_1=0}^{r_1} \gamma_{l_1,j} \beta_1 \alpha^{l_1} + \sum_{l_2=0}^{r_2} \gamma_{l_2,j} \beta_2 \alpha^{l_2} + \cdots + \sum_{l_{s-1}=0}^{r_{s-1}} \gamma_{l_{s-1},j} \beta_{s-1} \alpha^{l_{s-1}} +$$

$$+ \left(\sum_{l_s=0}^r \gamma_{l_s,j} \beta_s \alpha^{l_s} + \sum_{l_s \in J_s''} \gamma_{l_s,j} \beta_s \alpha^{l_s} \right)$$

con $\gamma_{l_s,j} \in \underline{r} \Lambda$, si $l_s \in J_s''$ (por la minimalidad de d).

Haciendo $j = 1$ en la igualdad anterior se tiene que la expresión de $\beta_s \alpha^{r+d}$ en los $\beta_1 \alpha^{i_1}, \dots, \beta_t \alpha^{i_t}$, con $0 \leq i_n \leq r_n$ para $n = 1, \dots, s-1$ y $i_n \in J_n$ si $n > s-1$, es la siguiente:

$$(3) \quad \beta_s \alpha^{r+d} = (\beta_s \alpha^{r+1}) \alpha^{d-1} = \sum_{l_1=0}^{r_1} \gamma_{l_1,1} \beta_1 \alpha^{l_1+d-1} + \cdots + \sum_{l_{s-1}=0}^{r_{s-1}} \gamma_{l_{s-1},1} \beta_{s-1} \alpha^{l_{s-1}+d-1}$$

$$+ \underbrace{\left(\sum_{l_s=0}^r \gamma_{l_s,1} \beta_s \alpha^{l_s+d-1} + \sum_{l_s \in J_s''} \gamma_{l_s,1} \beta_s \alpha^{l_s+d-1} \right)}_{(*)}$$

Nuevamente, reemplazando en (3) cada $\beta_i \alpha^{l_i+d-1}$, $i = 1, \dots, s$ por su expresión en los $\beta_1 \alpha^{i_1}, \dots, \beta_t \alpha^{i_t}$, $0 \leq i_n \leq r_n$ para $n = 1, \dots, s-1$, $i_n \in J_n$ para $n > s-1$ y utilizando la Observación 1.7 tenemos que el coeficiente de $\beta_s \alpha^{r+d}$ en (3) es cero salvo en (*). Recordemos que estamos suponiendo que $e(\beta_1) < \cdots < e(\beta_t)$. Procediendo como en el caso $t = 1$, se prueba que el coeficiente de $\beta_s \alpha^{r+d}$ en (3) (*) está en $\underline{r} \Lambda$, lo cual es una contradicción. \square

Observación 1.10. Como consecuencia inmediata del teorema anterior y el Teorema 1.4 obtenemos la siguiente descripción de las relaciones de $\Lambda = KQ/I$ cuando Λ tiene la propiedad (IIP) y existe a lo sumo un lazo en k para todo k .

Sean $\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \dots, \beta_{n_k}^{(k)}$ todas las flechas con origen en k que no son lazos y α un lazo en k . Elegimos la m_k -upla ϕ_k como en el Teorema anterior, es decir

$$(\beta_1^{(k)}, \beta_1^{(k)} \alpha, \dots, \beta_1^{(k)} \alpha^{r_{1,k}}, \beta_2^{(k)}, \beta_2^{(k)} \alpha, \dots, \beta_2^{(k)} \alpha^{r_{2,k}}, \dots, \beta_{n_k}^{(k)}, \beta_{n_k}^{(k)} \alpha, \dots, \beta_{n_k}^{(k)} \alpha^{r_{n_k,k}})$$

y sea para cada $1 \leq s \leq n_k$

$$\beta_s^{(k)} \alpha^{r_{s,k}+1} = \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{i_j=0}^{r_{j,k}} \gamma_{i_j,j}^{(s)} \beta_j^{(k)} \alpha^{i_j}$$

la expresión de $\beta_s^{(k)} \alpha^{r_s, k+1}$ como imagen de la m_k -upla elegida. Entonces el ideal I de las relaciones de Λ está generado por el conjunto \mathcal{L} de todas las relaciones en los lazos en Λ y el conjunto

$$\{ \beta_s^{(k)} \alpha^{r_s, k+1} - \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{i_j=0}^{r_{j,k}} \gamma_{i_j, j}^{(s)} \beta_j^{(k)} \alpha^{i_j}, s = 1, \dots, n_k, k > 0 \}$$

□

Observación.1.11. Otra consecuencia del Teorema 1.9 es la siguiente. Sea Q un diagrama que contiene al diagrama $\begin{array}{ccc} & \beta & \\ \circlearrowleft & a & \xrightarrow{\beta} & b & \circlearrowright \\ \alpha & & & & \gamma \end{array}$ como subdiagrama y sea $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP).

Si $\alpha^i = 0$, $\beta\alpha = \gamma^t\beta$ son relaciones de Λ entonces $\gamma^{it} = 0$ en Λ .

En efecto, por el Teorema 1.9, $\beta, \beta\alpha, \dots, \beta\alpha^{i-1}$ son coordenadas del isomorfismo

$\phi_a : \prod_{i \neq a, b} P_i \longrightarrow \tau_{\hat{P}_a} P_a$. Por otro lado, se tiene la siguiente igualdad en Λ :

$$0 = \beta\alpha^i = \gamma^{it}\beta = \phi_a(\gamma^{it})$$

y como ϕ_a es un isomorfismo, $\gamma^{it} = 0$ en Λ . □

Ejemplos.

1) Sea Q el diagrama $\begin{array}{ccc} & \beta & 2 \\ \circlearrowleft & \xrightarrow{\beta} & \circlearrowright \\ \alpha & & \gamma \end{array}$

a) $\Lambda = KQ / \langle \alpha^3, \beta\alpha, \gamma^2 \rangle$ es un álgebra con la propiedad (IIP) tal que $\tau_{\hat{P}_1}(P_1) = \tau_{P_2}(P_1) \simeq P_2$, $\tau_{\hat{P}_2}(P_2) = \tau_{P_1}(P_2) = 0$. Por el Teorema 1.9, β define un isomorfismo $P_2 \longrightarrow \tau_{P_2}(P_1)$.

Notemos que $\Lambda = KQ / \langle \alpha^i, \beta\alpha, \gamma^j \rangle$ es también un álgebra con la propiedad (IIP) con $\tau_{P_2}(P_1) \simeq P_2$ y $\tau_{P_1}(P_2) = 0$, cualesquiera sean i, j .

Otro ejemplo de álgebras con la propiedad (IIP) definida por el diagrama Q con relaciones es el siguiente:

b) $\Lambda = KQ / \langle \alpha^4, \beta\alpha - \gamma\beta, \gamma^2 \rangle$. Aquí $\tau_{P_2}(P_1) \simeq P_2$ también, pero a diferencia del ejemplo a) el grado de nilpotencia de α en Λ determina las posibles potencias no nulas de γ en Λ como prueba la Observación 1.11.

c) $\Lambda = KQ / \langle \alpha^4, \beta\alpha^2 - \gamma\beta, \gamma^2 \rangle$ tiene la propiedad (IIP), $\tau_{P_2}(P_1) \simeq P_2^2$ y $(\beta, \beta\alpha)$ define un isomorfismo de $P_2^2 \longrightarrow \tau_{P_2}(P_1)$.

En forma análoga a la Observación.1.11, usando que $(\beta, \beta\alpha)$ es un isomorfismo de $P_2 \longrightarrow \tau_{P_2}(P_1)$, se prueba que si $\alpha^i = \beta\alpha^2 - \gamma\beta = 0$ en Λ y Λ tiene la propiedad (IIP) entonces $\gamma^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} = 0$ donde $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ denota la parte entera de $\frac{i}{2}$.

2) Sea Q el diagrama $\begin{array}{ccc} & 1 & \beta_1 & 2 \\ & \circ & \longrightarrow & \circ \\ & \alpha & & \end{array}$

$\Lambda = KQ / \langle \alpha^2, \beta_2\alpha, \beta_1\alpha - \delta\beta_2 \rangle$ es un álgebra con la propiedad (IIP), $\tau_{\hat{P}_1}(P_1) = \tau_{P_2} \amalg P_3(P_1) \simeq P_2 \amalg P_3$ y un isomorfismo está dado por (β_1, β_2) . Probaremos más adelante que esta álgebra es de tipo de representación finito.

$\Lambda = KQ / \langle \alpha^2, \beta_1\alpha - \delta\beta_2, \beta_2\alpha^2 \rangle$ es un ejemplo de un álgebra con la propiedad (IIP) con $\tau_{\hat{P}_1}(P_1) \simeq P_2 \amalg P_3^2$ de tipo de representación infinito como probaremos luego. De acuerdo al Teorema 1.9, $(\beta_1, \beta_2, \beta_2\alpha)$ define un isomorfismo entre $\tau_{\hat{P}_1}(P_1)$ y $P_2 \amalg P_3^2$.

2. GRUPO FUNDAMENTAL DE UN GRAFO.

CUBRIMIENTO TOPOLOGICO UNIVERSAL DE UN GRAFO ORIENTADO

Informalmente podemos decir que un *grafo* es un espacio topológico que consiste de una colección de puntos, llamados *vértices*, y una colección de *lados*. Cada lado es homeomorfo a un intervalo de la recta real y une dos vértices ó es homeomorfo a un círculo y une un vértice dado con sí mismo.

Esta sección esta dedicada a describir el grupo fundamental de un grafo y mostrar como se construye un cubrimiento topológico universal de un grafo orientado. Con respecto al grupo fundamental de un grafo enunciaremos importantes y conocidos resultados que no demostraremos aquí y cuyas demostraciones pueden verse en [Ma].

Comenzamos con la definición de grafo como objeto topológico.

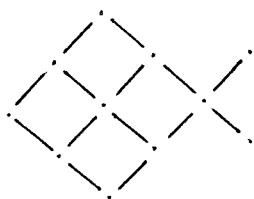
Definición. Un *grafo* es un par que consiste de un espacio de Hausdorff X y un subespacio X_0 , llamado “el conjunto de vértices de X ”, que satisface las siguientes condiciones:

- a) X_0 es un subespacio cerrado y discreto de X .
- b) $X - X_0$ es la unión disjunta de subconjuntos abiertos ℓ_i , donde cada ℓ_i es homeomorfo a un intervalo abierto de la recta real. Los abiertos ℓ_i son llamados “lados”.
- c) Para cada ℓ_i su borde $\bar{\ell}_i - \ell_i$ es un subconjunto de X_0 que consiste de uno o dos puntos. Si $\bar{\ell}_i - \ell_i$ consiste de dos puntos entonces el par $(\bar{\ell}_i, \ell_i)$ es homeomorfo al par $([0, 1], (0, 1))$; si $\bar{\ell}_i - \ell_i$ consiste de un punto entonces el par $(\bar{\ell}_i, \ell_i)$ es homeomorfo al par $(S_1, S_1 - \{1\})$ donde S_1 es el círculo unitario del plano.
- d) X tiene la topología débil. Esto es: un subconjunto $A \subset X$ es cerrado (abierto) si y sólo si $A \cap \bar{\ell}_i$ es cerrado (abierto) para cada lado ℓ_i .

Notemos que esta definición de grafo coincide con la definición de complejo CW unidimensional, es decir, topológicamente un grafo es un complejo CW y por lo tanto toda la teoría de complejos CW es aplicable.

Ejemplos.

1)



es un grafo conexo.

- 2) Para cada entero $n > 0$, sea C_n el círculo del plano xy con centro en el punto $(1/n, 0)$ y radio $1/n$. Sea X la unión de todos los círculos C_n y sea $X_0 = \{(0, 0)\}$, es decir, existe sólo un vértice. Es fácil verificar que las condiciones a), b) y c) se satisfacen. Sin embargo la condición d) no se satisface. En efecto, $A = \{(1/n, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un subconjunto de X tal que $A \cap \bar{\ell}_i$ es cerrado para cada lado ℓ_i pero A no es cerrado con la topología del plano inducida en X .

Es importante aclarar que este tipo de espacios (ejemplo 2)) no son objeto de estudio en este trabajo pero el ejemplo ayuda a comprender el significado de la condición d) que en el caso en que X tiene sólo un número finito de lados se satisface trivialmente pero puede no satisfacerse si X tiene un número infinito de lados.

Un lado ℓ de un grafo está **orientado** si se ha elegido una dirección positiva para el mismo, o sea, un orden en $\bar{\ell} - \ell$. Esta orientación se indica poniendo una flecha con origen en el menor elemento y final en el mayor elemento de $\bar{\ell} - \ell$. Si $\bar{\ell}$ es homeomorfo a un círculo y uno el vértice x_0 con sí mismo se pone una flecha de x_0 en x_0 . Llamaremos vértice **inicial**, $s(\ell)$, de un lado orientado ℓ al vértice de comienzo de la flecha en ℓ y vértice **final**, $e(\ell)$, de ℓ al vértice final de la flecha en ℓ . Es claro que todo lado tiene dos posibles orientaciones.

Un grafo se dice orientado si todos sus lados lo están y es lo que se denomina en teoría de representaciones un **diagrama**.

Si Q es un diagrama, designaremos con Q^{op} al diagrama que tiene el mismo grafo que Q y orientación opuesta, es decir, cada lado de Q^{op} está orientado en sentido opuesto al correspondiente lado en Q . Si ℓ es un lado en Q indicaremos ℓ^{-1} al correspondiente lado en Q^{op} .

Definición. Si a y b son vértices de un diagrama Q llamaremos **paseo** en Q de a en b a una sucesión finita de lados orientados, o sea una sucesión finita de flechas, $\ell_r \dots \ell_2 \ell_1$ con $\ell_i \in Q$ ó

$\ell_i \in Q^{op}$, $s(\ell_1) = a$, $e(\ell_r) = b$, y tal que el vértice final de ℓ_{i-1} coincide con el vértice inicial de ℓ_i para todo i . El paseo se dice *reducido* si $\ell_i \neq \ell_{i-1}^{-1}$ para todo i , esto es ℓ_i y ℓ_{i-1} no son el mismo lado con orientaciones opuestas. Un paseo se dice *cerrado* si comienza y termina en el mismo vértice.

Un caso especial de grafos conexos son los denominados árboles. Un *árbol* es un grafo conexo que no contiene paseos reducidos cerrados.

Notemos que todo subgrafo conexo de un árbol es también un árbol y que en un árbol todo par de vértices distintos puede ser unido por un único paseo reducido.

El teorema principal acerca de la topología de un árbol es el siguiente que dice que el grupo fundamental de un árbol con base en cualquier vértice es trivial.

Teorema. *Todo árbol es contráctil.*

Es claro que todo grafo contiene subgrafos que son árboles, por ejemplo un subgrafo que consiste de un sólo vértice. El conjunto de todos los árboles que son subgrafos de un grafo dado es parcialmente ordenado por inclusión y es fácil probar, usando el Lema de Zorn, que contiene un elemento maximal.

El siguiente Teorema (c.f [Ma], cap.6, teo.4.3) trata sobre la naturaleza de los árboles maximales en un grafo.

Teorema. *Sea X un grafo conexo y T un subgrafo de X que es un árbol. Entonces T es un árbol maximal si y sólo si T contiene todos los vértices de X .*

Sea X un grafo conexo, v_0 un vértice de X y T un árbol maximal en X . Sea $\{\ell_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ el conjunto de lados de X no contenidos en T . Elegimos una orientación para cada uno de los lados ℓ_λ y sean a_λ, b_λ los vértices inicial y final de ℓ_λ respectivamente. Asociamos a cada lado ℓ_λ un elemento $\alpha_\lambda \in \pi(Q, v_0)$ como sigue: dado que existe un único paseo reducido A_λ en T de v_0 en a_λ y un único paseo reducido B_λ en T de b_λ en v_0 , sea α_λ la clase de homotopía del paseo $B_\lambda \ell_\lambda A_\lambda$. Si $a_\lambda = v_0$ omitimos el paseo A_λ y análogamente si $b_\lambda = v_0$ omitimos el paseo B_λ . Enunciamos a continuación un conocido teorema acerca del grupo fundamental de un grafo conexo (c.f. [Ma]).

Teorema. El grupo fundamental, $\pi(X, v_0)$, de un grafo conexo X con base en el vértice v_0 es un grupo libre sobre el conjunto de generadores $\{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$.

Notación. Sea Q un diagrama y α un paseo en Q . Notaremos $[\alpha]$ a la clase de homotopía de α .

Ejemplos.

1) Sea Q el diagrama $\begin{array}{c} \cdot \\ \xrightarrow{\gamma} \cdot \\ \xrightarrow{\alpha} \cdot \\ \xrightarrow{\beta} \cdot \\ \cdot \end{array}$

Sea T el siguiente árbol maximal de Q $\begin{array}{c} \cdot \\ \xrightarrow{\gamma} \cdot \\ \xrightarrow{\beta} \cdot \\ \cdot \end{array}$

Entonces $\pi(Q, 1)$ es el grupo libre generado por $[\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha\gamma]$, o sea, $\pi(Q, 1) \simeq \mathbb{Z}$.

2) Sea Q el diagrama $\begin{array}{c} \cdot \\ \xrightarrow{\beta} \cdot \\ \circ \\ \alpha \end{array}$

El grupo fundamental $\pi(Q, 1)$ es isomorfo a \mathbb{Z} y un generador es $[\alpha]$, lo cual sigue inmediatamente de la descripción anterior sobre los generadores del grupo fundamental eligiendo $\begin{array}{c} \cdot \\ \xrightarrow{\beta} \cdot \\ \cdot \end{array}$ como árbol maximal en Q .

En este caso puede obviarse esta construcción pues $\begin{array}{c} \cdot \\ \circ \end{array}$ es un retracto por deformación del diagrama Q y es bien sabido que el grupo fundamental del círculo es isomorfo a \mathbb{Z} . Notar que el grupo fundamental con base en el vértice 2 también es isomorfo a \mathbb{Z} y un generador es $[\beta\alpha\beta^{-1}]$.

3) Sea Q el diagrama $\begin{array}{c} \cdot \\ \xrightarrow{\alpha_0} \cdot \\ \xrightarrow{\alpha_1} \cdot \\ \xrightarrow{\beta_0} \cdot \\ \xrightarrow{\beta_1} \cdot \\ \cdot \end{array}$

Elegimos el siguiente árbol maximal T en Q $\begin{array}{c} \cdot \\ \xrightarrow{\beta_0} \cdot \\ \xrightarrow{\beta_1} \cdot \\ \cdot \end{array}$

Entonces el grupo fundamental, $\pi(Q, 1)$, de Q con base en el vértice 1 es un grupo libre con dos generadores $a = [\beta_0^{-1}\alpha_0]$ y $b = [\beta_0^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1\beta_0]$.

Nos ocuparemos brevemente ahora de espacios de cubrimiento de un grafo. Comenzamos enunciando un conocido teorema que dice que cualquier espacio de cubrimiento de un grafo es también un grafo en una manera natural. La demostración de este teorema puede verse en [Ma] pag. 201.

Teorema. Sea X un grafo conexo con conjunto de vértices X_0 . Sea (Y, p) un espacio de cubrimiento de X y sea $Y_0 = p^{-1}(X_0)$. Entonces, Y es un grafo con conjunto de vértices Y_0 .

En particular, si Q es un diagrama con conjunto de vértices Q_0 y (\tilde{Q}, p) es un cubrimiento de Q

entonces \tilde{Q} es un diagrama con conjunto de vértices $p^{-1}(Q_0)$. Los lados de \tilde{Q} están orientados de la siguiente manera: si $\tilde{\ell}$ es un lado en \tilde{Q} que une los vértices \tilde{a} y \tilde{b} y $p(\tilde{a}) = a$, $p(\tilde{b}) = b$ y $p(\tilde{\ell}) = \ell$ entonces ponemos una flecha en $\tilde{\ell}$ de \tilde{a} en \tilde{b} si hay una flecha ℓ de a en b en Q .

Describiremos ahora como se construye un cubrimiento topológico universal W de un diagrama Q con base en un vértice v_0 de Q .

El conjunto de vértices W_0 de W es el conjunto de clases de homotopía de paseos en Q con origen en v_0 . Las flechas en W se definen de la siguiente manera. Sean w_1 y w_2 vértices de W . Para cada flecha δ en Q hay una flecha $\bar{\delta}_{w_1, w_2} : w_1 \rightarrow w_2$ si y sólo si existen paseos representantes q_1 y q_2 en Q de w_1 y w_2 respectivamente tal que $q_2 = \delta q_1$.

Notemos que una flecha δ en Q puede originar varias flechas en W que difieren en sus extremos. A pesar de ello, con frecuencia designaremos $\bar{\delta} : w_1 \rightarrow w_2$ a $\bar{\delta}_{w_1, w_2}$.

La proyección de cubrimiento $p : W \rightarrow Q$ está dada de la siguiente manera: para cada vértice w_0 de W , $p(w_0) = e(\alpha)$, donde α es cualquier paseo en Q representante de w_0 y si $\bar{\delta}$ es una flecha en W de w_1 en w_2 originada por una flecha δ en Q tal que existen paseos q_1 y q_2 en Q representantes de w_1 y w_2 respectivamente, con $q_2 = \delta q_1$, entonces $p(\bar{\delta}) = \delta$.

Observemos que la proyección que acabamos de definir induce un morfismo de K -álgebras de KW en KQ y también un funtor K -lineal F entre las K -categorías definidas a partir de los diagramas W y Q .

El grupo fundamental $\pi(Q, v_0)$ del diagrama Q con base en el vértice v_0 de Q actúa libre y transitivamente sobre W de la siguiente manera: si $[\alpha] \in \pi(Q, v_0)$ y w_0 es un vértice de W y q_0 es un paseo en Q representante de w_0 entonces $[\alpha].w_0 = [q_0\alpha]$ y si $\bar{\delta}$ es una flecha en W que une los vértices w_0 y w_1 originada por una flecha δ en Q tales que existen paseos q_0 y q_1 en Q representantes de w_0 y w_1 respectivamente, con $q_1 = \delta q_0$ entonces definimos $[\alpha].\bar{\delta}$ como la flecha $[q_0\alpha] \rightarrow [q_1\alpha]$. (Notar que esta flecha también está originada por δ pero tiene distintos vértices inicial y final que $\bar{\delta}$).

En la próximas secciones trataremos los llamados funtores de cubrimiento y funtores de cubrimiento Galois entre K -categorías definidos por la acción de un grupo y veremos que el funtor F inducido por p es un cubrimiento Galois de la K -categoría Λ_Q , definido por la acción del grupo

fundamental $\pi(Q, v_0)$ sobre W .

Finalizamos esta sección con un ejemplo que muestra cual es el cubrimiento universal del diagrama $\cdot \rightarrow \cdot \rightrightarrows \cdot$.

Ejemplo.

Sea Q el diagrama $\begin{matrix} & \gamma & \alpha \\ 1 & \rightarrow & 2 \rightrightarrows 3 \\ & \beta & \end{matrix}$. Construimos el cubrimiento universal de Q con base en 1.

Ya hemos visto que $\pi(Q, 1) \simeq \mathbb{Z}$ y un generador es $a = [\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha\gamma]$.

Las clases de homotopía de paseos de 1 en 1 son los elementos del grupo fundamental $\pi(Q, 1)$, es decir, las potencias enteras de a . Como la acción de $\pi(Q, 1)$ sobre el cubrimiento universal W es transitiva, las clases de homotopía de paseos de 1 en 2 son $:\gamma.a^n, n \in \mathbb{Z}$ y de paseos de 1 en 3 son de la forma $(\alpha\gamma).a^n, (\beta\gamma).a^n, n \in \mathbb{Z}$.

Luego el diagrama W es el siguiente

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longleftarrow & [\alpha^{-1}\beta\gamma] & \longrightarrow & [\beta\gamma] & \longleftarrow & [\gamma] & \longrightarrow & [\alpha\gamma] & \longleftarrow & [\beta^{-1}\alpha\gamma] & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow \gamma & & \uparrow \gamma & & \uparrow \gamma & & & & & & \\
 & & [\gamma^{-1}\alpha^{-1}\beta\gamma] & & [1] & & [\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha\gamma] & & & & & &
 \end{array}$$

3. FUNTORES DE CUBRIMIENTO GALOIS. CUBRIMIENTO GALOIS UNIVERSAL DE UNA K - CATEGORIA LOCALMENTE ACOTADA

Presentamos en esta sección la teoría de cubrimientos Galois que juega un importante rol en el estudio de álgebras y sus módulos .

En nuestro caso particular estas técnicas de cubrimientos nos permitirán resolver completamente el problema de clasificación de las álgebras con la propiedad (IIP) de tipo finito.

3.1 Cubrimientos Galois entre K - categorías localmente acotadas

Definición. Una K - *categoría* de Λ es una categoría tal que para todo par de objetos x, y de Λ el conjunto $\Lambda(x, y)$ de morfismos de x en y tiene estructura de K - espacio vectorial y las composiciones $\Lambda(x, y) \times \Lambda(y, z) \rightarrow \Lambda(x, z)$ son aplicaciones K - bilineales, cualesquiera sean los objetos x, y, z de Λ .

Definición. Diremos que Λ es una K - categoría *localmente acotada* si es de la forma $\Lambda = KQ/I$ donde Q satisface las siguientes condiciones:

- a) Q es localmente finito, esto es, el número de flechas que salen y llegan a un vértice es finito.
- b) Para cada vértice $x \in Q_0$ existe un número natural N_x tal que el ideal I de las relaciones de Λ contiene todos los caminos de longitud mayor o igual que N_x que comienzan o terminan en x .

e I es un ideal admisible de KQ , es decir, I es un ideal de KQ contenido en el ideal generado por todos los caminos de longitud ≥ 2 .

Recordemos que si Λ es una K - categoría, un Λ - módulo es un funtor $M : \Lambda^{op} \rightarrow Mod K$, donde $Mod K$ es la categoría de K - espacios vectoriales, y un Λ - módulo M es *finitamente generado* si es cociente de una suma finita de funtores representables de $\Lambda^{op} \rightarrow Mod K$.

Sea $\Lambda = KQ/I$ una K - categoría localmente acotada y G un grupo de automorfismos de Λ . Entonces el grupo G actúa sobre $Mod \Lambda$ por traslaciones, es decir, para cada Λ - módulo M y cada $g \in G$ se define $M^g = M \circ g$.

Recordemos que G actúa *libremente* sobre Λ si $g.x \neq x$ para cada objeto $x \in \Lambda$ y $g \neq 1$ en G .

Definición. Un *cubrimiento Galois* entre las K - categorías $\tilde{\Lambda}$ y Λ definido por la acción de un grupo G de automorfismos de $\tilde{\Lambda}$ es un functor $F : \tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ que satisface las siguientes condiciones:

- a) G es un grupo de automorfismos K - lineales de $\tilde{\Lambda}$ que actúa libremente sobre $\tilde{\Lambda}$.
- b) $F \circ g = F, \forall g \in G$.
- c) F es un functor suryectivo sobre objetos y G actúa transitivamente sobre la fibra $F^{-1}(a)$ para todo objeto a de Λ .
- d) F es un functor de cubrimiento, es decir, las aplicaciones inducidas:

$$\coprod_{F(y)=a} \tilde{\Lambda}(x, y) \longrightarrow \Lambda(F(x), a)$$

y

$$\coprod_{F(y)=a} \tilde{\Lambda}(y, x) \longrightarrow \Lambda(a, F(x))$$

son biyectivas para todo objeto x de $\tilde{\Lambda}$ y a de Λ .

Daremos algunos ejemplos de cubrimientos Galois.

Ejemplos 3.1.1.

- 1) Sea $\tilde{\Lambda}$ una K - categoría localmente acotada y G un grupo de automorfismos K - lineales que actúa libremente sobre $\tilde{\Lambda}$.

Se define la *categoría cociente* $\tilde{\Lambda}/G$ de la siguiente manera. Los objetos de $\tilde{\Lambda}/G$ son las órbitas determinadas por G en el conjunto de objetos de $\tilde{\Lambda}$; y si designamos con O_a la G - órbita del objeto a de $\tilde{\Lambda}$, un morfismo $f : O_a \rightarrow O_b$ en $\tilde{\Lambda}/G$ es una familia $f = ({}_y f_x) \in \prod_{\substack{x \in O_a \\ y \in O_b}} \tilde{\Lambda}(x, y)$ tal

que $g \cdot {}_y f_x = {}_{gy} f_{gx}$ para todo $g \in G$. La composición de morfismos en $\tilde{\Lambda}/G$ está dada en la forma natural.

La proyección canónica $\pi : \tilde{\Lambda} \rightarrow \tilde{\Lambda}/G$ que a cada objeto a de $\tilde{\Lambda}$ le asigna su G - órbita O_a , y a cada Λ - morfismo $f : a \rightarrow b$ la familia $\pi f = ({}_y \pi f_x) \in \prod_{\substack{x \in O_a \\ y \in O_b}} \tilde{\Lambda}(x, y)$ definida por ${}_y \pi f_x = g' f g^{-1}$

si $a = g.x, b = g'.y, g, g' \in G$, es un funtor de cubrimiento Galois definido por la acción del grupo G .

Además, π es universal con respecto a la propiedad $\pi \circ g = \pi, \forall g \in G$. Es decir, todo funtor $F : \tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ que satisface $F \circ g = F, \forall g \in G$ se factoriza a través de π , o sea, existe un funtor $H : \tilde{\Lambda}/G \rightarrow \Lambda$ tal que $F = \pi H$.

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\Lambda} & \xrightarrow{\pi} & \tilde{\Lambda}/G \\
 F \downarrow & \searrow H & \\
 \Lambda & &
 \end{array}$$

Es fácil ver que H es un isomorfismo si F es un funtor de cubrimiento Galois.

- 2) Sea $\Lambda = KQ / \langle \alpha^j \rangle$ la categoría localmente acotada definida por el diagrama $Q : \begin{array}{ccc} & 1 & \xrightarrow{\beta} & 2 \\ & \circ & & \\ & & \alpha & \end{array}$ con relaciones y sea $\tilde{\Lambda}$ la K - categoría localmente acotada definida por el siguiente diagrama infinito \tilde{Q}

$$\begin{array}{ccccc}
 & \vdots & & & \\
 a_0 & \xrightarrow{\beta_{-1}} & b_0 & & \\
 \downarrow \alpha_0 & & & & \\
 a_1 & \xrightarrow{\beta_0} & b_1 & & \\
 \downarrow \alpha_1 & & & & \\
 a_2 & \xrightarrow{\beta_1} & b_2 & & \\
 & \vdots & & &
 \end{array}$$

con las relaciones $\alpha_{i+j-1} \dots \alpha_{i+1} \alpha_i = 0, \forall i \in \mathbb{Z}$. Sea G el grupo de automorfismos de $\tilde{\Lambda}$ generado por el morfismo η definido como sigue: $\eta(a_i) = a_{i+1}, \eta(b_i) = b_{i+1}, \eta(\alpha_i) = \alpha_{i+1}, \eta(\beta_i) = \beta_{i+1}, \forall i \in \mathbb{Z}$. Entonces $G \simeq \mathbb{Z}$. El funtor $F : \tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ definido por $F(a_i) = 1, F(b_i) = 2, F(\alpha_i) = \alpha, F(\beta_i) = \beta \forall i \in \mathbb{Z}$ es un cubrimiento Galois de Λ definido por la acción del grupo G .

El funtor inducido por F del cociente $\tilde{\Lambda}/G$ en Λ que identifica O_{a_i} con 1, O_{b_i} con 2, el único morfismo de $O_{a_i} \rightarrow O_{a_i}$, inducido por las flechas α_j , con la flecha α y el único morfismo de $O_{a_i} \rightarrow O_{b_i}$, inducido por las flechas β_j , con la flecha β es el isomorfismo H mencionado en 1).

3) Sea Q un diagrama y (W, p) el cubrimiento topológico universal de Q con base en el vértice v_0 construido en la sección 2. En la misma sección mencionamos que la proyección de cubrimiento $p : W \longrightarrow Q$ induce un funtor $F_p : \Lambda_W \longrightarrow \Lambda_Q$, donde Λ_W y Λ_Q son las K - categorías construidas a partir de los diagramas W y Q respectivamente.

Es fácil ver que F_p es un funtor de cubrimiento Galois definido por la acción del grupo fundamental $\pi(Q, v_0)$ sobre W .

4) Sean Q y Q' diagramas. Una aplicación π del diagrama Q' en el diagrama Q es una función que satisface $\pi(Q'_0) \subseteq Q_0$ y $\phi(Q'_1) \subseteq Q_1$ de modo que si f es una flecha de x' en y' de Q' entonces $\pi(f)$ es una flecha de $\pi(x')$ en $\pi(y')$ de Q .

Toda aplicación de diagramas $\pi : Q' \longrightarrow Q$ induce un funtor $\bar{\pi}$ entre las categorías KQ' y KQ .

Si I es un ideal admisible de KQ , para cada par de objetos x, y de la K - categoría KQ indicaremos con $I(x, y)$ al K - subespacio de $KQ(x, y)$ de todos los caminos de x en y en KQ pertenecientes a I , es decir, $I(x, y) = KQ(x, y) \cap I$.

Sean (Q', I') y (Q, I) diagramas con relaciones, o sea, I, I' ideales admisibles de KQ y KQ' respectivamente. Se dice que una aplicación de diagramas $\pi : Q' \longrightarrow Q$ es una aplicación de diagramas con relaciones si el funtor $\bar{\pi}$ inducido satisface que $\bar{\pi}(I') \subseteq I$, es decir, $\bar{\pi}(I'(x', y')) \subseteq I(\pi(x), \pi(y))$, $\forall x', y'$ objetos de KQ' . Si π es una aplicación de diagramas con relaciones de (Q', I') en (Q, I) escribiremos $\pi : (Q', I') \longrightarrow (Q, I)$.

Toda aplicación de diagramas con relaciones $\pi : (Q', I') \longrightarrow (Q, I)$ induce canónicamente un funtor, que notaremos $K\pi$, entre las categorías cocientes KQ'/I' y KQ/I .

Sea G un grupo de automorfismos del diagrama con relaciones (Q', I') que preserve las relaciones de I' . Se dice que $\pi : (Q', I') \longrightarrow (Q, I)$ es un **cubrimiento Galois del diagrama con relaciones (Q, I) definido por el grupo G** si el funtor $K\pi$ es un cubrimiento Galois de KQ/I dado por la acción de G sobre KQ'/I' .

En el ejemplo 2) la aplicación $\pi : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \longrightarrow (Q, I)$ definida por $\pi(a_i) = 1$, $\pi(b_i) = 2$, $\pi(\alpha_i) = \alpha$, $\pi(\beta_i) = \beta$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ es un cubrimiento Galois de (Q, I) .

En el ejemplo 3) la proyección de cubrimiento p define un cubrimiento Galois del diagrama Q .

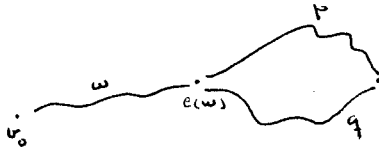
3.2. Construcción del cubrimiento Galois universal de una K - categoría localmente acotada.

Sea $\Lambda = KQ/I$ una K - categoría localmente acotada. Veremos ahora como construir un cubrimiento Galois $F : (\tilde{Q}, \tilde{I}) \longrightarrow (Q, I)$ llamado el *cubrimiento Galois universal de la presentación* (Q, I) de Λ . Tal cubrimiento está definido por la acción de un grupo cociente del grupo fundamental $\pi(Q, v_0)$ de Q .

Para cada par de vértices x, y de Q sea $I(x, y)$ el conjunto de relaciones r de I que son K - combinaciones lineales de caminos de x en y , es decir, $r = \sum_{i=1}^s \lambda_i u_i$, con u_i un camino de x en y , para todo i .

Sea $m(I)$ el conjunto de relaciones minimales de I . Recordemos que una relación $r = \sum_{i=1}^s \lambda_i u_i$ de $I(x, y)$ es *minimal* si para todo subconjunto no vacío $J \subsetneq \{1, \dots, s\}$, $\sum_{i \in J} \lambda_i u_i \notin I(x, y)$.

Sea W el cubrimiento topológico universal del diagrama Q con base en el vértice v_0 y sea $N(Q, m(I), v_0)$ el subgrupo normal del grupo fundamental $\pi(Q, v_0)$ generado por todos los elementos de la forma $[w^{-1}p^{-1}qw]$ donde w es un paseo con origen en v_0 , p y q son caminos con origen en el vértice final $e(w)$ de w tales que existe una relación minimal r de la forma $r = \mu p + \mu' q + \sum_{i=1}^s \lambda_i u_i$ con $\mu, \mu' \in K - \{0\}$ y $u_i \neq p, q$ para todo i .



El grupo $N(Q, m(I), v_0)$ actúa sobre W por restricción de la acción del grupo fundamental $\pi(Q, v_0)$. Sea \tilde{Q} el diagrama de órbitas $W/N(Q, m(I), v_0)$ determinado por la acción de $N(Q, m(I), v_0)$ sobre W definido de la siguiente manera. Los vértices de \tilde{Q} son las órbitas O_{w_1} de vértices w_1 de W . Dados dos vértices w_1, w_2 de W , existe una flecha $\bar{\delta} : O_{w_1} \longrightarrow O_{w_2}$ si y sólo si existe una flecha $\bar{\delta} : w_1 \longrightarrow w_2$ en W . Recordemos que las flechas $\bar{\delta}$ de W son inducidas por una única flecha δ de Q (c.f. sección 2)

En el ejemplo anterior 3) vimos que la proyección de cubrimiento $p : W \longrightarrow Q$ induce un funtor

de cubrimiento Galois $F_p : \Lambda_W \longrightarrow \Lambda_Q$. El funtor F_p induce un nuevo funtor F de $\Lambda_{\tilde{Q}}$ en Λ_Q definido de la siguiente manera :

$$F(O_{w_0}) = e(\alpha), \quad \text{cualquiera sea el paseo representante } \alpha \text{ de } w_0$$

$$F(\bar{\delta} : O_{w_0} \longrightarrow O_{w_1}) = \delta \iff \bar{\delta} \text{ es inducida por la flecha } \delta \text{ en } Q$$

Identificando $\Lambda_{\tilde{Q}}$ con $K\tilde{Q}$ y Λ_Q con KQ , sea \tilde{I} el ideal de $K\tilde{Q}$ generado por las preimágenes por F de elementos de $m(I)$, es decir,

$$\tilde{I} = \{F^{-1}(t), t \in m(I)\}$$

El grupo cociente $\pi(Q, I) = \pi(Q, v_0)/N(Q, m(I), v_0)$, que es llamado el **grupo fundamental de la presentación (Q, I) de Λ** , actúa libremente sobre $K\tilde{Q}/\tilde{I}$ en la forma natural, es decir, la acción del cociente $\pi(Q, I) = \pi(Q, v_0)/N(Q, m(I), v_0)$ sobre $K\tilde{Q}/\tilde{I}$ es la inducida por la acción de $\pi(Q, v_0)$ sobre W . Luego el funtor $F : \Lambda_{\tilde{Q}} \longrightarrow \Lambda_Q$ induce canónicamente un cubrimiento Galois que notaremos \tilde{F} entre las K -categorías localmente acotadas $K\tilde{Q}/\tilde{I}$ y KQ/I definido por la acción del grupo cociente $\pi(Q, I)$ sobre $K\tilde{Q}/\tilde{I}$.

El funtor de cubrimiento \tilde{F} es llamado el **cubrimiento Galois universal de la presentación (Q, I) de Λ** .

Algunas veces diremos que $K\tilde{Q}/\tilde{I}$ es el cubrimiento Galois universal de la presentación (Q, I) de Λ entendiendo que el funtor de cubrimiento Galois $K\tilde{Q}/\tilde{I} \longrightarrow KQ/I$ es el funtor \tilde{F} que acabamos de definir.

Daremos ahora algunos ejemplos para ilustrar la construcción descripta.

Ejemplos 3.2.1.

- 1) Sea $\Lambda = KQ/I$ la K -categoría definida por el diagrama $\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\beta} & 2 \\ \circ_{\alpha} & & \circ_{\gamma} \end{array}$ con relaciones $\alpha^4 = \gamma^2 = \beta\alpha^2 - \gamma\beta = 0$.

El grupo fundamental $\pi(Q, 1)$ de Q con punto base en el vértice 1 es un grupo libre con dos generadores $a = [\alpha]$ y $b = [\beta^{-1}\gamma\beta]$.

Como $b^{-1}a^2 = [\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta].[\alpha^2] = [\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta\alpha^2] \in N(Q, m(I), 1)$ se tiene que a^2 es congruente con b módulo $N(Q, m(I), 1)$. De aquí resulta que

$$\pi(Q, I) = \pi(Q, 1)/N(Q, m(I), 1) = \langle \bar{a} \rangle \simeq \mathbb{Z}, \text{ donde } \bar{a} \text{ indica la clase de } a \text{ módulo } N(Q, m(I), 1).$$

El diagrama de órbitas \tilde{Q} determinado por la acción del grupo fundamental $\pi(Q, I) = \pi(Q, 1)/N(Q, m(I), 1)$ sobre el cubrimiento topológico universal W de Λ es el siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \vdots & & \vdots \\
 & & O_1 & \longrightarrow & O_{[\beta]} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & O_a & \longleftarrow & O_{[\beta]a} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & O_{a^2} & \longrightarrow & O_{[\beta]a^2} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 (*) & & O_{a^3} & \longleftarrow & O_{[\beta]a^3} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & O_{a^4} & \longrightarrow & O_{[\beta]a^4} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & O_{a^5} & \longleftarrow & O_{[\beta]a^5} \\
 & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Llamaremos α_i a la flecha de $O_{a^i} \rightarrow O_{a^{i+1}}$, β_i a la flecha de $O_{a^i} \rightarrow O_{[\beta]a^i}$, y γ_i a la flecha de $O_{[\beta]a^i} \rightarrow O_{[\beta]a^{i+2}}$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. Notar que $O_{[\beta]a^{i+2}} = O_{[\gamma^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \beta^{\alpha^j}]}$ donde $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ es la parte entera de $\frac{i}{2}$ y $j = 0$ o 1 según i sea par o impar.

El funtor $F : \Lambda_{\tilde{Q}} \rightarrow \Lambda_Q$ inducido por la proyección de cubrimiento universal está definido sobre objetos por $O_{a^i} \rightarrow 1$, $O_{[\beta]a^i} \rightarrow 2$ y sobre morfismos por $\alpha_i \rightarrow \alpha$, $\beta_i \rightarrow \beta$, $\gamma_i \rightarrow \gamma$.

El ideal \tilde{I} de $K\tilde{Q}$ generado por las preimágenes por F de relaciones minimales de I está generado por el conjunto $\{\alpha_{i+3}\alpha_{i+2}\alpha_{i+1}\alpha_i, \beta_{i+2}\alpha_{i+1}\alpha_i - \gamma_i\beta_i, \gamma_{i+2}\gamma_i, i \in \mathbb{Z}\}$ y $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ es el cubrimiento Galois universal de Λ .

El grupo G de automorfismos de $\tilde{\Lambda}$ isomorfo a $\pi(Q, I) (\simeq \mathbb{Z})$ que actúa sobre $\tilde{\Lambda}$ tal que Q es el diagrama de órbitas de $\tilde{\Lambda}/G$ está generado por el automorfismo $O_{a^i} \rightarrow O_{a^{i+1}}$, $O_{[\beta]a^i} \rightarrow O_{[\beta]a^{i+1}}$, $\alpha_i \rightarrow \alpha_{i+1}$, $\beta_i \rightarrow \beta_{i+1}$, $\gamma_i \rightarrow \gamma_{i+1}$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. \square

Más aún, \tilde{Q} tiene la propiedad que

$$Q \simeq \tilde{Q}/\pi(Q, I) \simeq W/N(Q, m(I), 1) / \pi(Q, 1)/N(Q, m(I), 1) \simeq W/\pi(Q, 1)$$

Dado un vértice w de W sea \mathbf{O}_{O_w} la órbita del vértice O_w de \tilde{Q} por la acción de $\pi(Q, I)$. Entonces los isomorfismos (de K - categorías) $Q \simeq W/\pi(Q, 1) \simeq \tilde{Q}/\pi(Q, I)$ identifican el vértice i de Q con el vértice O_w de $W/\pi(Q, 1)$ donde w es la clase de homotopía de cualquier paseo en Q de 1 en i y el vértice O_w con el vértice \mathbf{O}_{O_w} de \tilde{Q} . Es decir,

$$\begin{aligned} 1 &\rightsquigarrow O_{[1]} \rightsquigarrow \mathbf{O}_{O_{[1]}} \\ 2 &\rightsquigarrow O_{[\alpha_0]} \rightsquigarrow \mathbf{O}_{O_{[\alpha_0]}} \\ 3 &\rightsquigarrow O_{[\alpha_1 \alpha_0]} \rightsquigarrow \mathbf{O}_{O_{[\alpha_1 \alpha_0]}} \end{aligned}$$

Luego el conjunto de vértices \tilde{Q}_0 de \tilde{Q} es la unión disjunta $\mathbf{O}_{O_{[1]}} \cup \mathbf{O}_{O_{[\alpha_0]}} \cup \mathbf{O}_{O_{[\alpha_1 \alpha_0]}}$ (pues $\tilde{Q}/\pi(Q, I) \simeq Q$).

Como para cada vértice w de W , $\mathbf{O}_{O_w} = \{ 1.O_w, \bar{b}.O_w \} = \{ O_w, O_{bw} \}$ se tiene que $\tilde{Q}_0 = \{ O_{[1]}, O_b, O_{[\alpha_0]}, O_{b[\alpha_0]}, O_{[\alpha_1 \alpha_0]}, O_{b[\alpha_1 \alpha_0]} \}$.

Es claro que existen flechas $O_{[1]} \xrightarrow{\overline{\alpha_0}_{[1], [\alpha_0]}} O_{[\alpha_0]}$, $O_b \xrightarrow{\overline{\alpha_0}_{b, b[\alpha_0]}} O_{b[\alpha_0]}$ inducidas por la flecha α_0 de Q y $O_{[\alpha_0]} \xrightarrow{\overline{\alpha_1}_{[\alpha_0], [\alpha_1 \alpha_0]}} O_{[\alpha_1 \alpha_0]}$, $O_{b[\alpha_0]} \xrightarrow{\overline{\alpha_1}_{b[\alpha_0], b[\alpha_1 \alpha_0]}} O_{b[\alpha_1 \alpha_0]}$ inducidas por α_1 . Para simplificar notación llamaremos α'_0 a $\overline{\alpha_0}_{[1], [\alpha_0]}$, α''_0 a $\overline{\alpha_0}_{b, b[\alpha_0]}$, α'_1 a $\overline{\alpha_1}_{[\alpha_0], [\alpha_1 \alpha_0]}$ y α''_1 a $\overline{\alpha_1}_{b[\alpha_0], b[\alpha_1 \alpha_0]}$.

Veremos ahora que el diagrama \tilde{Q} es el siguiente:

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} O_{[1]} & \xrightarrow{\alpha'_0} & O_{[\alpha_0]} & \xrightarrow{\alpha'_1} & O_{[\alpha_1 \alpha_0]} \\ & \searrow \beta'_0 & \nearrow \beta''_0 & \searrow \beta'_1 & \nearrow \beta''_1 \\ & & & & \\ O_b & \xrightarrow{\alpha''_0} & O_{b[\alpha_0]} & \xrightarrow{\alpha''_1} & O_{b[\alpha_1 \alpha_0]} \end{array}$$

donde β'_0, β''_0 son flechas inducidas por β_0 y β'_1, β''_1 por β_1 .

Es claro que β_0 induce flechas $O_{[1]} \xrightarrow{\overline{\beta_0}_{[1], [\beta_0]}} O_{[\beta_0]}$, $O_b \xrightarrow{\overline{\beta_0}_{b, b[\beta_0]}} O_{b[\beta_0]}$. Veamos que ellas son respectivamente las flechas que hemos llamado β'_0 y β''_0 en el diagrama (*). Para probar que β'_0 es la flecha $\overline{\beta_0}_{[1], [\beta_0]}$ basta ver que $O_{b[\alpha_0]} = O_{[\beta_0]}$.

Para ello escribimos, $b.[\alpha_0] = [\alpha_0\beta_0^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1\beta_0] = [\alpha_0\beta_0^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1].[\beta_0]$ con $[\alpha_0\beta_0^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1] \in N(Q, m(I), 1)$.

Luego como β_0 induce una flecha $O_{[1]} \longrightarrow O_{b[\alpha_0]}$; también induce una flecha $\bar{b}.(O_{[1]} \longrightarrow O_{b[\alpha_0]})$ de $\bar{b}.O_{[1]}$ en $\bar{b}.O_{b[\alpha_0]}$, o sea, de O_b en $\bar{b}^2.O_{[\alpha_0]} = O_{[\alpha_0]}$ (pues $b^2 \in N(Q, m(I), 1)$) que es precisamente la flecha que denominamos β_0'' en (*).

Veamos por último que existen flechas $O_{b[\alpha_0]} \longrightarrow O_{[\alpha_1\alpha_0]}$ y $O_{[\alpha_0]} \longrightarrow O_{b[\alpha_1\alpha_0]}$ inducidas por β_1 que son respectivamente las que hemos llamado β_1' y β_1'' en (*).

De manera análoga a la de recién, basta probar que β_1 induce una flecha $O_{b[\alpha_0]} \longrightarrow O_{[\alpha_1\alpha_0]}$.

Como acabamos de ver $O_{b[\alpha_0]} = O_{[\beta_0]}$ y es claro que β_1 induce una flecha $O_{[\beta_0]} \longrightarrow O_{[\beta_1\beta_0]}$. Basta probar entonces que $O_{[\beta_1\beta_0]} = O_{[\alpha_1\alpha_0]}$, lo cual sigue inmediatamente de que $[\beta_1\beta_0] = [\beta_1\beta_0\alpha_0^{-1}\alpha_1^{-1}].[\alpha_1\alpha_0]$ con $[\beta_1\beta_0\alpha_0^{-1}\alpha_1^{-1}] \in N(Q, m(I), 1)$.

Finalmente se tiene que $\bar{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$, donde \tilde{I} es el ideal de $K\tilde{Q}$ generado por el conjunto $\{ \alpha_1'\alpha_0' - \beta_1'\beta_0'; \alpha_1''\alpha_0'' - \beta_1''\beta_0''; \beta_1'\alpha_0' - \alpha_1'\beta_0'; \beta_1''\alpha_0'' - \alpha_1''\beta_0'' \}$ es el cubrimiento Galois universal de Q definido por la acción del grupo fundamental $\pi(Q, I)$ de la presentación (Q, I) de Λ .

3) Diagramas con relaciones cero.

Se dice que Q es un diagrama con relaciones cero si las relaciones minimales de Q están dadas por caminos.

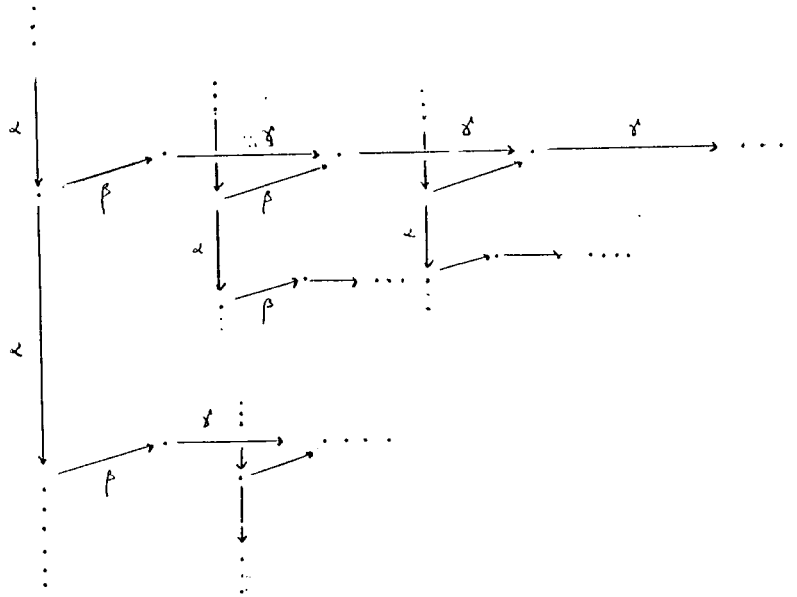
Por ejemplo, el diagrama $\begin{array}{ccc} \circ & \xrightarrow{\beta} & \circ \\ \alpha & & \gamma \end{array}$ con $\alpha^2 = \beta\alpha = \gamma\beta = 0$ es un diagrama con relaciones cero, pero si consideramos el mismo diagrama con las relaciones $\alpha^2 = \beta\alpha - \gamma\beta = 0$ no lo es pues $\beta\alpha - \gamma\beta = 0$ es una relación minimal dada por una combinación lineal de caminos.

Es claro entonces que si Q es un diagrama con relaciones cero e I es el ideal de KQ generado por estas relaciones, el subgrupo normal $N(Q, m(I), v_0)$ del grupo fundamental $\pi(Q, v_0)$ es trivial.

De aquí, el cubrimiento Galois universal de $\Lambda = KQ/I$ coincide con el cubrimiento topológico universal W del diagrama Q . Más aún, W es el cubrimiento Galois universal de Q definido por la acción del grupo fundamental $\pi(Q, v_0)$. Además, W es un árbol y tiene relaciones cero pues las relaciones en W son levantamientos de las relaciones cero de Q . \square

Daremos algunos ejemplos de cubrimientos Galois de diagramas con relaciones cero.

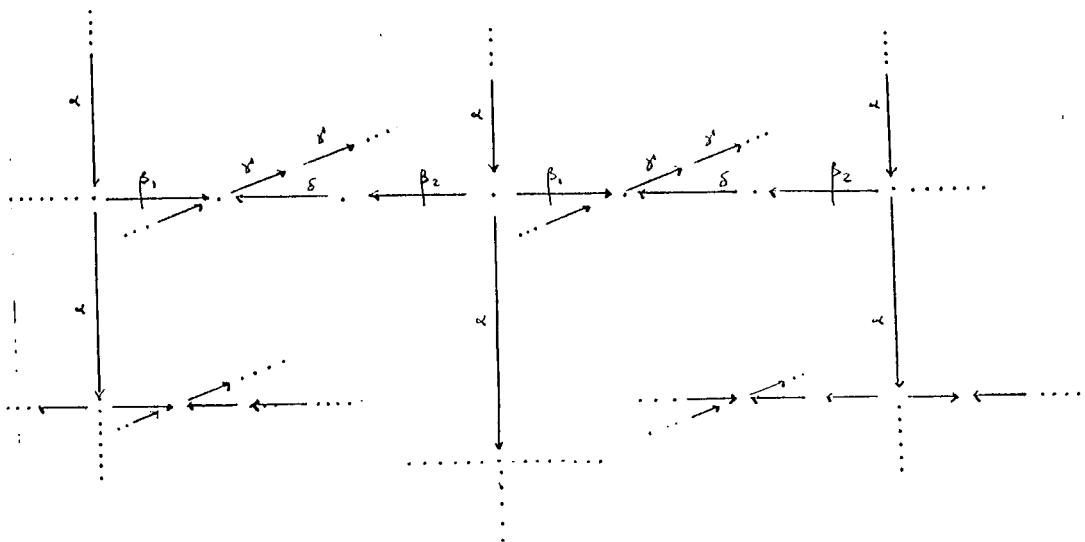
a) Sea Q el diagrama $\begin{array}{ccc} \circ & \xrightarrow{\beta} & \circ \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \gamma \end{array}$ con relaciones $\alpha^3 = \beta\alpha = \gamma^2 = 0$. El cubrimiento Galois universal de $\Lambda = KQ / \langle \alpha^3, \beta\alpha, \gamma^2 \rangle$ esta dado por el siguiente diagrama tridimensional:



Aquí el grupo fundamental $\pi(Q, 1)$ es el grupo libre generado por $a = [\alpha]$ y $b = [\beta^{-1}\gamma\beta]$.

b) El cubrimiento universal del diagrama $\begin{array}{ccc} \circ & \xrightarrow{\beta_1} & \circ \\ \alpha \downarrow & \beta_2 \swarrow \nearrow \gamma & \downarrow \delta \end{array}$

con relaciones $\alpha^2 = \beta_1\alpha = \beta_2\alpha = \gamma\delta = \gamma^2 = 0$ esta dado por el siguiente diagrama tridimensional con las relaciones correspondientes:



En este caso $\pi(Q, 1)$ es el grupo libre con generadores $a = [\alpha]$; $b = [\beta_2^{-1}\delta^{-1}\beta_1]$;
 $c = [\beta_2^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta\beta_2]$.

3.3. Cubrimientos Galois y tipo de representación finito.

Esencialmente enunciaremos aquí un criterio para decidir si un álgebra es de tipo de representación finito usando cubrimientos Galois. Este resultado fue probado por K. Bongartz y será la herramienta principal en la resolución de nuestro problema de clasificación.

Comenzamos con algunas definiciones y un Lema de P. Gabriel que reduce el estudio del tipo de representación de un álgebra Λ al de un cubrimiento Galois cualquiera de Λ .

Definición. Una K - categoría localmente acotada $\Lambda = KQ/I$ se dice *localmente de tipo finito* si para cada vértice i de Q existe sólo un número finito de Λ - módulos indescomponibles que tienen a i en el soporte. Es decir, si el conjunto $\{X \in \text{ind } \Lambda : X(i) \neq 0\}$ es finito para todo $i \in Q_0$.

Dado un diagrama Q se dice que un subdiagrama Q' de Q es *lleno* si para todo par de vértices x e y de Q'_0 las flechas de x a y en Q' coinciden con las flechas de x a y en Q . Así todo subdiagrama lleno de Q , se obtiene a partir de Q eliminando algunos vértices.

Hablaremos también de subdiagrama lleno de un diagrama con relaciones.

Sea $\Lambda = KQ/I$ y $\Lambda' = KQ'/I'$ con Q' un subdiagrama lleno de Q . Supongamos que Q' se obtiene a partir de Q eliminando los vértices i_1, \dots, i_n .

Diremos que Q' con las relaciones que definen a Λ' , es un subdiagrama lleno de Q con las relaciones que definen a Λ , si $\Lambda' = \Lambda/\Lambda(\sum_{j=1}^n e_{i_j})\Lambda$, es decir si las relaciones de Q' son las inducidas por las relaciones de Q anulando todos aquellos caminos que son composición de flechas con origen o final entre los vértices i_1, \dots, i_n .

De la definición de localmente de tipo finito resulta entonces que si $\Lambda = KQ/I$ es localmente de tipo finito entonces todo subdiagrama finito lleno Q' de Q define una subcategoría localmente acotada de tipo finito.

Sea $\Lambda = KQ/I$ una K - categoría localmente acotada y G un grupo de automorfismos de Λ que

actúa libremente sobre Λ .

Entonces vale el siguiente Lema, cuya demostración puede verse en [Ga], 3.3 y 3.6.

Lema 3.3.1. Λ/G es localmente de tipo finito si y sólo si Λ lo es.

Recordemos que bajo estas hipótesis sobre Λ y G , la proyección canónica $\pi : \Lambda \rightarrow \Lambda/G$ es un cubrimiento Galois de Λ/G . De aquí, el Lema anterior permite reducir el estudio del tipo de representación de Λ al estudio del tipo de representación de cualquier cubrimiento Galois de Λ .

Como aplicación del Lema 3.3.1 consideremos el diagrama $Q : \begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\beta} & 2 \\ \circ & & \\ \alpha & & \end{array}$ y sea

$$\Lambda = KQ / \langle \alpha^4 \rangle.$$

En el ejemplo 2) de 3.1 construimos un cubrimiento Galois $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ de Λ .

El diagrama \tilde{Q} contiene al siguiente diagrama de tipo \tilde{D}_5 como subdiagrama lleno

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \downarrow & \beta \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha & \downarrow & \beta \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha & \downarrow & \cdot \end{array}$$

y es bien conocido que un diagrama de tipo \tilde{D}_5 define un álgebra hereditaria de tipo infinito.

Luego $\tilde{\Lambda}$ no es localmente de tipo finito y del Lema 3.3.1 sigue entonces que Λ es de tipo de representación infinito.

Sin embargo, si consideramos el álgebra $\Lambda = KQ / \langle \alpha^3 \rangle$, \tilde{Q} no contiene ningún subdiagrama lleno correspondiente a un álgebra hereditaria de tipo infinito y de aquí que el Lema anterior no permite asegurar nada acerca del tipo de representación de Λ .

Este sencillo ejemplo muestra la necesidad de utilizar otro criterio para decidir el tipo de representación de un álgebra.

Vamos a introducir ahora una serie de definiciones necesarias para enunciar el Criterio de Bongartz para tipo de representación finito.

Definición. Una categoría *localmente de dimensión finita* es una K -categoría Λ que satisface las siguientes condiciones:

- a) Para cada $x \in \Lambda$ el álgebra de endomorfismos $\Lambda(x, x)$ es local.
- b) Objetos distintos de Λ son no isomorfos.

c) Para todo par x, y de objetos de Λ , $\Lambda(x, y)$ tiene dimensión finita sobre K .

En particular, se dice que Λ es *schurian* si es localmente de dimensión finita y $\dim_K \Lambda(x, y) \leq 1$ para todo par de objetos x e y . Notemos que una K -categoría de caminos $\Lambda = KQ/I$ es schurian si existe a lo sumo un camino no nulo entre cada par de vértices x, y de Q .

Definiremos ahora los grupos de homología simplicial de una K -categoría localmente acotada schurian $\Lambda = KQ/I$.

Para $n > 1$ sea $S_n\Lambda$ el conjunto de sucesiones (x_0, x_1, \dots, x_n) de objetos distintos de Λ tal que la composición

$$\Lambda(x_0, x_1) \times \Lambda(x_1, x_2) \times \dots \times \Lambda(x_{n-1}, x_n) \longrightarrow \Lambda(x_0, x_n)$$

es no nula. Es decir, $S_n\Lambda$ es el conjunto de sucesiones (x_0, x_1, \dots, x_n) tales que existe exactamente un camino no nulo que une los vértices x_0 y x_n y pasa por los vértices x_1, \dots, x_{n-1} .

Por definición $S_0\Lambda$ es el conjunto de objetos de Λ y $S_1\Lambda$ se identifica con el conjunto de pares (x, y) tales que $\Lambda(x, y) \neq 0$.

Denotamos con $C_n\Lambda$ el grupo abeliano libre generado por $S_n\Lambda$.

Los grupos $C_n\Lambda$ dan origen a un complejo diferencial $C_*\Lambda$

$$\dots \xrightarrow{d} C_2\Lambda \xrightarrow{d} C_1\Lambda \xrightarrow{d} C_0\Lambda$$

$$\text{con } d(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Los grupos de homología de este complejo se notan por $H_n\Lambda$ y se llaman los *grupos de homología simplicial* de Λ .

Definiciones. Dados dos vértices x, y de Q , la desigualdad $x \leq y$ significa que Q contiene un camino de x a y . Se define el *intervalo* $[x, y]$ como el conjunto $\{z \in Q_0 : x \leq z \leq y\}$; y Q se dice *intervalo finito* si todos los intervalos $[x, y]$ de Q son finitos.

Un conjunto C de vértices de Q se dice *convexo* si para todo $x, y \in C$ el intervalo $[x, y] \subseteq C$ y un subdiagrama Q' de Q se dice convexo si Q'_0 es convexo en Q_0 .

Se tiene entonces la siguiente definición de simple conexidad en sentido simplicial.

Definición. Una K - categoría localmente acotada $\Lambda = KQ/I$ es *simplemente conexa* si tiene las siguientes propiedades:

- a) Λ es schurian.
- b) Q es conexo, sin ciclos orientados e intervalo finito.
- c) $H_1(\Lambda) = 0$.

En general puede ser complicado calcular el primer grupo de homología simplicial $H_1(\Lambda)$ de Λ . Vamos a definir ahora la noción de punto separante en una K - categoría de dimensión finita $\Lambda = KQ/I$. Veremos luego que bajo ciertas condiciones, si todo punto de Λ es separante entonces $H_1(\Lambda) = 0$.

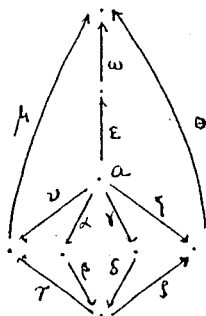
Recordemos que un vértice a de un diagrama Q es una *fuentes* si ninguna flecha de Q termina en a .

Definición. Sea $\Lambda = KQ/I$ una K - categoría de dimensión finita. Una fuente a de Q se dice *separante* si $\underline{r}P_a$ es suma directa de Λ - módulos indescomponibles no isomorfos cuyos soportes están contenidos en diferentes componentes conexas del subdiagrama de Q obtenido quitando el vértice a . Un vértice arbitrario x de Q se dice *separante* si x es una fuente separante para la subcategoría convexa de Λ dada por el subdiagrama lleno de Q cuyos vértices son los $y \in Q_0$ tales que existe un camino no nulo de x a y , es decir, $y \geq x$. La categoría Λ se dice *separada* si todos sus vértices son separantes.

Ejemplos 3.3.2.

1) Sea Λ la K - categoría definida por el diagrama de Kronecker $\begin{matrix} & & 1 & & \\ & \leftarrow & & \rightarrow & \\ & & 2 & & \end{matrix}$. El vértice 1 no es separante.

2) Sea Q el siguiente diagrama



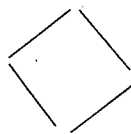
y $\Lambda = KQ / \langle \omega\epsilon - \mu\nu, \omega\epsilon - \theta\zeta, \beta\alpha - \delta\gamma, \tau\beta, \rho\delta \rangle$. Todos los vértices de Q , excepto el vértice a , son separantes.

- 3) Es inmediato de la definición de punto separante que si Q es un árbol, toda álgebra $\Lambda = KQ/I$ es separada. Es decir, todos los vértices de Q son separantes.
- 4) En el cubrimiento Galois $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ del ejemplo 3.1.1.2) todos los puntos de \tilde{Q} son separantes. Lo mismo ocurre con el ejemplo 3.2.1.1).

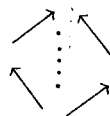
Es necesario recordar ahora que a un conjunto parcialmente ordenado S se le puede asociar una K -categoría KS definida de la siguiente manera. Los objetos de KS son los puntos de S ; y para cada par x, y de puntos de S , $KS(x, y)$ es el K -espacio vectorial unidimensional generado por un camino $\delta_{yx} \neq 0$ de x a y si $x \leq y$ y cero si $x \not\leq y$. Para $x \leq y \leq z$ se define $\delta_{zy} \circ \delta_{yx} = \delta_{zx}$.

Ejemplo 3.3.3.

Sea S el conjunto ordenado dado por el siguiente diagrama de Hasse:



Entonces KS es la K -categoría definida por el siguiente diagrama con relaciones:



Dado un objeto s de una K -categoría localmente acotada $\Lambda = KQ/I$ con Q sin ciclos orientados, notamos con Λ_s al conjunto $\{t \in \Lambda : \Lambda(t, s) \neq 0\}$ con el siguiente orden parcial.

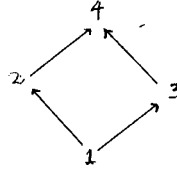
$$t \leq t' \iff \text{existe un camino no nulo de } t \text{ a } s \text{ que pasa por } t'$$

Dualmente se define Λ^s como el conjunto $\{t \in \Lambda : \Lambda(s, t) \neq 0\}$.

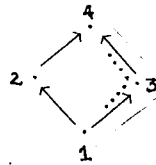
Así, se pueden construir las categorías $K\Lambda_s$ y $K\Lambda^s$ que serán subcategorías de Λ . Más aún, como Λ es localmente acotada $K\Lambda_s$ y $K\Lambda^s$ también lo serán y por lo tanto estarán dadas por diagramas con relaciones.

Ejemplos 3.3.4.

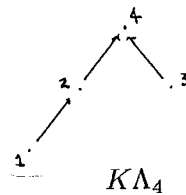
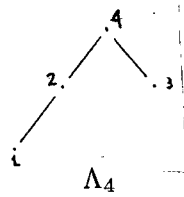
- 1) El conjunto parcialmente ordenado S del ejemplo 3.3.3 es el conjunto Λ_4 si se considera $\Lambda = KQ$ donde Q es el diagrama



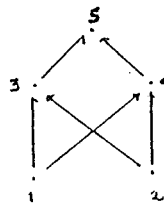
- 2) Sea Q el siguiente diagrama con relaciones



Mostramos a continuación el conjunto Λ_4 y la K -categoría $K\Lambda_4$.



- 3) Sea Q el siguiente diagrama conmutativo



y sea Λ el álgebra determinada por Q con relaciones de conmutatividad. Entonces $\Lambda = K\Lambda_5$.

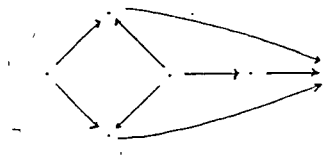
En lo que sigue, dado un diagrama Q indicaremos con $|Q|$ al grafo no orientado de Q .

Definición. Una K -categoría Λ es llamada \tilde{A} -libre si no contiene una subcategoría llena $B \simeq KQ_B$ con $|Q_B| = \tilde{A}_n$, $n \geq 1$.

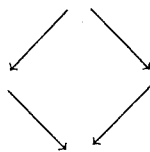
En el ejemplo anterior 2) Λ es \tilde{A} -libre; sin embargo la K -categoría Λ del ejemplo 3) no lo es pues el subdiagrama lleno de vértices 1,2,3 y 4 es de tipo \tilde{A}_4 .

Observación 3.3.5.

- 1) Si Q es un diagrama cuyo grafo no orientado es un árbol y $\Lambda = KQ/I$, entonces para todo vértice s las subcategorías $K\Lambda_s$ y $K\Lambda^s$ son \tilde{A} - libres.
- 2) El hecho de que una K - categoría localmente acotada Λ sea \tilde{A} - libre no implica que para todo objeto s de Λ las subcategorías $K\Lambda_s$ también lo sean. En efecto, si Λ es la K - categoría del ejemplo 3.3.2.2), Λ es \tilde{A} - libre y sin embargo la subcategoría $K\Lambda_1$ no lo es. $K\Lambda_1$ está dada por el siguiente diagrama conmutativo.



La recíproca tampoco es cierta. Es decir, si para todo objeto s de Λ la subcategoría $K\Lambda_s$ es \tilde{A} - libre no necesariamente Λ lo es. Basta considerar $\Lambda = KQ$ donde Q es el siguiente diagrama de tipo \tilde{A}_4



□

La siguiente Proposición da condiciones suficientes para que el primer grupo de homología simplicial de $\Lambda = KQ/I$ sea cero.

Proposición 3.3.6. *Sea $\Lambda = KQ/I$ localmente acotada, schurian, Q conexo, sin ciclos orientados e intervalo finito y tal que para todo $s \in Q_0$ las categorías $K\Lambda_s$ y $K\Lambda^s$ son \tilde{A} - libres. Si Λ es separada entonces $H_1(\Lambda) = 0$.*

Demostración. La idea de la demostración es la siguiente. Se prueba usando el Lema 2.7 de [BrG] que $H_1(\Lambda) = \varinjlim H_1(\Lambda_n)$ donde las Λ_n son subcategorías finitas llenas KQ_n/I_n de Λ obtenidas inductivamente de manera que $(Q_{n+1})_0 - (Q_n)_0$ es un punto extremo (maximal o minimal) de $(Q_{n+1})_0$. Se aplica luego la Proposición 2.2 de [Bo] para probar que $H_1(\Lambda_n) = 0$, para todo n . □

Es fácil ver, usando la Proposición que acabamos de probar, que los cubrimientos Galois $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ (construidos en 3.1.1.2) y 3.3.2.1) son simplemente conexos.

Notemos que en estos casos verificar las hipótesis de la Proposición anterior es mucho más sencillo que calcular el grupo $H_1(\tilde{\Lambda})$.

Observación 3.3.7. Si Q es un diagrama conexo cuyo grafo no orientado es un árbol y $\Lambda = KQ/I$ es de dimensión finita, se satisfacen las hipótesis de la Proposición 3.3.6, y además todo punto de Λ es separante (c.f. Ejemplo 3.3.2.3)). Por lo tanto, $H_1(\Lambda) = 0$. Más aún, de acuerdo a la definición de simple conexidad, Λ es simplemente conexa.

Definición. Un álgebra Λ es llamada *standard* si es de dimensión finita, distributiva, básica y admite un cubrimiento Galois $F : \tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ con $\tilde{\Lambda}$ simplemente conexa (en el sentido simplicial definido aquí).

Recordemos que Λ es distributiva si y sólo si $\Lambda(a, b)$ es uniserial como $\Lambda(a, a) - \Lambda(b, b)$ -bimódulo para todo $a, b \in \Lambda$.

Por ejemplo, sea Q el diagrama $1 \xrightarrow{\beta_1} \underset{\alpha}{\circlearrowleft} 2 \xrightarrow{\beta_2} 3$ y $\Lambda = KQ / \langle \alpha^2, \beta_2\alpha \rangle$.

Es claro que $\Lambda(2, 3)$ es uniserial como $\Lambda(2, 2) - \Lambda(3, 3)$ -bimódulo.

El K -espacio vectorial $\Lambda(1, 2)$ está generado por β_1 y $\alpha\beta_1$. Como todo $\Lambda(1, 1) - \Lambda(2, 2)$ -sub-bimódulo de $\Lambda(1, 2)$ es un K -subespacio vectorial de $\Lambda(1, 2)$ resulta que los únicos $\Lambda(1, 1) - \Lambda(2, 2)$ -sub-bimódulos de $\Lambda(1, 2)$ son $K\beta_1$ y $K(\alpha\beta_1)$. De aquí, es uniserial como $\Lambda(1, 1) - \Lambda(2, 2)$ -bimódulo y la única serie de composición es

$$\Lambda(1, 2) \supseteq K\beta_1 \supseteq K(\alpha\beta_1) \supseteq 0$$

Análogamente se ve que la única serie de composición de $\Lambda(1, 3)$ como $\Lambda(1, 1) - \Lambda(3, 3)$ -bimódulo es

$$\Lambda(1, 3) \supseteq K(\beta_2\beta_1) \supseteq 0$$

Sin embargo, si Q es el mismo diagrama, el álgebra $\Lambda' = KQ / \langle \alpha^2 \rangle$ no es distributiva pues $\Lambda(1, 3)$ admite dos series de composición como $\Lambda'(1, 1) - \Lambda'(3, 3)$ -bimódulo que son

$$\Lambda'(1, 3) \supseteq K(\beta_2\beta_1) \supseteq 0$$

$$\Lambda'(1, 3) \supseteq K(\beta_2\alpha\beta_1) \supseteq 0$$

Proposición 3.3.8. *Los siguientes diagramas con relaciones determinan álgebras distributivas.*

a) Un diagrama de Dynkin de tipo A_n .

b) \bigcirc_α con $\alpha^k = 0$.

c) $\bigcirc_\alpha 1 \text{---} \dots \text{---} n$, $n > 1$, $\alpha^k = 0$

d) $1 \xrightarrow{\beta_1} \bigcirc_\alpha 2 \xrightarrow{\beta_2} 3$, $\alpha^k = \beta_2 \alpha = 0$

e) $\bigcirc_\alpha 1 \xrightarrow{\beta_1} \bigcirc_\gamma 2 \xrightarrow{\beta_2} 3$, $\alpha^2 = \gamma^2 = \beta_1 \alpha - \gamma \beta_1 = 0$

f) $\bigcirc_\alpha 1 \xrightarrow{\beta} \dots \text{---} n \bigcirc_\gamma$, $n > 1$, $\alpha^k = \gamma^t = 0$ y i) $\beta \alpha = 0$ ó
ii) $\beta \alpha = \gamma \beta$ y $n = 2$

g) $\bigcirc_\alpha 1 \xrightarrow{\beta_1} \text{ , } \alpha^2 = \beta_2 \alpha = \beta_1 \alpha - \delta \beta_2 = 0$
 $\beta_2 \searrow \nearrow \delta$

Demostración. Para a), b) y c), la Proposición sigue inmediatamente de que cualesquiera sean a y b en Λ , $\Lambda(a, b)$ es uniserial como K - espacio vectorial y el hecho general que toda serie de composición de $\Lambda(a, b)$ como $\Lambda(a, a) - \Lambda(b, b)$ - bimódulo es una serie de composición de $\Lambda(a, b)$ como K - espacio vectorial.

Probemos ahora que las álgebras de d), e) y g) son distributivas. Llamemos Λ_d al álgebra dada en el inciso d). Para cada par de elementos a y b en Λ_d daremos la única serie de composición de $\Lambda_d(a, b)$ como $\Lambda_d(a, a) - \Lambda_d(b, b)$ - bimódulo. Análogamente para los incisos e) y g).

$$\Lambda_d(1, 2) \supseteq K\beta_1 \supseteq K(\alpha\beta_1) \supseteq K(\alpha^2\beta_1) \supseteq \dots \supseteq K(\alpha^{k-1}\beta_1) \supseteq 0$$

$$\Lambda_d(1, 3) \supseteq K(\beta_2\beta_1) \supseteq 0$$

$$\Lambda_d(2, 3) \supseteq K\beta_2 \supseteq 0$$

$$\Lambda_e(1, 2) \supseteq K\beta_1 \supseteq K(\beta_1\alpha) \supseteq 0$$

$$\Lambda_e(1, 3) \supseteq K(\beta_2\beta_1) \supseteq K(\beta_2\beta_1\alpha) \supseteq 0$$

$$\Lambda_e(2, 3) \supseteq K\beta_2 \supseteq K(\beta_2\gamma) \supseteq 0$$

$$\Lambda_g(1, 2) \supseteq K\beta_2 \supseteq 0$$

$$\Lambda_g(1, 3) \supseteq K\beta_1 \supseteq K\beta_1\alpha \supseteq 0$$

$$\Lambda_g(2, 3) \supseteq K\delta \supseteq 0$$

Observemos que en e) la relación $\beta_1\alpha = \gamma\beta_2$ es esencial para que $\Lambda_e(1,3)$ sea uniserial como $\Lambda_e(1,1) - \Lambda_e(3,3)$ - bimódulo. Con esta relación se tiene que $K(\beta_2\beta_1\alpha) = K(\beta_2\gamma\beta_1)$ lo cual determina la unicidad de la serie de composición dada arriba.

Consideremos ahora el álgebra Λ del inciso f). Si $1 \leq i, j < n$ entonces

$\Lambda(i, j) \simeq K(\bigcirc_{\alpha} 1 \xrightarrow{\beta} \dots \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{j}) (i, j)$ y por b) es uniserial. Análogamente si $1 < i, j \leq n$, $\Lambda(i, j) \simeq K(i \rightarrow \dots \xrightarrow{j} \dots \xrightarrow{n} \bigcirc_{\gamma}) (i, j)$ que también es uniserial como $\Lambda(i, i) - \Lambda(j, j)$ - bimódulo.

Veamos que $\Lambda(1, n)$ es uniserial como $\Lambda(1, 1) - \Lambda(n, n)$ - bimódulo. Si $\Lambda(1, n) \neq 0$ entonces existe un camino $\delta = \delta'\beta$ de 1 a n con δ' un camino de 2 a n y se tienen los siguientes isomorfismos de K - espacios vectoriales. En i), $\Lambda(1, n) \simeq K\delta + K\gamma\delta + K\gamma^2\delta + \dots + K\gamma^{t-1}\delta$ y en ii) $\Lambda(1, n) \simeq K\beta + K\beta\alpha + K\beta\alpha^2 + \dots + K\beta\alpha^{k-1}$. Mostramos a continuación las únicas series de composición de $\Lambda(1, n)$ como $\Lambda(1, 1) - \Lambda(n, n)$ - bimódulo, para i) y ii) respectivamente.

$$\Lambda(1, n) \supseteq K\delta \supseteq K\gamma\delta \supseteq K\gamma^2\delta \supseteq \dots \supseteq K\gamma^{s-1}\delta \supseteq 0$$

$$\Lambda(1, n) \supseteq K\beta \supseteq K\beta\alpha \supseteq K\beta\alpha^2 \supseteq \dots \supseteq K\beta\alpha^{k-1} \supseteq 0$$

□

Antes de enunciar el Criterio de Bongartz para tipo finito es necesaria la siguiente definición.

Definición. Un álgebra cociente Λ' de $\Lambda = KQ/I$ se dice una *subcategoría convexa llena* de Λ si $\Lambda' = KQ'/I \cap KQ'$ con Q' un subdiagrama convexo lleno de Q , esto es, Q' subdiagrama convexo de Q y subdiagrama lleno del diagrama con relaciones Q .

Por comodidad, en la siguiente sección, diremos que un diagrama Q' con relaciones es un *subdiagrama convexo lleno* de Q con relaciones, si el álgebra Λ' definida por Q' y sus relaciones es una subcategoría convexa llena del álgebra Λ definida por Q y sus relaciones.

Estamos en condiciones ahora de enunciar el Criterio de Bongartz para tipo de representación finito. La demostración de este importante Teorema puede verse en [Bo].

Llamaremos lista [BHV], a la lista de álgebras mansas ocultas dada por D. Happel y D. Vossieck en [HaV] y por K. Bongartz.

Teorema 3.3.9. Sea Λ un álgebra standard de dimensión d y sea $\tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda$ un cubrimiento Galois con $\tilde{\Lambda}$ simplemente conexa. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1) Λ es de tipo de representación finito.
- 2) $\tilde{\Lambda}$ tiene las siguientes propiedades:
 - a) Para todo $s \in \tilde{\Lambda}$ las categorías $K\tilde{\Lambda}_s$ y $K\tilde{\Lambda}^s$ son $\tilde{\Lambda}$ -libres.
 - b) $\tilde{\Lambda}$ no contiene una subcategoría convexa llena $B \simeq KQ_B$ con $|Q_B| = A_{2d+1}$.
 - c) $\tilde{\Lambda}$ no contiene ninguna subcategoría convexa llena dada por uno de los diagramas de la lista [BHV].

Para finalizar esta sección volvamos al ejemplo $\Lambda = KQ / \langle \alpha^3 \rangle$ donde Q es el diagrama

$$\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \alpha \end{array} \xrightarrow{\beta} \begin{array}{c} 2 \\ \circ \end{array}$$

Vamos a aplicar el Teorema 3.3.9. para probar que Λ es de tipo de representación finito. Sigue de la Proposición 3.3.8 que Λ es un álgebra standard. En el ejemplo 3.1.1. 2) construimos el cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ de Λ el cual está dado por un diagrama de árbol. De la Observación 3.3.7 resulta entonces que $\tilde{\Lambda}$ es simplemente conexa y satisface la propiedad 2)a) del teorema anterior. La propiedad 2)b) es claramente satisfecha por $\tilde{\Lambda}$ ya que Λ tiene dimensión $d = 7$ y \tilde{Q} no contiene subdiagramas convexos llenos de tipo A_r con $r > 4$. Además \tilde{Q} no contiene ningún subdiagrama convexo lleno de la lista [BHV] que es la condición 2)c) del Teorema 3.3.9.

4. ALGEBRAS CON LA PROPIEDAD (IIP) DE TIPO DE REPRESENTACION FINITO

Ya vimos en la sección 1 que para clasificar todas las K - álgebras $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP) de tipo de representación finito podemos reducirnos a estudiar los casos en que Q es un diagrama con lazos, a lo sumo uno en cada vértice, y no contiene al diagrama de Kronecker como subdiagrama.

Sea Q un tal diagrama con lazos y $\Lambda = KQ/I$. Si P_1, \dots, P_n son los Λ - módulos indecomponibles, notaremos con e_i al elemento idempotente de Λ tal que $P_i = \Lambda.e_i$.

Comenzaremos estudiando diagramas Q en las siguientes condiciones.

- I. Q es un diagrama de Dynkin con un lazo en alguno de sus vértices.
- II. Q es un diagrama de Dynkin con dos lazos.
- III. Q es un diagrama de Dynkin con tres lazos.
- IV. Q contiene un subdiagrama convexo de la forma

Veremos en cada uno de estos casos cuáles son las álgebras $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP) de tipo de representación finito. Mostraremos además que esto resuelve completamente nuestro problema de clasificación.

Antes de comenzar con el estudio de los diagramas de I, II, III y IV queremos dar una Proposición que es corolario inmediato de la descripción de las relaciones sobre las álgebras con (IIP) y una Observación, que serán de utilidad.

Proposición.4.1. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra con la propiedad (IIP) y J un ideal idempotente de Λ . Entonces Λ/J también tiene la propiedad (IIP).*

Observación.4.2. *Sea $\Lambda = KQ/I$ un álgebra que satisface la propiedad (IIP), i_1, \dots, i_r vértices de Q y e_{i_1}, \dots, e_{i_r} los elementos idempotentes de Λ correspondientes a dichos vértices. Como $\Lambda.(e_{i_1} + \dots + e_{i_r}).\Lambda$ es un ideal idempotente de Λ , resulta de la Proposición anterior que $\Lambda' = \Lambda/\Lambda.(e_{i_1} + \dots + e_{i_r}).\Lambda$ tiene también la propiedad (IIP). Además el álgebra Λ' está dada*

por un subdiagrama lleno Q' de Q tal que $Q'_0 = Q_0 - \{i_1, \dots, i_r\}$. Por otro lado, sabemos que si además Q' es un subdiagrama convexo de Q entonces el ideal I' de las relaciones de Λ' es igual a $I \cap KQ'$. De aquí resulta que toda relación de Λ' es una relación de Λ .

Esta observación y el hecho de que todo cociente de un álgebra de tipo de representación finito es de tipo de representación finito serán de gran utilidad en la resolución de nuestro problema de clasificación. En efecto, supongamos que se desea determinar cuáles son todas las álgebras $\Lambda = KQ/I$ que satisfacen la propiedad (IIP) y son de tipo de representación finito. Supongamos además que se conoce cuáles son aquellas álgebras $\Lambda' = KQ'/I'$ con las mismas propiedades que Λ y tal que Q' es un subdiagrama convexo de Q obtenido a partir de él quitando algunos vértices. Basta considerar entonces ideales I de Λ tales que $\Lambda' = KQ'/I' = KQ'/I \cap KQ'$ es de tipo de representación finito. Esto nos permite establecer prioridades en los cálculos y estudiar cada caso utilizando resultados obtenidos anteriormente. \square

Estudiaremos ahora los casos I, II, III y IV mencionados.

I. Q ES UN DIAGRAMA DE DYNKIN CON UN LAZO

Comenzamos esta sección estudiando diagramas de tipo A_n con un lazo.

I.1. Q es un diagrama de tipo A_n con un lazo en alguno de sus vértices.

Estudiamos primero el más sencillo de los diagramas de este tipo.

I.1.1. Sea Q el diagrama $\overset{\circ}{\underset{\alpha}{\curvearrowright}}$. Es claro que el álgebra $\Lambda = KQ / \langle \alpha^i \rangle$ con $i > 0$ tiene la propiedad (IIP) y es isomorfa al cociente $K[x] / \langle x^i \rangle$ del anillo de polinomios $K[x]$. Se sabe que estas álgebras son de tipo finito. Más aún se conoce una descripción completa de los Λ -módulos indescomponibles.

I.1.2. Sea Q el diagrama $\overset{\circ}{\underset{\alpha}{\curvearrowright}} \xrightarrow{\beta} 2 \dots \dots \dots - n$.

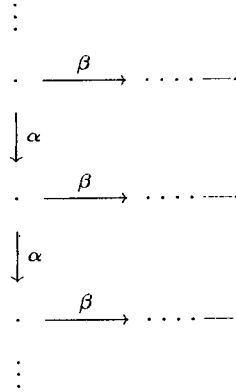
Por el Teorema 1.9, $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) si y sólo si

$I = \langle \alpha^i, \beta\alpha^j \rangle$ con $0 < j \leq i$. Veamos entonces para qué valores de i, j, n las relaciones

$\alpha^i = \beta\alpha^j = 0$ definen un álgebra de tipo de representación finito. Probaremos que Λ es de tipo de representación finito exactamente en los siguientes casos:

- a) $\alpha^i = 0$, con $\begin{cases} n = 2, i = 2, 3 \\ n > 2, i = 2 \end{cases}$
 b) $\alpha^i = \beta\alpha = 0$, $\forall i, n$
 c) $\alpha^i = \beta\alpha^2 = 0$, con $\begin{cases} n = 2, i = 3, 4, 5 \\ n = i = 3 \end{cases}$

El siguiente diagrama \tilde{Q} con las relaciones indicadas define el cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda}$ de Λ . El grupo G que actúa sobre $\tilde{\Lambda}$ tal que $\tilde{\Lambda}/G \simeq \Lambda$ es isomorfo a \mathbb{Z} .



Como \tilde{Q} es un árbol, sigue de la Observación 3.3.7 que $\tilde{\Lambda}$ es simplemente conexa. Es fácil ver, usando la Proposición 3.3.8, que Λ es standard y por lo tanto, estamos en las condiciones del Teorema 3.3.9 (Criterio de Bongartz para tipo finito).

La condición 2a) del Teorema 3.3.9 se satisface trivialmente cualesquiera sean i, j y n pues \tilde{Q} es un árbol (cf. Observación 3.3.5). Para probar la condición 2b) observemos que $d = \dim_K(\Lambda) \geq n + (n-1) + (i-1) = 2n + i - 2$ pues Q tiene n vértices, $n-1$ flechas que no son lazos y $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{i-1}$ son caminos no nulos en Λ . Luego, $2d + 1 \geq 4n + 2i - 3 > \sup(2n + j - 2, n + i - 1)$ y \tilde{Q} no contiene subdiagramas convexos llenos de tipo A_r con $r > \sup(2n + j - 2, n + i - 1)$. Indicamos a continuación subdiagramas maximales de \tilde{Q} de tipo A_{2n+j-2} y A_{n+i-1} .

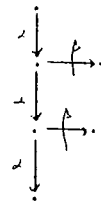


Las relaciones dadas en a), b) y c) anteriores determinan un álgebra Λ que satisface además la condición 2c) del Teorema 3.3.9, es decir, \tilde{Q} no contiene ningún subdiagrama convexo lleno de la lista [BHV]. Luego, en estos casos, Λ es de tipo de representación finito.

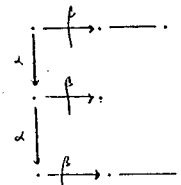
Vamos a probar que estas relaciones son las únicas que determinan álgebras de tipo finito. Para ello veremos que se puede elegir, en cada uno de los casos restantes, un subdiagrama lleno \tilde{Q}' de \tilde{Q} de tipo infinito. El resultado sigue entonces del Lema 3.3.1.

Mostramos a continuación los diagramas \tilde{Q}' elegidos en cada caso.

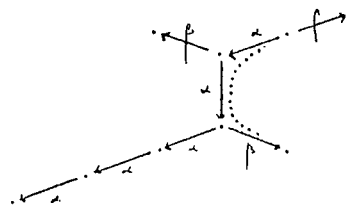
Si $j = i$ e $i \geq 4$, es decir, si tenemos la relación $\alpha^i = 0$ con $i \geq 4$, \tilde{Q}' es de tipo \tilde{D}_5 :



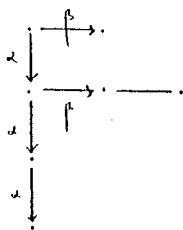
Para $i = 3$ y $n \geq 3$, \tilde{Q}' es de tipo \tilde{E}_7 :



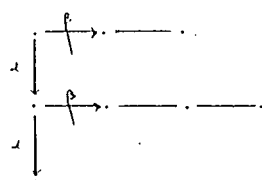
Si $j = n = 2$ e $i \geq 6$, \tilde{Q}' es el siguiente diagrama de la lista [BHV].



Para $j = 2$, $n \geq 3$, $i = 4$, \tilde{Q}' es de tipo \tilde{E}_6 :



En el caso $j = 2, i = 3, n = 4$, \tilde{Q}' es de tipo \tilde{E}_7 :



Finalmente, si $j = 3$ se puede elegir el mismo subdiagrama que en el caso $j = 0, i \geq 4$.

Observación 4.3. Es bien conocido que un álgebra Λ es de tipo de representación finito si y sólo si Λ^{op} lo es. Sin embargo, no es cierto que Λ^{op} satisfice la propiedad (IIP) siempre que Λ la satisfaga. Por ejemplo, en el caso anterior b), $\Lambda^{op} = KQ^{op} / \langle (\alpha^{op})^i, \alpha^{op}\beta^{op} \rangle$ donde α^{op} y β^{op} denotan respectivamente a las flechas α y β con orientación opuesta, y Λ^{op} no tiene la propiedad (IIP) pues no todas las relaciones comienzan en lazos.

Por esta razón es necesario estudiar por separado un diagrama Q y su opuesto. Esta tarea se facilita debido a que si \tilde{Q} es un cubrimiento Galois de $\Lambda = KQ/I$ se puede construir un cubrimiento Galois de Λ^{op} con el mismo grafo no orientado que \tilde{Q} . Basta considerar el diagrama \tilde{Q}^{op} con las relaciones correspondientes.

En realidad, cuando Q es un diagrama de Dynkin con un lazo en el vértice i , vale el siguiente hecho más general. Si Q' es un diagrama que se obtiene a partir de Q cambiando la orientación de algunas de las flechas β con origen en i , el cubrimiento Galois universal de $\Lambda' = KQ'/J$ es un árbol que tiene el mismo grafo no orientado que \tilde{Q} cualquiera sea el ideal admisible J . De hecho, para construirlo basta cambiar la orientación de las flechas de \tilde{Q} que están en la fibra de las flechas invertidas en el diagrama Q y considerar las relaciones correspondientes.

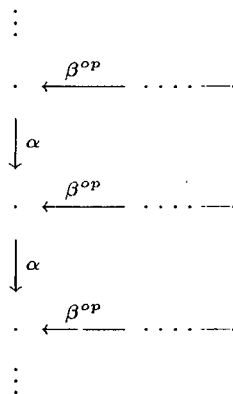
En adelante designaremos con $Q_{\beta_1, \dots, \beta_r}$ al diagrama obtenido a partir de Q cambiando la orientación de las flechas β_1, \dots, β_r y si \tilde{Q} es el cubrimiento Galois universal de $\Lambda = KQ/I$ de-

signaremos con $\tilde{Q}_{\beta_1, \dots, \beta_r}$ al cubrimiento Galois universal de $\Lambda_{\beta_1, \dots, \beta_r} = KQ_{\beta_1, \dots, \beta_r}/J$ obtenido a partir de \tilde{Q} como acabamos de indicar arriba.

Indicaremos con el mismo nombre que en Q a las flechas de $Q_{\beta_1, \dots, \beta_r}$ que hayan preservado su orientación y con β_i^{op} a la flecha β_i con orientación opuesta. Análogamente en el cubrimiento $\tilde{Q}_{\beta_1, \dots, \beta_r}$. \square

Consideraremos en I.1.3. el diagrama Q_β obtenido cambiando la orientación de la flecha β en el diagrama Q de I.1.2.

I.1.3. Si Q es el diagrama de I.1.2, Q_β es $\circlearrowleft_1 \xleftarrow{\beta^{op}} 2 \dots \dots \dots n$ y \tilde{Q}_β arriba definido es el siguiente árbol infinito.



Por la Observación.1.8., la única relación a estudiar en este caso es $\alpha^i = 0$ con $i > 1$. De la Observación anterior 4.3 sigue que \tilde{Q}_β con la relación $\alpha^i = 0$ es un cubrimiento Galois de $KQ_\beta / \langle \alpha^i \rangle$. Más precisamente, es el cubrimiento Galois universal de $KQ_\beta / \langle \alpha^i \rangle$. Además, $\tilde{\Lambda}_\beta = K\tilde{Q}_\beta / \langle \alpha^i \rangle$ es simplemente conexo, con grupo \mathbb{Z} y se ve en forma análoga al caso I.1.2 que se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.3.9. Usando dicho Teorema se ve fácilmente que si $n = 2$ e $i = 2, 3$ ó $n > 2$ e $i = 2$ entonces $KQ_\beta / \langle \alpha^i \rangle$ es de tipo de representación finito.

La recíproca sigue de que en los casos restantes \tilde{Q}_β contiene subdiagramas convexos llenos del mismo tipo (Dynkin extendido) que los indicados en los casos análogos de I.1.2. Esto termina el caso I.1.3. y el estudio de los diagramas de la forma $\circlearrowleft \dots \dots \dots$.

Estudiaremos ahora álgebras definidas por diagramas del tipo $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} \dots \xrightarrow{\gamma} n$.

I.1.4. Sea $Q : 1 \xrightarrow{\beta_1} 2 \xrightarrow[\alpha]{} 3 \xrightarrow{\beta_2} \dots \xrightarrow{\gamma} n$ y $\Lambda = KQ/I$. Por el Teorema 1.9 resulta que Λ tiene la propiedad (IIP) si y sólo si $I = \langle \alpha^i, \beta_1 \alpha^r, \beta_2 \alpha^s \rangle$ con $i > 1$ y $0 < r, s \leq i$. Veamos cuándo las relaciones $\alpha^i = \beta_1 \alpha^r = \beta_2 \alpha^s = 0$ determinan un álgebra de tipo finito.

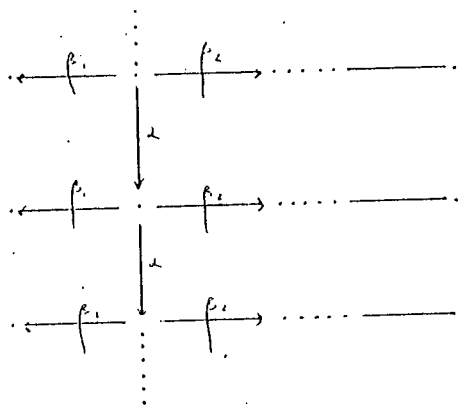
De acuerdo a la Observación.4.2, basta estudiar aquellas relaciones en Λ tales que las álgebras cocientes $\Lambda_1 = \Lambda/\Lambda.e_1.\Lambda$ y $\Lambda_2 = \Lambda/\Lambda.(e_3 + \dots + e_n).\Lambda$, que también satisfacen la propiedad (IIP), son de tipo de representación finito. Tales álgebras fueron estudiadas en I.1.2 y son de tipo de representación finito en los siguientes casos:

- i) $\alpha^i = \beta_1 \alpha = 0$
- ii) $\alpha^i = \beta_2 \alpha = 0$
- iii) $\alpha^i = \beta_1 \alpha = \beta_2 \alpha = 0$

Veamos que Λ es de tipo de representación finito si y sólo si se tiene uno de los siguientes casos.

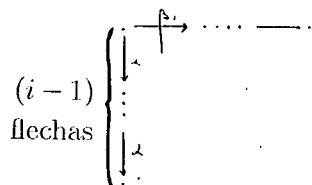
- a) $\alpha^2 = \beta_1 \alpha = 0, n \leq 4$.
- b) $\alpha^2 = \beta_2 \alpha = 0, n \leq 6$.
- c) $\alpha^i = \beta_1 \alpha = \beta_2 \alpha = 0$ con $\begin{cases} i = 2, \forall n \\ n = 3, \forall i \\ n = 4, i \leq 5 \\ n = 5, 6, i \leq 3 \end{cases}$

Para ello construimos el cubrimiento Galois universal de Λ . El mismo está dado por el siguiente árbol infinito \tilde{Q} con las relaciones correspondientes.



Usaremos el Teorema 3.3.9 (Criterio de Bongartz para tipo finito) para probar que las relaciones dadas en a), b) y c) determinan álgebras de tipo finito. Verificaremos a continuación las hipótesis del mismo.

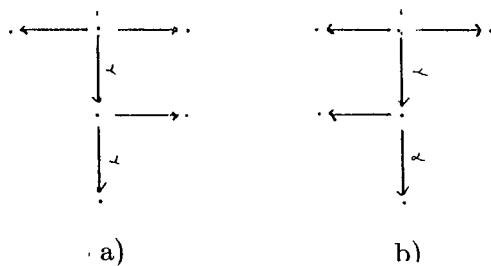
Que $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\langle \alpha^i, \beta_1\alpha^r, \beta_2\alpha^s \rangle$ (con i, r, s como en i), ii) y iii)) es simplemente conexa y verifica la condición 2a) del Teorema 3.3.9 siguen del hecho que \tilde{Q} es un árbol (cf. Observación 3.3.5 y 3.3.7). Usando la Proposición 3.3.8 se prueba fácilmente que Λ es standard. Para probar la condición 2b) del Teorema 3.3.9 notemos que $d = \dim_K \Lambda > n + (n - 1) + (i - 1) = 2n + i - 2$ pues Q tiene n vértices, $(n - 1)$ flechas que no son lazos e $(i - 1)$ potencias de α son no nulas en Λ . Luego $2d + 1 > 4n + 2i - 4 > n + i - 1$ y 2)b) sigue entonces de que \tilde{Q} no contiene subdiagramas convexos llenos de tipo A_r con $r > n + i - 1$. Esto resulta de la maximalidad del siguiente subdiagrama de \tilde{Q} de tipo A_{n+i-1} .



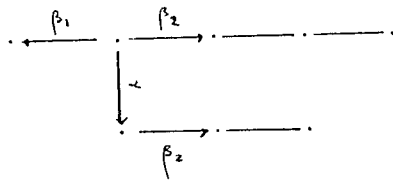
Es fácil ver que con las relaciones dadas en a), b) y c) \tilde{Q} no contiene subdiagramas convexos llenos de la lista [BHV]. Es decir, en estos casos se satisface también la condición 2)c) del Criterio de Bongartz y por lo tanto se obtienen álgebras de tipo de representación finito.

Análogamente a I.1.2., para probar que los casos a), b) y c) son los únicos que determinan álgebras de tipo finito, mostraremos a continuación, para cada uno de los casos restantes, un subdiagrama lleno \tilde{Q}' de \tilde{Q} de tipo infinito.

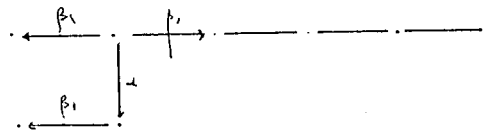
Tanto para el caso a) como para el caso b), si $i \geq 3$, \tilde{Q}' es de tipo \tilde{D}_5 :



Para las relaciones dadas en a), si $n \geq 5$, \tilde{Q}' es de tipo \tilde{E}_7 :

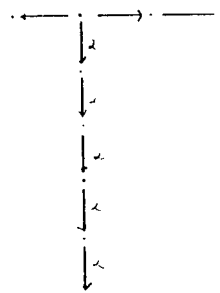


Para el caso b) con $n \geq 7$, \tilde{Q}' es de tipo \tilde{E}_8 :

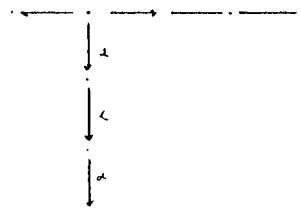


Consideremos por último las relaciones dadas en c).

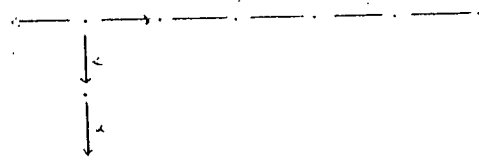
Si $n = 4$ y $i \geq 6$, \tilde{Q}' es de tipo \tilde{E}_8 :



Si $n = 5, 6$ y $i \geq 4$, \tilde{Q}' es de tipo \tilde{E}_7 :



Para $n = 7$ y $i \geq 3$, \tilde{Q}' es de tipo \tilde{E}_8 :

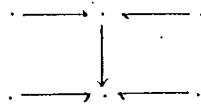


En los próximos items I.1.5, I.1.6 y I.1.7, Q y \tilde{Q} son los diagramas de I.1.4.

I.1.5. Consideremos el diagrama Q_{β_1, β_2} , $1 \xrightarrow{\beta_1^{\circ p}} \underset{\alpha}{\circlearrowleft} 2 \xleftarrow{\beta_2^{\circ p}} 3 \cdots \cdots n$.

Análogamente al caso I.1.3. la única relación a estudiar aquí es $\alpha^i = 0$ con $i > 1$.

El álgebra $\Lambda = KQ_{\beta_1, \beta_2} / \langle \alpha^i \rangle$ es de tipo de representación infinito pues su cubrimiento Galois universal $\tilde{Q}_{\beta_1, \beta_2}$ contiene un subdiagrama lleno de tipo \tilde{D}_5 como mostramos a continuación.



I.1.6. Sea ahora el diagrama Q_{β_2} , $1 \xleftarrow{\beta_1} \underset{\alpha}{\circlearrowleft} 2 \xleftarrow{\beta_2^{\circ p}} 3 \cdots \cdots n$.

Del Teorema 1.9 resulta que $\Lambda = KQ_{\beta_2}/I$ tiene la propiedad (IIP) si y sólo si $I = \langle \alpha^i, \beta_1 \alpha^j \rangle$ con $i > 1$ y $0 < j \leq i$. Si además Λ es de tipo de representación finito, entonces las álgebras $\Lambda_1 = \Lambda / \Lambda \cdot e_1 \cdot \Lambda$ y $\Lambda_2 = \Lambda / \Lambda \cdot (e_2 + \cdots + e_n) \cdot \Lambda$ también satisfacen la propiedad (IIP) y son de tipo finito. Luego, por la Observación.4.2. y los resultados obtenidos en I.1.2 y I.1.3 basta estudiar las siguientes relaciones en Λ :

- a) $\alpha^i = 0$, $i = 2, 3$
- b) $\alpha^i = \beta_1 \alpha = 0$, $i = 2, 3$
- c) $\alpha^i = \beta_1 \alpha^2 = 0$, $i = 3, 4, 5$.

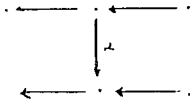
Veamos que Λ es de tipo de representación finito si y sólo si $\alpha^2 = \beta_1 \alpha = 0$ y $n \leq 4$.

De manera análoga a los casos considerados anteriormente se ve que tanto Λ como el cubrimiento Galois de Λ dado por el diagrama \tilde{Q}_{β_2} , satisfacen las hipótesis y las condiciones 2a), b) y c) del Teorema 3.3.9. cuando $\alpha^2 = \beta_1 \alpha = 0$ y $n \leq 4$. De aquí, Λ es de tipo finito en este caso.

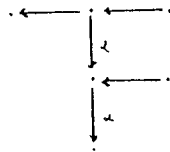
Tal como hemos hecho en los items anteriores, para probar que éstas son las únicas relaciones que determinan álgebras de tipo finito mostraremos, en cada uno de los casos

restantes, un subdiagrama lleno \tilde{Q}' de \tilde{Q}_{β_2} de tipo infinito.

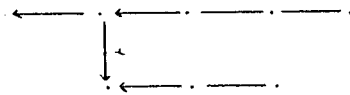
Para la relación dada en a), \tilde{Q}' es de tipo \tilde{D}_5 :



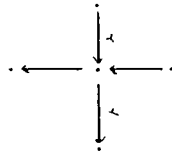
Si se tienen las relaciones de b) con $i = 3$, \tilde{Q}' también es de tipo \tilde{D}_5 :



Con las mismas relaciones de b) con $i = 2$ y $n = 5$, \tilde{Q}' es de tipo \tilde{E}_7 :



Finalmente para las relaciones dadas en c), \tilde{Q}' es de tipo \tilde{D}_4 :

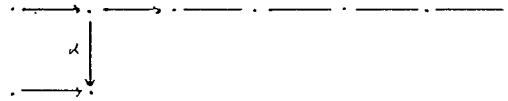


I.1.7. Consideremos ahora el diagrama $Q_{\beta_1} : 1 \xrightarrow{\beta_1^{op}} \underset{\alpha}{\circ} 2 \xrightarrow{\beta_2} 3 \cdots n$.

Se ve fácilmente, por las mismas razones que en el caso anterior I.1.6, que las relaciones a estudiar son las mismas a), b) y c) allí dadas.

Usando el cubrimiento Galois \tilde{Q}_{β_1} de Λ y el Teorema 3.3.9 se prueba fácilmente que cuando $n \leq 6$ el álgebra Λ definida por las relaciones $a^2 = \beta_2\alpha = 0$ es de tipo de representación finito. Probemos ahora que estas son las únicas relaciones que definen un álgebra de tipo finito.

Para las relaciones dadas en c) con $n \geq 7$, \tilde{Q}_{β_1} contiene un subdiagrama convexo lleno de tipo \tilde{E}_8 :



En los casos restantes se pueden elegir subdiagramas llenos de \tilde{Q}_{β_1} del mismo tipo que los elegidos en los casos análogos de I.1.6. \square

El caso I.1.7 completa el estudio de las álgebras dadas por diagramas de tipo $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\dots} n$. Consideraremos a continuación álgebras definidas por diagramas de la forma $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\dots} 3 \xrightarrow{\alpha} 4 \xrightarrow{\dots} n$.

Sea Q un tal diagrama. Si $n \leq 4$ entonces Q es uno de los estudiados anteriormente. Supongamos entonces $n \geq 5$. Por la Observación.4.2, si $\Lambda = KQ/I$ satisface la propiedad (IIP) entonces el álgebra cociente $\Lambda_1 = \Lambda/\Lambda.e_1.\Lambda$ también. Además, Λ_1 es de tipo finito si Λ lo es y basta estudiar aquellas relaciones en Λ tales que Λ_1 es de tipo finito. Como Λ_1 es el álgebra de caminos de uno de los diagramas estudiados en I.1.4, I.1.5, I.1.6 y I.1.7., usaremos los resultados allí obtenidos.

Consideraremos casos de acuerdo a la orientación de las flechas adyacentes al lazo.

I.1.8. Sea $Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta_1} 3 \xrightarrow{\alpha} 4 \xrightarrow{\beta_2} \dots \xrightarrow{\alpha} n$ con $n \geq 5$.

Sean Λ y Λ_1 como arriba. Teniendo en cuenta que $n \geq 5$ y utilizando los resultados de I.1.4 vemos que Λ_1 tiene la propiedad (IIP) y es de tipo finito en los siguientes casos:

a) $\alpha^2 = \beta_1\alpha = 0, n = 5$

b) $\alpha^2 = \beta_2\alpha = 0, n = 5, 6, 7$

c) $\alpha^i = \beta_1\alpha = \beta_2\alpha = 0, \text{ con } \begin{cases} n = 5, i \leq 5 \\ n = 6, 7, i \leq 3 \\ i = 2, \forall n \end{cases}$

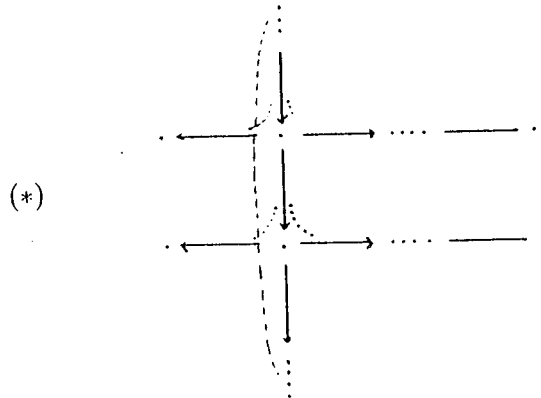
Consideremos entonces Λ definida por estas relaciones. Por el Teorema 1.9, Λ satisface la propiedad (IIP). Veamos cuándo Λ es un álgebra de tipo de representación finito.

Comenzamos considerando las relaciones dadas en a) y b). El cubrimiento Galois universal de Λ está dado por el diagrama \tilde{Q} indicado más abajo en (*) (con las relaciones correspondientes). Tanto en el caso a) como en el caso b) se pueden elegir subdiagramas

lentos de \tilde{Q} de tipo \tilde{E}_6 como sigue.

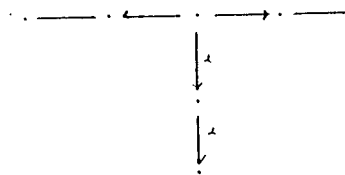


Supongamos ahora Λ definida por las relaciones de c). El siguiente diagrama \tilde{Q} con las relaciones indicadas es el cubrimiento Galois universal Λ .

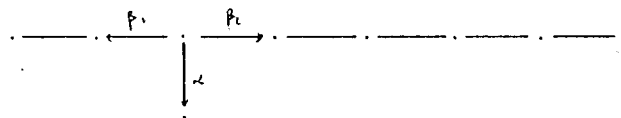


\tilde{Q} es un árbol y se ve fácilmente que se satisfacen las hipótesis y las condiciones 2)a) y b) del Teorema 3.3.9. Si $i = 2$ y $n \leq 7$ entonces vale también la condición 2)c) del Teorema y de aquí Λ es de tipo de representación finito en este caso.

Veamos que vale la recíproca. Si $i > 2$ cualquiera sea n se puede elegir el siguiente subdiagrama lleno de \tilde{Q} de tipo \tilde{E}_6 .



Si $i = 2$ y $n \geq 8$ entonces \tilde{Q} contiene un subdiagrama lleno de tipo \tilde{E}_8 que es el siguiente:



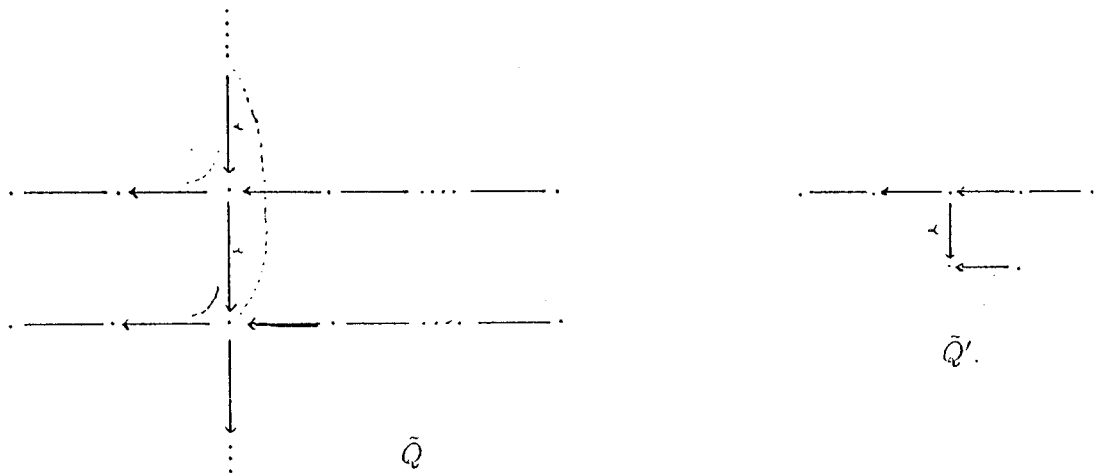
Luego las relaciones de c) definen un álgebra con la propiedad (IIP) y de tipo finito si y sólo si $i = 2$ y $n \leq 7$.

I.1.9. Sea Q un diagrama de la forma $1 \xrightarrow{\beta_1} 2 \xrightarrow{\alpha} 3 \xrightarrow{\beta_2} 4 \xrightarrow{\dots} n$ con $n \geq 5$. Si la orientación de las flechas β_1 y β_2 no es la del caso I.1.8. anterior, Q es uno de los siguientes diagramas:

- a) $1 \xrightarrow{\beta_1} 2 \xrightarrow{\alpha} 3 \xrightarrow{\beta_2} 4 \xrightarrow{\dots} n$
 b) $1 \xrightarrow{\beta_1} 2 \xrightarrow{\alpha} 3 \xrightarrow{\beta_2} 4 \xrightarrow{\dots} n$

Veamos que en cualquiera de los dos casos a) ó b) no existen álgebras con la propiedad (IIP) y de tipo finito dadas por estos diagramas.

Sea Q el diagrama de a) y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP). Entonces el ideal I de las relaciones de Λ es de la forma $I = \langle \alpha^i, \beta_1 \alpha^j \rangle$ con $0 < j \leq i$. Por la Proposición 4.1. $\Lambda_1 = \Lambda/\Lambda.e_1.\Lambda$ también tiene la propiedad (IIP) y de I.1.6 sigue que Λ_1 es de tipo de representación finito si y sólo si $\alpha^2 = \beta_1 \alpha = 0$ y $n = 5$. Luego por la Observación 4.2. basta estudiar estas relaciones sobre el álgebra Λ . Veamos que **en este caso Λ es de tipo de representación infinito**. Esto sigue de que el cubrimiento Galois universal de Λ está dado por el siguiente diagrama \tilde{Q} que contiene un subdiagrama convexo lleno \tilde{Q}' de tipo \tilde{E}_6 . Mostramos a continuación los diagramas \tilde{Q} y \tilde{Q}' .



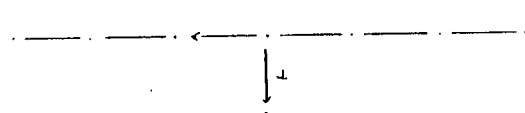
Supongamos ahora que Q es el diagrama dado en b) y sea $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP). El álgebra $\Lambda/\Lambda.e_1.\Lambda$ que también tiene la propiedad (IIP) fue estudiada en I.1.5 y allí se probó que es de tipo infinito. Luego, Λ es de tipo de representación infinito.

Con el caso I.1.9 finalizamos el estudio de los diagramas de la forma

$1 - 2 - \underset{\alpha}{\circlearrowleft} 3 - 4 - \dots - n$. Para completar el estudio de los diagramas de tipo A_n con un lazo en cualquiera de sus vértices sólo resta estudiar los diagramas de la forma

$1 - \dots - \underset{\alpha}{\circlearrowleft} k - \dots - n$ con $n \geq k + 3$ y $k \geq 4$.

Sea Q un tal diagrama y $\Lambda = KQ/I$ satisfaciendo la propiedad (IIP). El cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ de Λ se construye de manera análoga a los casos anteriores (donde $k < 4$) y es fácil ver que \tilde{Q} contiene al siguiente diagrama de tipo \tilde{E}_7 como subdiagrama convexo lleno.

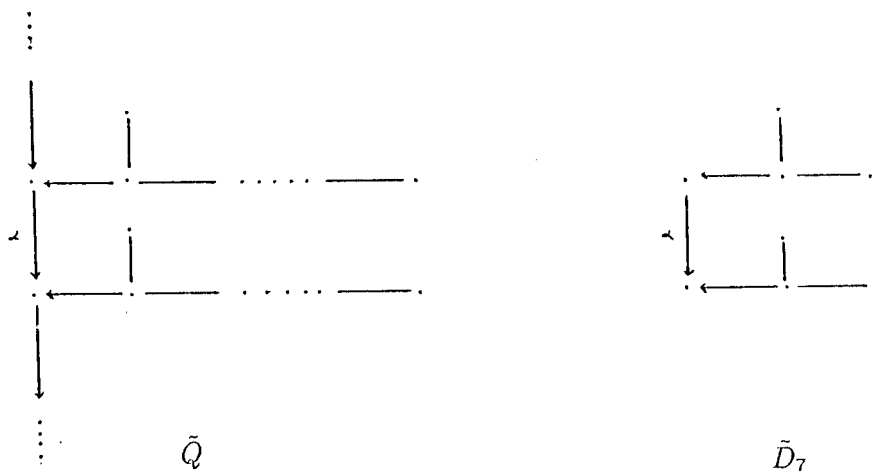


Esto prueba que **no existen álgebras $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP) y de tipo finito, si Q es de la forma $1 - \dots - \underset{\alpha}{\circlearrowleft} k - \dots - n$ con $n \geq k + 3$ y $k \geq 4$ y concluye la parte I.1. Continuaremos la sección I. considerando diagramas de Dynkin de tipo D_n con un lazo.**

I.2. Q es un diagrama de tipo D_n con un lazo en cualquiera de sus vértices.

I.2.1. Sea Q el diagrama $\underset{\alpha}{\circlearrowleft} 1 \xrightarrow{\beta} 1 - \dots - n$, $n \geq 3$.

Es claro que $\Lambda = KQ/I$ satisface la propiedad (IIP) si y sólo si $I = \langle \alpha^i \rangle$ con $i > 1$. Cualquiera que sea $i > 1$ el siguiente cubrimiento Galois \tilde{Q} de Λ contiene un subdiagrama lleno \tilde{Q}' de tipo \tilde{D}_7 . Mostramos a continuación ambos diagramas \tilde{Q} y \tilde{Q}' .

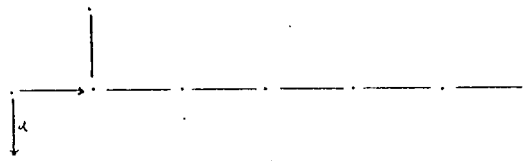


Luego Λ es de tipo de representación infinito cualquiera que sea $i > 1$.

I.2.2. Con la notación de la Observación 4.3. sea Q el diagrama de I.2.1 y consideremos

$$Q_\beta : \underset{\alpha}{\circlearrowleft} 1 \xrightarrow{\beta^{op}} 1 \cdots \cdots n, n \geq 3.$$

Sea $\Lambda = KQ_\beta/I$ con la propiedad (IIP). Si $n \geq 7$ el cubrimiento \tilde{Q}_β de Λ , construído a partir del diagrama \tilde{Q} de I.2.1., contiene un subdiagrama convexo lleno de tipo \tilde{E}_8 que es el siguiente.



Luego si $n \geq 7$ Λ es de tipo infinito.

Supongamos entonces $3 \leq n < 7$. De manera análoga a los casos anteriores, se ve que es condición necesaria para que Λ sea de tipo de representación finito que

$\Lambda_1 = \Lambda/\Lambda.e_{n+1}.\Lambda$ lo sea. Como Λ_1 también tiene la propiedad (IIP) sigue de aquí y I.1.2 que basta estudiar las siguientes relaciones en Λ :

- a) $\alpha^i = 0, i = 2, 3$
- b) $\alpha^i = \beta^{op}\alpha = 0$
- c) $\alpha^i = \beta^{op}\alpha^2 = 0, i = 3, 4, 5$

Sea \tilde{Q}_β el diagrama construído a partir del diagrama \tilde{Q} de I.2.1 cambiando la orientación de la flecha β . Por la Observación 4.3, \tilde{Q}_β con las relaciones correspondientes en cada caso, es el cubrimiento Galois de Λ .

Tanto en el caso a) como en el caso c) se puede elegir un subdiagrama convexo lleno de \tilde{Q}_β de tipo \tilde{D}_7 como sigue.



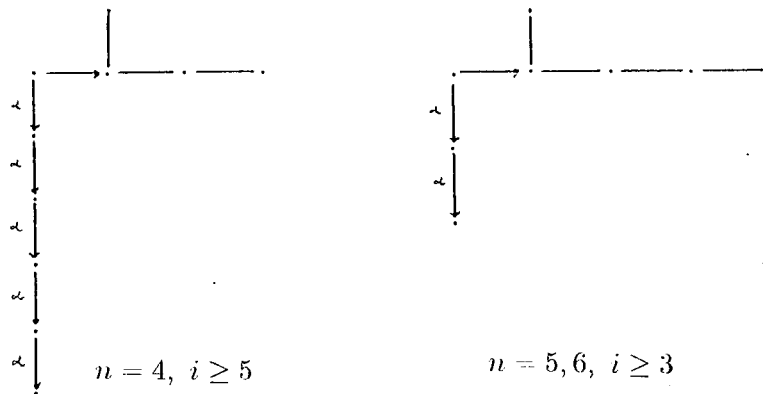
Luego, las relaciones de a) y c) determinan ambas álgebras de tipo infinito.

Veamos ahora que con las relaciones dadas en b),

$$(*) \quad \Lambda \text{ es de tipo finito} \iff \begin{cases} n = 3, \forall i \\ n = 4, i = 2, 3, 4 \\ n = 5, i = 2 \end{cases}$$

Es fácil ver que si i, n son como arriba, \tilde{Q}_β satisface las hipótesis y las condiciones 2) a), b) y c) del Teorema 3.3.9. de donde resulta que Λ es de tipo de representación finito.

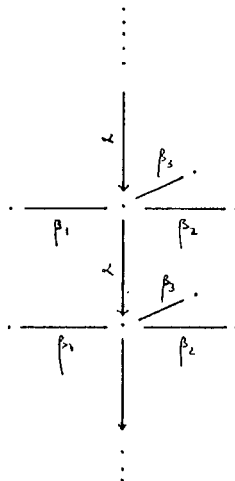
Para probar la recíproca, mostraremos a continuación diagramas de tipo infinito que pueden elegirse como subdiagramas llenos de \tilde{Q}_β en los restantes casos.



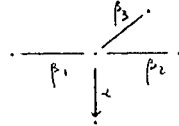
Con esto terminamos el caso I.2.2 probando (*). \square

La siguiente Observación prueba que no existen álgebras con la propiedad (IIP) y de tipo finito dadas por un diagrama de tipo $\begin{matrix} | \\ \circlearrowleft \\ \alpha \end{matrix}$.

Observación 4.4. Sea \mathcal{D} el diagrama $\begin{matrix} \beta_1 & | & \beta_2 \\ \circlearrowleft & & \\ \alpha & & \end{matrix}$ y sea $\Lambda = K\mathcal{D}/I$ un álgebra con la propiedad (IIP). El cubrimiento Galois universal de Λ está dado por un árbol infinito $\tilde{\mathcal{D}}$ con relaciones, que es el siguiente.



Como Λ tiene la propiedad (IIP) toda relación de Λ comienza en el lazo α y de aquí, cualquiera sea la orientación de las flechas $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, se puede elegir en \tilde{D} el siguiente subdiagrama lleno de tipo \tilde{D}_4 .



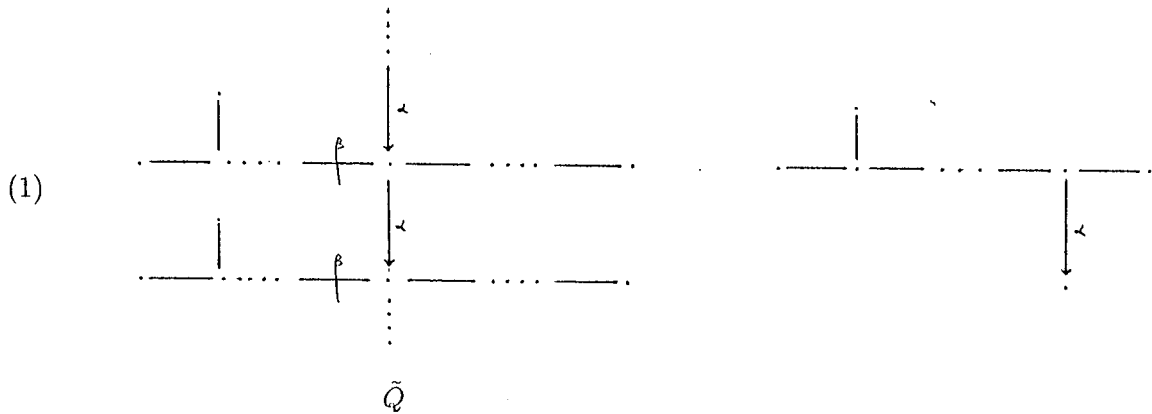
Esto prueba que Λ es de tipo de representación infinito. \square

De la Observación 4.4 anterior sigue que no es necesario estudiar aquellos diagramas que contengan al diagrama \mathcal{D} como subdiagrama lleno.

I.2.3. Sea Q el diagrama $1 \text{---} | \text{---} \dots \xrightarrow{\beta} \bigcirc_k \text{---} \dots \text{---} n$, $2 < k \leq n$.

Si $k < n$ y $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) entonces Λ es de tipo infinito.

En efecto, el siguiente diagrama \tilde{Q} con las relaciones correspondientes es un cubrimiento Galois de Λ y como Λ tiene la propiedad (IIP) se puede elegir un subdiagrama convexo lleno de tipo \tilde{D}_{k+2} en \tilde{Q} .



Estudiamos ahora el caso en que $k = n$, es decir Q es un diagrama de la forma

$$\text{---} | \text{---} \dots \xrightarrow{\beta} \bigcirc_n$$

Sea $\Lambda = KQ/I$. Si β es una flecha con final en el vértice n , Λ tiene la propiedad (IIP) si y sólo si $I = \langle \alpha^i \rangle$. De manera análoga al caso I.2.1 se prueba que Λ es de tipo de representación infinito cualquiera sea $i > 1$. Supongamos ahora que β es una flecha con origen en el vértice n .

Como en los casos estudiados anteriormente, se ve que las únicas relaciones a estudiar son aquellas tales que el álgebra $\Lambda_1 = \Lambda/\Lambda.e_{n+1}.\Lambda$ es de tipo finito. Tales relaciones fueron determinadas en I.1.2. y son las siguientes:

- a) $\alpha^2 = 0$
- b) $\alpha^i = \beta\alpha = 0, \forall i$
- c) $\alpha^3 = \beta\alpha^2 = 0$

El cubrimiento Galois universal de Λ está dado por el diagrama \tilde{Q} de (1) con $k = n$, la orientación adecuada de las flechas que están en la fibra de β y las relaciones correspondientes.

Es fácil ver que con las relaciones dadas en b) Λ y el cubrimiento que acabamos de dar satisfacen las hipótesis y las condiciones 2) a), b) y c) del Teorema 3.3.9. Por lo tanto, **las relaciones de b) definen un álgebra de tipo de representación finito.**

Se prueba de la misma manera que en I.2.2 que **las relaciones dadas en a) y c) determinan álgebras de tipo infinito.**

Esto completa el caso I.2.3 y el estudio de los diagramas de Dynkin de tipo D_n con un lazo en cualquiera de sus vértices.

Finalizamos la sección I estudiando a continuación diagramas de Dynkin de tipo E_p , $p = 6, 7, 8$ con un lazo.

I.3. Q es un diagrama de tipo E_p con $p = 6, 7, 8$ con un lazo en alguno de sus vértices.

Estudiaremos álgebras definidas por diagramas de la forma

$$(*) \quad 1 - 2 - \dots - k \circ - \dots - p-1$$

con $1 \leq k \leq p$, $p = 6, 7, 8$.

Sea Q un tal diagrama. Supongamos primero que $k = p$, es decir Q es un diagrama como el de arriba con un lazo en el vértice p , y sea $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP). Claramente, el cociente

$\Lambda' = \Lambda/\Lambda.(e_4 + \dots + e_{p-1}).\Lambda = KQ'/I'$ está dado por uno de los diagramas estudiados en I.2.1, I.2.2 y I.2.3 con relaciones y tiene también la propiedad (IIP). Además Λ' es de tipo finito si Λ lo es. Sigue de I.2.1, I.2.2 y I.2.3 que Λ' tiene la propiedad (IIP) y es de tipo finito si y sólo si Q' es el diagrama $\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \alpha \end{array} \xrightarrow{\beta} \begin{array}{c} | \\ \dots \\ \dots \end{array}$ con $\alpha^i = \beta\alpha = 0, i = 2, 3, 4$.

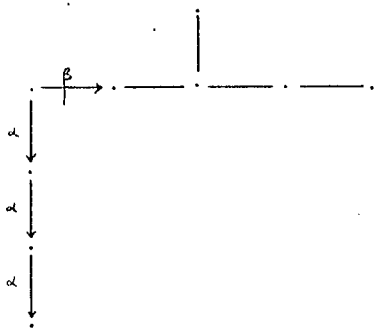
Podemos suponer entonces que Q es el diagrama $\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \alpha \end{array} \xrightarrow{\beta} \begin{array}{c} | \\ \dots \\ \dots \end{array}$ y considerar sobre Λ las relaciones $\alpha^i = \beta\alpha = 0$ con $i = 2, 3, 4$. Es fácil construir el cubrimiento Galois universal de Λ y ver que el mismo está dado por un diagrama que contiene un subdiagrama convexo lleno de tipo \tilde{E}_6 . Por lo tanto, Λ es de tipo de representación infinito.

Supongamos ahora que Q es el diagrama de $(*)$ con $k = 1$ ó 2 y sea $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP). Por el mismo razonamiento de arriba, basta estudiar sobre Λ aquellas relaciones tales que el cociente $\Lambda' = \Lambda/\Lambda.(e_4 + e_5 + \dots + e_{p-1}).\Lambda$ es de tipo de representación finito. Por la Observación 4.4, Λ' está dada por uno de los diagramas de I.2.1, I.2.2 ó I.2.3 y tiene también la propiedad (IIP). Análogamente al caso $k = p$ basta considerar entonces el caso en que Q es de la forma $\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \alpha \end{array} \xrightarrow{\beta} \begin{array}{c} 2 \\ \dots \\ \dots \end{array} \begin{array}{c} | \\ \dots \\ \dots \end{array}$ y Λ está definida por las relaciones $\alpha^i = \beta\alpha = 0$.

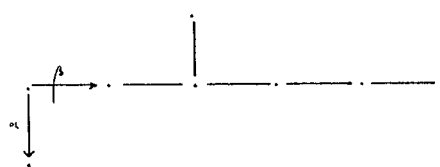
Probaremos que Λ es de tipo de representación finito si y sólo si $p = 6$ e $i \leq 3$.

El cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ se construye de manera análoga al caso I.2.2 y tanto Λ como $\tilde{\Lambda}$ satisfacen las hipótesis del Teorema 3.3.9 (Criterio de Bongartz para tipo finito). Además, es fácil ver que si $p = 6$ e $i \leq 3$ entonces se verifican las propiedades 2)a), b) y c) del Teorema. De aquí resulta que Λ es de tipo de representación finito cuando $p = 6$ e $i \leq 3$.

Veamos ahora que vale la recíproca. La misma sigue de que en cualquiera de los casos restantes \tilde{Q} contiene un subdiagrama lleno \tilde{Q}' de tipo \tilde{E}_p . Mostramos a continuación tal subdiagrama \tilde{Q}' en cada caso.



$p = 6, i \geq 4$



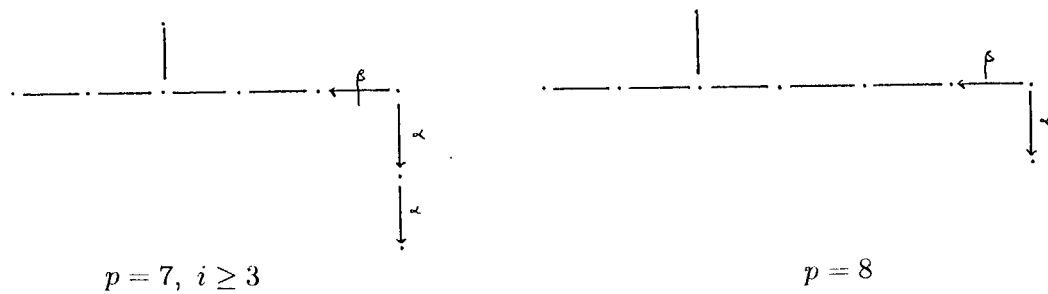
$p = 7, 8$

Por último supongamos que Q es el diagrama (*) con $3 \leq k \leq p-1$. Entonces $\Lambda' = \Lambda/\Lambda.e_1.\Lambda$ está dada por un diagrama Q' de los estudiados en I.1.2, I.2.2 ó I.2.3 y tiene la propiedad (IIP). Además, Λ' es de tipo finito si y sólo si Q' es de la forma $\dots \xleftarrow{\beta} \bigcirc_{\alpha}$ con las relaciones $\alpha^i = \beta\alpha = 0, \forall i$.

Por la Observación 4.3, basta estudiar entonces el caso en que Q es el diagrama $\dots \xleftarrow{\beta} \bigcirc_{\alpha}$ con las relaciones $\alpha^i = \beta\alpha = 0, i > 1$.

Notemos que el caso $p = 6$ fue estudiado cuando consideramos $k = 1$ ó 2 . Supongamos $p = 7, 8$ y veamos que Λ es de tipo finito si y sólo si $p = 7$ e $i = 2$.

Razonando de manera análoga a los casos anteriores se prueba usando el Teorema 3.3.9 que si $p = 7$ e $i = 2$ entonces Λ es de tipo de representación finito. La recíproca sigue de que si $p = 7$ e $i \geq 3$ ó $p = 8$, el cubrimiento Galois universal de Λ contiene un subdiagrama lleno de tipo \tilde{E}_8 como mostramos a continuación.



Este caso completa el estudio de las álgebras con la propiedad (IIP) y de tipo finito dadas por un diagrama de tipo $E_p, p = 6, 7, 8$ con un lazo. En resumen, hemos probado que si Q es un tal diagrama, $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) y es de tipo de representación finito en los siguientes casos:

- a) $\bigcirc_{\alpha} \xrightarrow{\beta} 2 \text{---} 1 \text{---} \dots \text{---} p-1,$ con $\alpha^i = \beta\alpha = 0, \begin{cases} p = 6, i \leq 3 \\ p = 7, i = 2 \end{cases}$
- b) $1 \text{---} 2 \text{---} 1 \text{---} \dots \xleftarrow{\beta} \bigcirc_{\alpha} p-1,$ con $\alpha^i = \beta\alpha = 0, p = 7, i = 2$

Finaliza aquí la sección I dedicada a las álgebras con la propiedad (IIP) dadas por diagramas de Dynkin con un lazo. En la sección II estudiaremos álgebras con la propiedad (IIP) dadas por un diagramas de Dynkin con dos lazos.

II. Q ES UN DIAGRAMA DE DYNKIN CON DOS LAZOS EN VERTICES DIFERENTES

Análogamente a la parte I., comenzamos estudiando los casos en que Q es un diagrama de Dynkin de tipo A_n con dos lazos.

Particularmente interesante y de gran utilidad en lo que sigue es el estudio de las álgebras definidas por el diagrama $Q : \underset{\alpha}{\circ}_1 \xrightarrow{\beta} \underset{\gamma}{\circ}_2$ con relaciones. Si $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) entonces entre las relaciones minimales de Λ aparece la relación

$$\beta\alpha^k = \sum_{j=0}^{k-1} P_j(\gamma)\beta\alpha^j, \quad k \geq 1$$

donde $P_j(\gamma)$ es un polinomio en γ para todo j . Se presenta entonces una nueva dificultad que es la de trabajar con polinomios arbitrarios.

II.1. Q es un diagrama de tipo A_n con dos lazos.

De acuerdo a lo dicho anteriormente es conveniente comenzar estudiando el diagrama Q :

$$\underset{\alpha}{\circ}_1 \xrightarrow{\beta} \underset{\gamma}{\circ}_2$$

II.1.1. Sea Q el diagrama de arriba y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP).

Es claro que como no existen caminos del vértice 2 en el vértice 1, $\tau_{P_1}P_2 = 0$ y que como Λ tiene la propiedad (IIP), $\tau_{P_2}P_1 \simeq P_2^k$, con $k > 0$. Estudiaremos por separado los casos :

a) $\tau_{P_2}P_1 \simeq P_2$

b) $\tau_{P_2}P_1 \simeq P_2^k, k > 1$

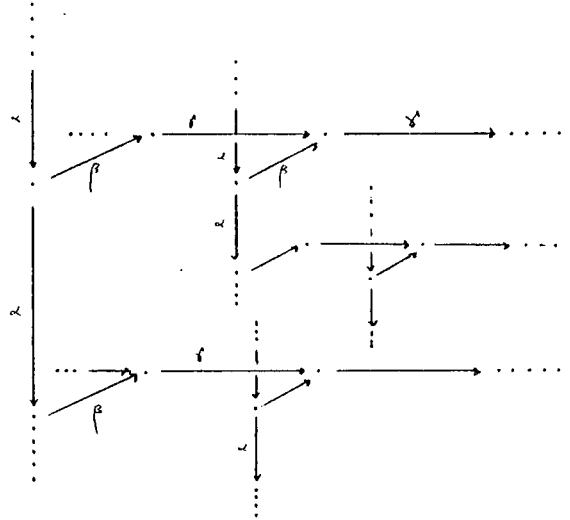
a) De acuerdo al Teorema 1.9, $(\beta) : P_2 \longrightarrow \tau_{P_2}P_1$ define un isomorfismo y la expresión de $\beta\alpha$ en β es de la forma

$$(*) \quad \beta\alpha = P(\gamma)\beta, \quad P(\gamma) \in K[\gamma]$$

Del Teorema 1.9 sigue también que si $\alpha^i = \gamma^j = 0$ con $i, j > 1$ son las relaciones de Λ que sólo involucran lazos entonces el ideal I está generado por $\alpha^i, \gamma^j, \beta\alpha - P(\gamma)\beta$. De aquí

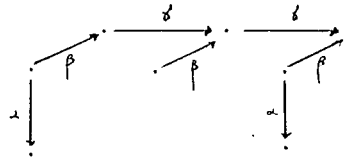
y del hecho que I es un ideal admisible resulta que $P(\gamma)$ es un elemento no inversible de $K[\gamma]$.

Supongamos primero que $P(\gamma) = 0$. Entonces $I = \langle \alpha^i, \gamma^j, \beta\alpha \rangle$ y el cubrimiento Galois universal de Λ está dado por el siguiente árbol infinito \tilde{Q} con las relaciones correspondientes.



Vamos a probar que cuando $P(\gamma) = 0$ en la expresión (*), Λ es de tipo de representación finito si y sólo si está definida por las relaciones $\alpha^i = \gamma^2 = \beta\alpha = 0, \forall i$.

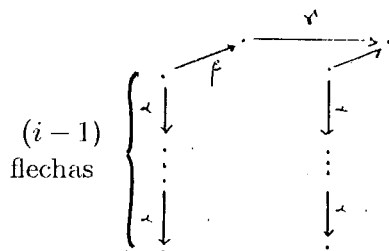
Si $j \geq 3$, \tilde{Q} contiene al siguiente diagrama de tipo \tilde{E}_7 como subdiagrama convexo lleno de donde resulta que Λ es de tipo de representación infinito en este caso.



Probemos ahora que para $j = 2$, Λ es de tipo de representación finito. Para ello usaremos el Teorema 3.3.9.

La Proposición 3.3.8 prueba que Λ es standard, y como \tilde{Q} es un árbol satisface las hipótesis y la condición 2)a) del Teorema 3.3.9. (cf. Observaciones 3.3.5 y 3.3.7).

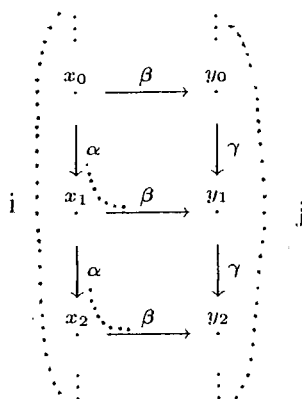
La condición 2)b) del mismo teorema resulta de que $d = \dim_K \Lambda = i + 4$, entonces $2d + 1 = 2i + 9 > 2i + 2$ y \tilde{Q} no contiene subdiagramas convexos llenos de tipo A_r con $r > 2i + 2$. Esto último sigue de la maximalidad del siguiente subdiagrama A_{2i+2} de \tilde{Q} .



Es fácil verificar que \tilde{Q} satisface además la condición 2)c), es decir, \tilde{Q} no contiene ningún subdiagrama convexo lleno de la lista [BHV]. Esto prueba que el álgebra

$\Lambda = KQ / \langle \alpha^i, \beta\alpha, \gamma^2 \rangle$ es de tipo de representación finito y concluye el caso $P(\gamma) = 0$ en la expresión (*) de $\beta\alpha$.

Observación 4.4. Notemos que el siguiente diagrama \tilde{Q}' con relaciones define también un cubrimiento Galois de Λ para el caso anterior.



Aquí el grupo que actúa es isomorfo a \mathbb{Z} , mientras que en el cubrimiento universal el grupo que actúa es el grupo libre con dos generadores $\pi(Q, 1) = \langle [\alpha]; [\beta^{-1}\gamma\beta] \rangle$.

En realidad, \tilde{Q}' es un cociente del cubrimiento Galois universal \tilde{Q} por el subgrupo normal $H = \langle [\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\beta] \rangle$ del grupo fundamental $\pi(Q, 1)$.

Si bien este cubrimiento parece ser más sencillo, no es simplemente conexo y por lo tanto no sirve para aplicar el Teorema 3.3.9. En efecto, $(x_0, x_1) + (x_1, y_1) - (y_0, y_1) - (x_0, y_0)$ es un elemento no nulo del primer grupo de homología $H_1(\tilde{Q}')$.

Este ejemplo muestra además que la hipótesis de simple conexidad sobre el cubrimiento en el Teorema 3.3.9 es absolutamente necesaria, pues si no lo fuera, considerando las

relaciones $\alpha^6 = \beta\alpha - \gamma\beta = \gamma^3 = 0$ en Q y \tilde{Q}' con las relaciones correspondientes, se satisfacen las condiciones 2)a), b) y c) del teorema y sin embargo $\Lambda = KQ / \langle \alpha^6, \beta\alpha - \gamma\beta, \gamma^3 \rangle$ no es de tipo de representación finito (cf. [BoG], 7.6). \square

Volviendo al estudio del caso II.1.1, supongamos ahora que $P(\gamma) \neq 0$ en la expresión (*) de $\beta\alpha$. Como además $P(\gamma)$ es no inversible $P(\gamma) = c_n\gamma^n + \dots + c_r\gamma^r$ con $c_r \neq 0$ en K y $r \geq 1$.

Consideraremos a continuación los casos $r = 1$ y $r > 1$.

Caso $r = 1$: Vamos a probar que $\Lambda = KQ / \langle \alpha^i, \gamma^j, \beta\alpha - (c_n\gamma^n + \dots + c_1\gamma)\beta \rangle$ es isomorfa al álgebra $\Lambda' = K(\cup_{\alpha}^{\beta} \cup_{\gamma'}^{\alpha}) / \langle \alpha^i, \gamma'^j, \beta\alpha - \gamma'\beta \rangle$, lo cual nos permite trasladar el problema sobre Λ a un problema sobre Λ' .

Como $P(\gamma)$ es no inversible en $K[\gamma]$ y $c_1 \neq 0$, $P(\gamma) = \gamma u$ con $u = c_n\gamma^{n-1} + \dots + c_1$ que es un elemento inversible en $K[\gamma]$. Haciendo la sustitución $\gamma' = \gamma u$ la expresión (*) de $\beta\alpha$ es la siguiente:

$$(**) \quad \beta\alpha = \gamma'\beta$$

Veamos que con esta sustitución el álgebra $\Lambda' = K(\cup_{\alpha}^{\beta} \cup_{\gamma'}^{\alpha}) / \langle \alpha^i, \gamma'^j, \beta\alpha - \gamma'\beta \rangle$ es isomorfa a Λ . Para ello basta probar que $K[\gamma] / \langle \gamma^j \rangle \simeq K[\gamma'] / \langle \gamma'^j \rangle$ lo cual sigue del siguiente lema más general.

Lema. Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K -álgebra conmutativa finitamente generada. Supongamos además que A es un anillo local con ideal maximal \mathfrak{M} . Entonces si γ genera \mathfrak{M} , $A \simeq K[\gamma] / \langle \gamma^n \rangle$ donde n es el menor natural tal que $\mathfrak{M}^n = 0$.

Demostración. Por una versión débil del Teorema de los ceros de Hilbert (cf. [AMc], 7.10) se tiene que $A/\mathfrak{M} \simeq K$ y de aquí, $A = K + \mathfrak{M} = K + A\gamma$.

Como A es un anillo artiniiano local existe un número natural n mínimo tal que $\mathfrak{M}^n = 0$. Luego, $A = K + A\gamma = K + (K + A\gamma)\gamma = K + K\gamma + A\gamma^2 = \dots = K + K\gamma + K\gamma^2 + \dots + K\gamma^{n-1} \simeq K[\gamma] / \langle \gamma^n \rangle$. \square

Podemos reducirnos entonces a estudiar el tipo de representación de Λ' . Vamos a probar que

las relaciones $\alpha^i = \gamma^j = 0$, $\beta\alpha = \gamma'\beta$ determinan un álgebra Λ' de tipo de representación finito exactamente en los siguientes casos:

i) $j = 2, \forall i$

ii) $j = 3, 3 \leq i \leq 5$

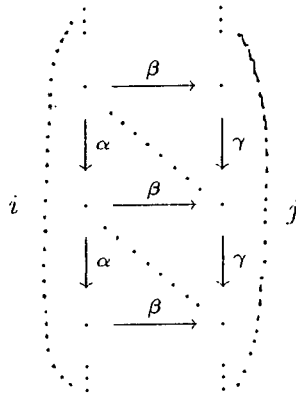
Esto probará que , cuando $r = 1$, Λ es de tipo de representación finito sólo si está definida por las relaciones siguientes de 1) ó 2):

1) $\alpha^i = \gamma^2 = 0, \beta\alpha = (c_1\gamma)\beta, c_1 \neq 0, \forall i$

2) $\alpha^i = \gamma^3 = 0, \beta\alpha = (c_2\gamma^2 + c_1\gamma)\beta, c_1, c_2 \neq 0, 3 \leq i \leq 5$

Probaremos primero , usando el Criterio de Bongartz para tipo finito, que tanto las condiciones de i) como las de ii) definen un álgebra Λ' de tipo de representación finito.

El siguiente diagrama infinito \tilde{Q} con relaciones es un cubrimiento Galois de Λ' .

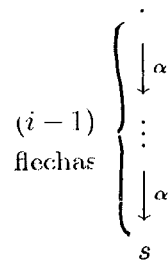


Notemos que todos los puntos de \tilde{Q} son separantes y que \tilde{Q} satisface las hipótesis de la Proposición 3.3.6, por lo tanto $H_1(\tilde{\Lambda}) = 0$. Más aún, $\tilde{\Lambda}$ es simplemente conexa.

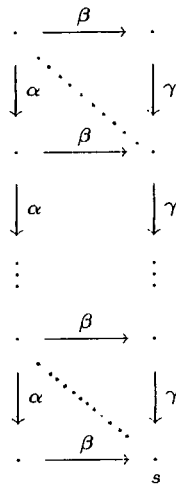
De la Proposición 3.3.7 sigue fácilmente que Λ es standard y de aquí, se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.3.9.

Veamos que la condición 2)a) del Teorema 3.3.9 se satisface para todo vértice s de \tilde{Q} , es decir que para todo vértice s de \tilde{Q} las categorías $K\tilde{\Lambda}_s$ y $K\tilde{\Lambda}^s$ son \tilde{A} - libres.

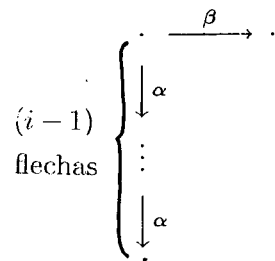
Basta probar 2)a) para las categorías $K\tilde{\Lambda}_s$. Si s es un vértice en la fibra del vértice 1 de Q entonces $K\tilde{\Lambda}_s$ es la categoría de caminos de un diagrama de Dynkin de tipo A_i .



Si s es un vértice en la fibra del vértice 2 de Q entonces $K\tilde{\Lambda}_s$ está dada por el siguiente diagrama y por lo tanto es \tilde{A} - libre.

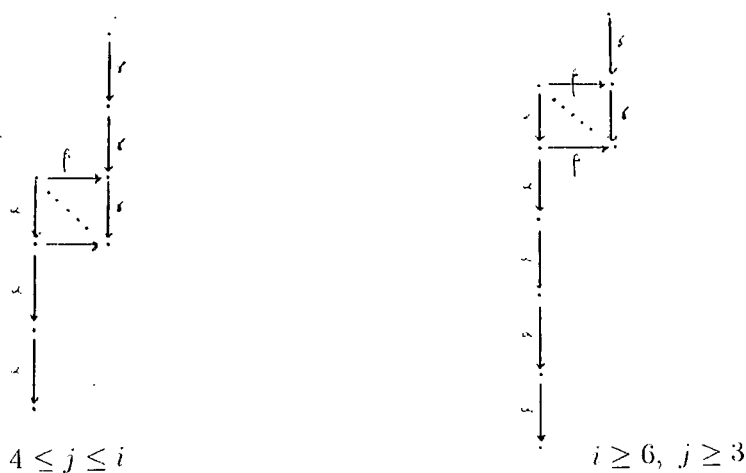


Sea $d = \dim_K(\Lambda)$. La condición 2)b) del Teorema 3.3.9 resulta inmediatamente de que $2d + 1 > d > i$ y \tilde{Q} no contiene subdiagramas convexos llenos de tipo A_r con $r > i$, lo cual sigue de la maximalidad del siguiente diagrama de tipo A_i .



Es fácil ver que en las condiciones de i) ó ii) \tilde{Q} satisface también 2)c) del Teorema 3.3.9, es decir, \tilde{Q} no contiene ningún subdiagrama convexo lleno de la lista [BHV]. Luego Λ' , y en consecuencia Λ , son de tipo de representación finito en estos casos.

Veamos ahora la recíproca. Para ello mostramos a continuación, en cada uno de los restantes casos, un subdiagrama convexo lleno de \bar{Q} perteneciente a la lista [BHV].



Esto concluye el caso en que $r = 1$.

Caso $r > 1$: En este caso $P(\gamma) = c_n \gamma^n + \dots + c_r \gamma^r$ con $c_r \neq 0$ y $r > 1$.

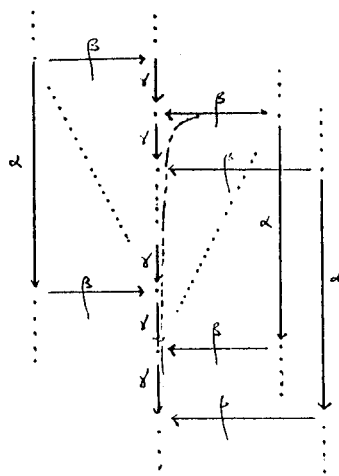
Como K es algebraicamente cerrado se puede suponer que $c_r = 1$ pues en caso contrario haciendo la sustitución $\gamma' = (c_r)^{\frac{1}{r}} \gamma$ se obtiene un álgebra isomorfa a Λ y en las condiciones deseadas.

Luego $P(\gamma) = c_n \gamma^n + \dots + \gamma^r$ y se tiene la siguiente inclusión de ideales de Λ :

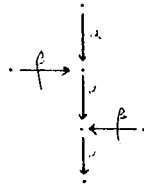
$$I \subseteq \langle \alpha^i, \beta\alpha - \gamma^r\beta, \gamma^{r+1}\beta, \gamma^j \rangle = J, \quad j \geq r + 1 \geq 3$$

Veamos primero que si $r > 2$, $\Lambda_J = KQ/J$ es de tipo de representación infinito de donde resulta que Λ es de tipo de representación infinito.

El cubrimiento Galois universal de Λ_J está dado por el siguiente diagrama \bar{Q}_J con las relaciones correspondientes:

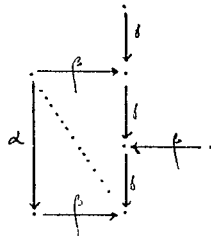


Como $r > 2$, \tilde{Q}_J contiene un subdiagrama convexo lleno de tipo \tilde{D}_5 que es el siguiente:



Notar que tal subdiagrama no es convexo si $r = 2$. Por tal razón consideramos el caso $r = 2$ por separado.

Sea $r = 2$, es decir, $P(\gamma) = c_n \gamma^n + \dots + \gamma^2$. Cuando $j \geq 4$ se puede elegir en \tilde{Q}_J el siguiente diagrama de la lista [BHV] como subdiagrama convexo lleno.

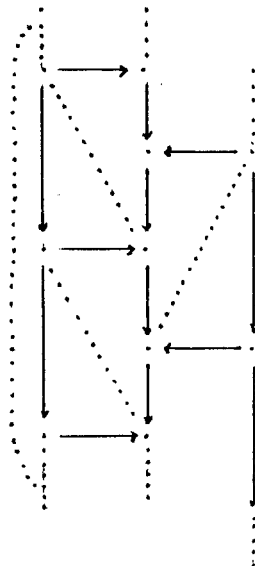


De aquí resulta que Λ es de tipo de representación infinito en este caso.

Resta estudiar entonces el caso $j = 3$ (es decir $\gamma^3 = 0$ en Λ). En este caso $P(\gamma) = \gamma^2$ y por lo tanto debemos estudiar cuándo las relaciones $\alpha^i = \gamma^3 = 0$, $\beta\alpha = \gamma^2\beta$ definen un álgebra Λ de tipo de representación finito.

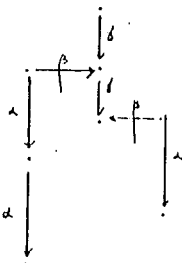
Probaremos que Λ es de tipo de representación finito si y sólo si $i = 2$.

Si $i = 2$ el siguiente diagrama \tilde{Q} con las relaciones correspondientes es el cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda}$ de Λ .



Es sencillo verificar que se satisfacen las hipótesis y las condiciones 2)a), b) y c) del Criterio de Bongartz y por lo tanto Λ es de tipo de representación finito cuando $i = 2$.

Si $i \geq 3$ se puede elegir en \tilde{Q} el siguiente subdiagrama convexo lleno de tipo \tilde{E}_7 lo cual prueba la recíproca.



Con esto concluimos con el caso $P(\gamma) \neq 0$ en la expresión (*) de $\beta\alpha$ y completamos también la parte a) en la cual consideramos $\tau_{P_2}P_1 \simeq P_2$.

Para el caso b) en que $\tau_{P_2}P_1 \simeq P_2^k$ con $k > 1$, tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 4.5. Sea Q el diagrama $\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\beta} & 2 \\ \circ & & \circ \\ \alpha & & \gamma \end{array}$ y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP). Supongamos que $\alpha^i = 0$, $\gamma^t = 0$ con $i, t > 1$ son las relaciones de Λ que sólo involucran lazos. Si $\tau_{P_2}(P_1) \simeq P_2^{k+1}$, con $k \geq 1$ entonces Λ es de tipo de representación infinito.

Demostración. Sea $\phi_1 = (\beta, \beta\alpha, \dots, \beta\alpha^k) : P_2^{k+1} \rightarrow \tau_{P_2}(P_1)$ el isomorfismo dado por el Teorema 1.9. Como $\beta\alpha^{k+1}$ pertenece a $\tau_{P_2}(P_1)$, tiene una expresión en los $\beta\alpha^j$ de la forma:

$$(*) \quad \beta\alpha^{k+1} = \sum_{j=0}^k P_j(\gamma)\beta\alpha^j, \quad P_j(\gamma) \in K[\gamma]$$

Si $k+1 = i$ entonces en la expresión anterior $P_j(\gamma) = 0$, $\forall j$, $0 \leq j \leq k$ y de acuerdo a la Observación.1.10 $I = \langle \alpha^i, \gamma^t \rangle$, $i, t > 1$. Es sencillo construir el cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ de Λ en este caso y verificar que \tilde{Q} contiene un subdiagrama lleno de tipo \tilde{A}_3 . Luego Λ es de tipo de representación infinito.

Supongamos ahora que $k+1 < i$. De la Observación 1.10 sigue que el conjunto $\{\alpha^i, \gamma^t, \beta\alpha^{k+1} - \sum_{j=0}^k P_j(\gamma)\beta\alpha^j\}$ genera al ideal I de las relaciones de Λ . De aquí, como I es un ideal admisible de KQ , el polinomio $P_0(\gamma)$ de la expresión anterior (*) debe ser un elemento no inversible de $K[\gamma]$.

Supongamos que todos los $P_j(\gamma)$ de la expresión (*) son no inversibles y consideremos separadamente los casos $k = 1$ y $k \geq 2$.

Caso $k \geq 2$: Como cada $P_j(\gamma)$ es no inversible admite un factor γ y por lo tanto se tiene la siguiente inclusión de ideales de KQ :

$$I = \langle \alpha^i, \gamma^t, \beta\alpha^{k+1} - \sum_{j=0}^k P_j(\gamma)\beta\alpha^j \rangle \subseteq \langle \alpha^i, \beta\alpha^{k+1}, \gamma \rangle = J$$

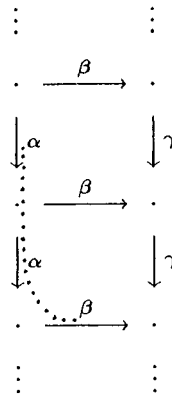
Claramente esta inclusión de ideales induce un epimorfismo de K - álgebras $\Lambda \longrightarrow KQ/J = \Lambda'$. El álgebra Λ' está dada por el diagrama $\mathcal{O} \xrightarrow{\beta}$ con las relaciones $\alpha^i = \beta\alpha^{k+1} = 0$ que ya vimos es de tipo infinito cuando $k \geq 2$. Luego Λ es de tipo de representación infinito en este caso.

Caso $k = 1$: En este caso la expresión (*) es la siguiente:

$$(**) \quad \beta\alpha^2 = P_0(\gamma)\beta + P_1(\gamma)\beta\alpha$$

Para probar que $\Lambda = KQ / \langle \alpha^i, \beta\alpha^2 - P_0\beta - P_1\beta\alpha, \gamma^t \rangle$ es de tipo de representación infinito consideraremos por separado los casos $P_0(\gamma) = P_1(\gamma) = 0$ y $P_0(\gamma), P_1(\gamma)$ no simultáneamente nulos.

Si $P_0(\gamma) = P_1(\gamma) = 0$ entonces $\Lambda = KQ / \langle \alpha^i, \beta\alpha^2, \gamma^t \rangle$ con $t > 1, i > 2$ y el siguiente diagrama \tilde{Q} , con las relaciones correspondientes, es un cubrimiento Galois de Λ con grupo \mathbb{Z} .



Se ve inmediatamente que \tilde{Q} contiene un subdiagrama convexo lleno de tipo \tilde{A}_3 y por lo tanto Λ es de tipo de representación infinito.

La técnica a seguir cuando P_0 y P_1 no son simultáneamente nulos es análoga a la del caso $k \geq 2$: se sumerge al ideal I en un ideal J tal que el álgebra $\Lambda' = KQ/J$ es de tipo de representación

infinito. Como existe un epimorfismo de K - álgebras $\Lambda \longrightarrow \Lambda'$ resultará que Λ es de tipo de representación infinito.

Supongamos entonces P_0 y P_1 no simultáneamente nulos. Como ambos polinomios son no inversibles en $K[\gamma]$ tienen una expresión de la forma:

$$P_0(\gamma) = (k_0 + Q_0\gamma)\gamma^r$$

$$P_1(\gamma) = (k_1 + Q_1\gamma)\gamma^s$$

con $Q_0, Q_1 \in K[\gamma]$, $1 \leq r, s \leq t-1$ y $k_0, k_1 \in K$. Es claro que k_i es no nulo si P_i lo es.

Consideremos separadamente los casos $r > 1$ y $r = 1$.

Si $r > 1$ entonces $2 < r+1 \leq t$ y se tiene la siguiente inclusión de ideales de KQ :

$$I = \langle \alpha^i, \beta\alpha^2 - P_0\beta - P_1\beta\alpha, \gamma^t \rangle \subseteq \underline{r}^3(KQ) = \langle \alpha^3, \beta\alpha^2, \gamma^2\beta, \gamma\beta\alpha, \gamma^3 \rangle$$

Ahora bien $\Lambda' = KQ/\underline{r}^3KQ$ es de tipo de representación infinito pues el diagrama \tilde{Q} construido en el caso $P_0 = P_1 = 0$, con las relaciones correspondientes, es un cubrimiento Galois de Λ' que contiene un subdiagrama lleno de tipo \tilde{A}_3 .

Supongamos ahora $r = 1$. Entonces la expresión (**) de $\beta\alpha^2$ es la siguiente:

$$(***) \quad \beta\alpha^2 = (k_0 + Q_0\gamma)\gamma\beta + (k_1 + Q_1\gamma)\gamma^s\beta\alpha, \quad 1 \leq s \leq t-1$$

Estudiamos por separado los casos $P_0 = 0$ y $P_0 \neq 0$.

i) Si $P_0(\gamma) = 0$ entonces

$$I = \langle \alpha^i, \beta\alpha^2 - (k_1 + Q_1\gamma)\gamma^s\beta\alpha, \gamma^t \rangle \subseteq \langle \alpha^i, \beta\alpha^2, \gamma\beta\alpha, \gamma^2 \rangle = J$$

Sea $\Lambda' = KQ/J$. El diagrama \tilde{Q} construido en el caso $P_0 = P_1 = 0$, con las relaciones correspondientes, es un cubrimiento Galois de Λ' que contiene un subdiagrama lleno de tipo \tilde{A}_3 . Luego Λ' , y en consecuencia Λ , son de tipo de representación infinito.

ii) Supongamos ahora $P_0(\gamma) \neq 0$. Entonces $P_0(\gamma) = (k_0 + Q_0\gamma)\gamma$ con $k_0 \neq 0$ y además $\beta\alpha^2 \neq 0$.

Luego debe ser $i \geq 3$. Veamos primero que si $i = 3$ entonces

$\Lambda = KQ/\langle \alpha^3, \beta\alpha^2 - P_0\beta - P_1\beta\alpha, \gamma^t \rangle$ no satisface la propiedad (IIP).

Si $i = 3$ entonces $0 = \beta\alpha^3 = P_0\beta\alpha + P_1\beta\alpha^2$ en Λ y reemplazando $\beta\alpha^2$ por su expresión (**) se tiene la siguiente igualdad en Λ :

$$0 = \beta\alpha^3 = P_0P_1\beta + (P_0 + P_1^2)\beta\alpha = (\beta, \beta\alpha)(P_0P_1, P_0 + P_1^2)$$

Como $(\beta, \beta\alpha)$ es un isomorfismo de $P_2^2 \rightarrow \tau_{P_2}P_1$ resulta que $P_0 + P_1^2 = 0$. Luego

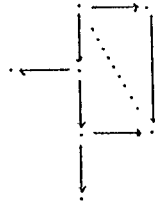
$$0 = P_0 + P_1^2 = (k_0 + Q_0\gamma)\gamma + (k_1 + Q_1\gamma)^2\gamma^{2s} = \gamma(k_0 + Q_0\gamma + (k_1 + Q_1\gamma)^2\gamma^{2s-1})$$

Como $k_0 \neq 0$ y $2s - 1 > 0$, $u = k_0 + Q_0\gamma + (k_1 + Q_1\gamma)^2\gamma^{2s-1}$ es un elemento inversible de $K[\gamma]$ y en consecuencia $\gamma = 0$ en Λ , lo cual es una contradicción.

Hemos probado que si Λ tiene la propiedad (IIP) entonces $i \geq 4$. En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned} I &= \langle \alpha^i, \beta\alpha^2 - P_0\beta - P_1\beta\alpha, \gamma^t \rangle = \\ &= \langle \alpha^i, \beta\alpha^2 - (k_0 + Q_0\gamma)\gamma\beta - (k_1 + Q_1\gamma)\gamma^s\beta\alpha, \gamma^t \rangle \subseteq \langle \alpha^4, \beta\alpha^2 - \gamma\beta, \gamma\beta\alpha, \gamma^2 \rangle \end{aligned}$$

Sea $J = \langle \alpha^4, \beta\alpha^2 - \gamma\beta, \gamma\beta\alpha, \gamma^2 \rangle$. El álgebra $\Lambda_J = KQ/J$ es de tipo de representación infinito pues su cubrimiento Galois universal, dado en el ejemplo 3.2.1.1) de la sección 3, contiene un subdiagrama convexo lleno de la lista [BHV] que es el siguiente:



Luego el álgebra $\Lambda = KQ/I$ es de tipo de representación infinito lo cual termina el caso $r = 1$ en $P_0(\gamma)$.

El siguiente lema asegura que la demostración del teorema está completa. \square

Lema 4.6. Con las hipótesis del teorema anterior, los polinomios $P_j(\gamma)$ en la expresión (*) de $\beta\alpha^{k+1}$, son no inversibles para todo $j = 0, \dots, k$.

Demostración. Consideramos el isomorfismo $\phi_1 = (\beta, \beta\alpha, \dots, \beta\alpha^k)$ elegido en la demostración del teorema anterior y la expresión (*) de $\beta\alpha^{k+1}$ en los $\beta\alpha^j$ dada también allí.

Supongamos por el absurdo que vale la siguiente condición

- (1) En la expresión (*) de $\beta\alpha^{k+1}$ en los $\beta\alpha^j$ existen índices $j_1 > j_2 > \dots > j_s = d$ con $s \geq 1$ tales que $P_{j_i}(\gamma)$ es inversible para todo $1 \leq i \leq s$.

Notemos que podemos hacer esta suposición porque $k \geq 1$. Para $k = 0$ la condición (1) nunca se cumple pues la expresión (*) de $\beta\alpha$ es $\beta\alpha = P_0(\gamma)\beta$ y ya dijimos que $P_0(\gamma)$ es no inversible en esta expresión porque las relaciones consideradas son admisibles.

Para cada i , $1 \leq i \leq s$, escribimos $P_{j_i}(\gamma) = \sum_{l=0}^{m_{j_i}} a_l^{(j_i)} \gamma^l$. Entonces la expresión (*) de $\beta\alpha^{k+1}$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} \beta\alpha^{k+1} &= \left(\sum_{1 \leq i \leq s} P_{j_i}(\gamma)\beta\alpha^{j_i} \right) + \left(\sum_{j \neq j_i} P_j(\gamma)\beta\alpha^j \right) = \\ &= (a_0^{(j_1)}\beta\alpha^{j_1} + a_0^{(j_2)}\beta\alpha^{j_2} + \dots + a_0^{(j_s)}\beta\alpha^{j_s}) + \gamma \cdot \left(\sum_{j=0}^k Q_j(\gamma)\beta\alpha^j \right) \end{aligned}$$

donde $\gamma Q_j(\gamma) = P_j(\gamma)$ si $j \neq j_i$ y $\gamma Q_{j_i}(\gamma) = P_{j_i}(\gamma) - a_0^{(j_i)}$ para todo $1 \leq i \leq s$.

Luego se tiene la igualdad:

$$(\beta\alpha^{k+1} - a_0^{(j_1)}\beta\alpha^{j_1} - \dots - a_0^{(j_s)}\beta\alpha^{j_s}) = \gamma \cdot \left(\sum_{j=0}^k Q_j(\gamma)\beta\alpha^j \right)$$

de donde sigue, por la minimalidad de d , la siguiente igualdad:

$$\beta\alpha^d (\alpha^{k+1-d} - a_0^{(j_1)}\alpha^{j_1-d} - a_0^{(j_2)}\alpha^{j_2-d} - \dots - a_0^{(d)}) = \gamma \cdot \left(\sum_{j=0}^k Q_j(\gamma)\beta\alpha^j \right)$$

Sea $u = \alpha^{k+1-d} - a_0^{(j_1)}\alpha^{j_1-d} - a_0^{(j_2)}\alpha^{j_2-d} - \dots - a_0^{(d)}$. Como $a_0^{(d)} \neq 0$, u es un elemento inversible del anillo $K[\alpha]$.

Se tiene entonces que:

$$\beta\alpha^d = \gamma \cdot \left(\sum_{j=0}^k Q_j(\gamma)\beta\alpha^j \right) \cdot u^{-1}, \quad u^{-1} \in K[\alpha]$$

Multiplicando en el segundo miembro $\left(\sum_{j=0}^k Q_j(\gamma)\beta\alpha^j \right)$ por u^{-1} y reemplazando cada $\beta\alpha^r$ por su respectiva expresión en los $\beta\alpha^j$ cada vez que $r > k$ se tiene una expresión

$$\beta\alpha^d = \gamma \cdot \left(\sum_{j=0}^k S_j(\gamma)\beta\alpha^j \right), \quad S_j(\gamma) \in K[\gamma]$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= \beta\alpha^d - \gamma \cdot \left(\sum_{j=0}^k S_j(\gamma) \beta\alpha^j \right) = \\ &= (\beta, \beta\alpha, \dots, \beta\alpha^k) (-\gamma.S_0(\gamma), -\gamma.S_1(\gamma), \dots, 1 - \gamma S_d(\gamma), \dots, -\gamma.S_k(\gamma)) \end{aligned}$$

Luego, como $(\beta, \beta\alpha, \dots, \beta\alpha^k)$ es un isomorfismo, todas las componentes de $(-\gamma.S_0(\gamma), -\gamma.S_1(\gamma), \dots, 1 - \gamma S_d(\gamma), \dots, -\gamma.S_k(\gamma))$ deben ser nulas. En particular, debe ser $1 - \gamma S_d(\gamma) = 0$ lo cual es una contradicción porque $1 - \gamma S_d(\gamma)$ es un elemento inversible de $K[\gamma]$.
□

Observación 4.7. Sea Q el diagrama $\begin{array}{ccc} & \beta & \\ \circlearrowleft & \xrightarrow{\beta} & \circlearrowright \\ \alpha & & \gamma \end{array}$ y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP).

Por el estudio hecho en II.1.1, Λ es de tipo de representación finito si y sólo si está definida por las relaciones siguientes:

- i) $\alpha^i = \gamma^2 = \beta\alpha = 0, \forall i$
- ii) $\alpha^i = \gamma^j = 0, \beta\alpha = c\gamma\beta, c \neq 0, j = 2, \forall i$
- iii) $\alpha^i = \gamma^3 = 0, \beta\alpha = (c_2\gamma^2 + c_1\gamma)\beta, c_1, c_2 \neq 0, i = 3, 4, 5$
- iv) $\alpha^2 = \gamma^3 = 0, \beta\alpha = c\gamma^2\beta, c \neq 0$

Es claro que el álgebra Λ definida por las relaciones de ii) es isomorfa a la definida por las mismas relaciones con $c = 1$, llamemos ii') a tal caso. Vimos además, en II.1.1, que si Λ está definida por las relaciones de iii) haciendo la sustitución $\gamma' = (c_2\gamma + c_1)\gamma$ se obtiene un álgebra isomorfa a Λ y definida por el diagrama $\begin{array}{ccc} & \beta & \\ \circlearrowleft & \xrightarrow{\beta} & \circlearrowright \\ \alpha & & \gamma' \end{array}$ con las relaciones:

$$iii') \alpha^i = \gamma'^3 = 0, \beta\alpha = \gamma'\beta, i = 3, 4, 5$$

En resumen, si Λ satisface la propiedad (IIP) y es de tipo de representación finito entonces Λ es isomorfa a un álgebra Λ' dada por las relaciones de i) ó iv) ó ii') ó iii').

Sea Q' un diagrama que contiene al diagrama Q como subdiagrama y $\Lambda' = KQ'/I'$ satisfaciendo la propiedad (IIP). Entonces el álgebra $\Lambda'' = \Lambda'/\Lambda' \left(\sum_{i \neq a, b} e_i \right) \Lambda'$ tiene también la propiedad (IIP) y está dada por el diagrama Q de arriba con relaciones.

Si además Λ' es de tipo de representación finito entonces Λ'' también lo es y por lo tanto Λ'' está definida por las relaciones de arriba con c_1, c_2, i y j en las condiciones de i), ii), iii) ó iv) de arriba.

Más aún, si β es el único camino (que no involucra lazos) que une los vértices a y b entonces toda relación de Λ'' es una relación de Λ' (cf. Observación.4.2).

En conclusión, para determinar todas las álgebras Λ' de tipo de representación finito basta estudiar las definidas por un conjunto de relaciones que contiene a las relaciones de i), ii), iii) ó iv) de arriba, y a menos de isomorfismo, se puede reemplazar a ii) y iii) por ii') y iii'). \square

El propósito ahora es estudiar los diagramas Q de la forma

$1 \cdots \xrightarrow{\alpha} i \xrightarrow{\beta} \cdots \xrightarrow{\gamma} k \cdots \xrightarrow{\delta} n$ con $i \geq 1, i+1 \leq k \leq n$. Comenzaremos con el caso $i=1, k=i+1=2$. Es decir, Q es de la forma $\xrightarrow{\alpha} \xrightarrow{\beta} \xrightarrow{\gamma} \xrightarrow{\delta} \cdots$.

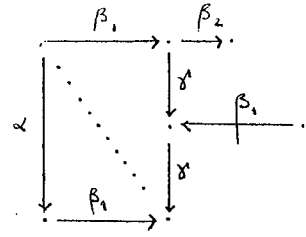
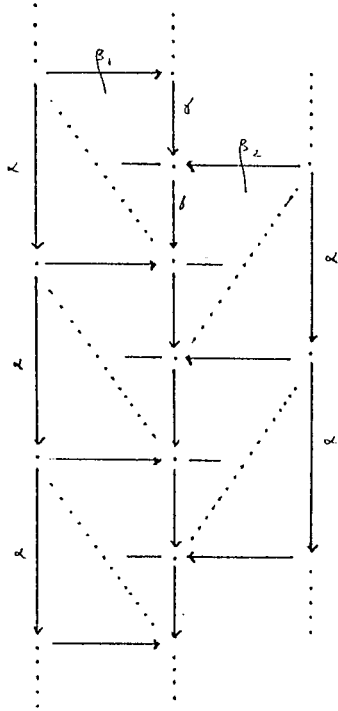
Sea Q un tal diagrama y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP). Es fácil ver, usando el cubrimiento Galois universal de Λ , que si el ideal I está generado por relaciones que sólo involucran a los lazos α y γ entonces Λ es de tipo de representación infinito.

Supongamos entonces que entre los generadores del ideal I aparecen además relaciones que involucran alguna flecha que no es un lazo. Damos a continuación un Lema que en adelante será de utilidad.

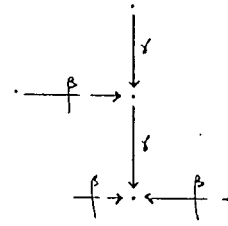
Lema.4.8. *Las siguientes álgebras definidas por diagramas con relaciones son de tipo de representación infinito.*

- a) $\xrightarrow{\alpha} \xrightarrow{\beta_1} \xrightarrow{\gamma} \xrightarrow{\beta_2} \cdots, \quad \alpha^2 = \gamma^3 = 0, \beta_1\alpha = \gamma^2\beta_1, \beta_2\gamma = 0 \text{ (ó } \gamma\beta_2 = 0)$
- b) $\xleftarrow{\beta_1} \xrightarrow{\alpha} \xrightarrow{\beta_2} \xrightarrow{\gamma} \cdots, \quad \alpha^2 = \gamma^3 = \beta_1\alpha = 0, \beta_2\alpha = \gamma^2\beta_2$

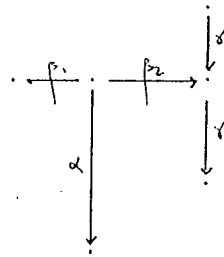
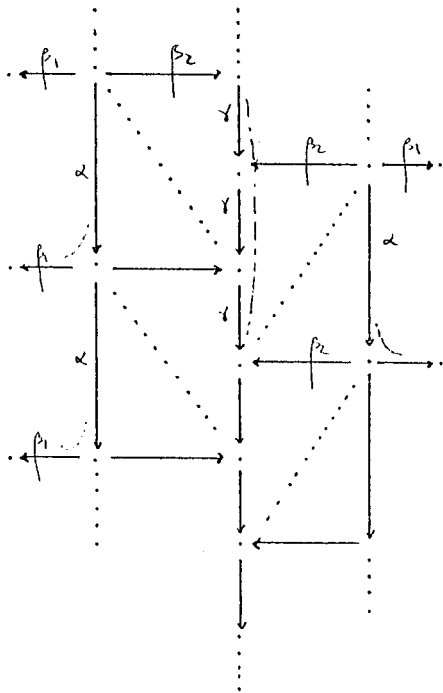
Demostración. Para la demostración usaremos la misma técnica que venimos utilizando en casos anteriores. Es decir, construimos en cada caso el cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ del álgebra Λ definida y mostramos un subdiagrama convexo lleno de \tilde{Q} de tipo de representación infinito.



$s(\beta_2) = s(\gamma), \beta\gamma = 0$



$e(\beta_2) = s(\gamma), \gamma\beta_2 = 0$



Observación.4.9 Sea Q un diagrama de Dynkin con dos lazos, $n \geq 3$ vértices y que contiene al diagrama $\begin{array}{c} \circlearrowleft \xrightarrow{\beta} \circlearrowright \\ \alpha \qquad \qquad \gamma \end{array}$ como subdiagrama.

Sea $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP). Si entre las relaciones de Λ aparece la relación $\beta\alpha = c\gamma^2\beta$, $c \in K$, $c \neq 0$ entonces Λ es de tipo de representación infinito. En efecto, en estas condiciones existe un cociente de Λ que es isomorfa a una de las álgebras definidas en el Lema.4.8. \square

Recordemos que nuestro próximo objetivo es estudiar las álgebras $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP) definidas por diagramas Q de la forma $\begin{array}{c} \circlearrowleft \xrightarrow{\beta} \circlearrowright \xrightarrow{\delta} \dots \text{---} \\ \alpha \qquad \qquad \gamma \end{array}$.

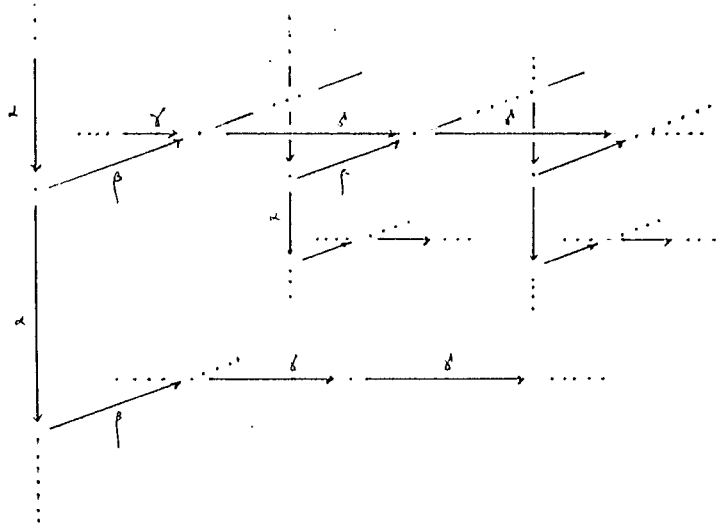
De acuerdo a las Observaciones 4.7 y 4.9 si Q es un tal diagrama y $\Lambda = KQ/I$ es de tipo de representación finito entonces toda relación de Λ que involucra a α , β y γ o bien es una relación cero o bien es una relación de la forma $\beta\alpha = (c_2\gamma^2 + c_1\gamma)\beta$ con $c_1 \neq 0$.

Consideraremos para empezar, en II.1.2, el caso en que Q es un tal diagrama y todas las relaciones de Λ son relaciones cero.

II.1.2. Sea $Q : \begin{array}{c} \circlearrowleft \xrightarrow{\beta} \circlearrowright \xrightarrow{\delta} \dots \text{---} \\ \alpha \qquad \qquad \gamma \end{array}$ y sea $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP) y tal que todas las relaciones de Λ son relaciones cero. Entonces Λ está dada por uno de los siguientes diagramas con relaciones.

- a) $\begin{array}{c} \circlearrowleft \xrightarrow{\beta} \circlearrowright \xrightarrow{\delta} \dots \text{---} \\ \alpha \qquad \qquad \gamma \end{array}, \quad \alpha^i = \gamma^j = \beta\alpha^r = \delta\gamma^s = 0, \quad 1 \leq r \leq i, 1 \leq s \leq j$
- b) $\begin{array}{c} \circlearrowleft \xrightarrow{\beta} \circlearrowright \xleftarrow{\delta} \dots \text{---} \\ \alpha \qquad \qquad \gamma \end{array}, \quad \alpha^i = \gamma^j = \beta\alpha^r = 0, \quad i, j, r > 1, r < i$
- c) $\begin{array}{c} \circlearrowleft \xleftarrow{\beta} \circlearrowright \xleftarrow{\delta} \dots \text{---} \\ \alpha \qquad \qquad \gamma \end{array}, \quad \alpha^i = \gamma^j = \beta\gamma^r = 0, \quad i, j, r > 1, r < j$
- d) $\begin{array}{c} \circlearrowleft \xleftarrow{\beta} \circlearrowright \xrightarrow{\delta} \dots \text{---} \\ \alpha \qquad \qquad \gamma \end{array}, \quad \alpha^i = \gamma^j = \beta\gamma^r = \delta\gamma^s = 0, \quad 1 \leq r \leq i, 1 \leq s \leq j$

En estos casos el cubrimiento Galois universal de Λ está dado por el siguiente árbol infinito \tilde{Q} con las relaciones correspondientes.



Vamos a probar que Λ es de tipo de representación finito si y sólo si Q es el diagrama dado en a) con $n = 3$ y las relaciones $\alpha^2 = \gamma^2 = \beta\alpha = \delta\gamma = 0$.

Usaremos el Criterio de Bongartz para tipo finito (Teorema 3.3.9) para probar que si Q es el diagrama de a) con $n = 3$ y las relaciones de arriba entonces Λ es de tipo de representación finito.

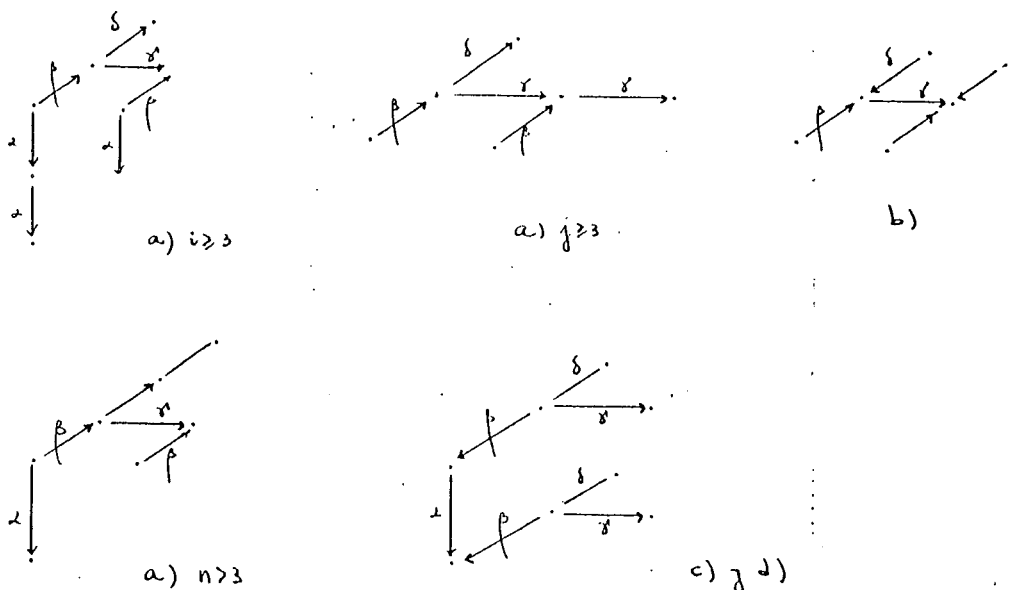
De la Proposición 3.3.8 sigue que Λ es standard. Ya hemos visto que si \tilde{Q} es un diagrama de árbol entonces satisface las hipótesis y la condición 2)a) del Criterio de Bongartz (cf. Observaciones 3.3.5 y 3.3.7).

Para verificar la condición 2)b) observemos que $d = \dim_K \Lambda > 4$ (pues α, β, γ y δ son linealmente independientes en el K -espacio vectorial Λ). Luego $2d+1 > 9$ y \tilde{Q} no contiene subdiagramas llenos de tipo A_r con $r > 6$.

Es muy sencillo verificar que en este caso también se satisface la condición 2)c) del Criterio de Bongartz ya que cualquier subdiagrama lleno de \tilde{Q} es un árbol y existen sólo 6 diagramas que son árboles en la lista [BHV].

Esto prueba que Λ es de tipo de representación finito en este caso.

Para probar que éste es el único caso tal que Λ es de tipo de representación finito mostraremos, en cada uno de los casos restantes, un subdiagrama convexo lleno de \tilde{Q} de tipo infinito.



Esto completa el caso II.1.2. \square

Estudiaremos a continuación, en II.1.3, II.1.4, II.1.5 y II.1.6 álgebras $\Lambda = KQ/I$ con

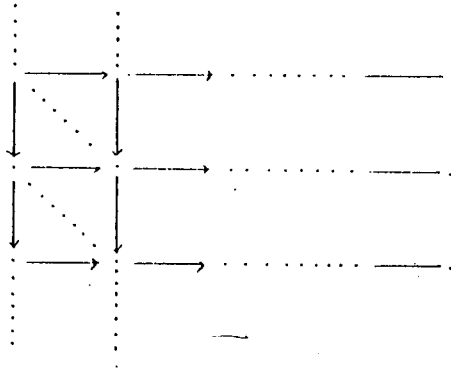
$Q: \begin{array}{c} \circlearrowleft_1 \xrightarrow{\beta} \circlearrowleft_2 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\gamma} \circlearrowleft_n \end{array}$, $n \geq 3$ y tales que no todas las relaciones de Λ son relaciones cero.

II.1.3. Sea Q el diagrama $\begin{array}{c} \circlearrowleft_1 \xrightarrow{\beta} \circlearrowleft_2 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\gamma} \circlearrowleft_n \end{array}$ y sea $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP) y en las condiciones de arriba. Por las Observaciones 4.7 y 4.9, basta estudiar cuándo las relaciones $\alpha^i = \gamma^j = \delta\gamma^r = 0$, $\beta\alpha = \gamma\beta$ definen un álgebra Λ de tipo de representación finito. Vamos a probar que Λ es de tipo de representación finito exactamente en los siguientes casos:

$$\begin{array}{l}
 \text{i) } n = 3, \quad \left\{ \begin{array}{l} r = i = j = 2 \\ \text{ó} \\ r = 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} j = 2, i \leq 5 \\ \text{ó} \\ i = j = 3 \end{array} \right. \end{array} \right. \\
 \\
 \text{ii) } n > 3, r = 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} i = j = 2 \\ \text{ó} \\ i = 3, j \leq 3, n < 6 \end{array} \right.
 \end{array}$$

El cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda}$ de Λ está dado por el siguiente diagrama \tilde{Q} con las

relaciones correspondientes.



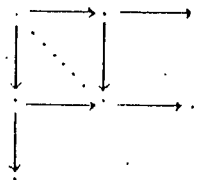
Es fácil ver que todo vértice s de \tilde{Q} es separante y que para cada s las categorías $K\tilde{\Lambda}_s$ y $K\tilde{\Lambda}^s$ son \tilde{A} -libres (notar que esta última propiedad es la condición 2)a) del Criterio de Bongartz para tipo finito). Con esto $\tilde{\Lambda}$ es un cubrimiento simplemente conexo de Λ (cf. Proposición 3.3.6).

Por otro lado, usando la Proposición 3.3.8 se prueba fácilmente que Λ es un álgebra distributiva y por lo tanto Λ es standard. Estamos entonces en las condiciones del Criterio de Bongartz para tipo finito.

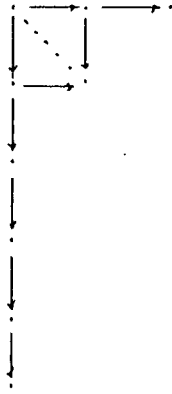
Es sencillo ver que para i, j, r y n en las condiciones de i) ó ii), se satisfacen además las condiciones 2) b) y c) del Criterio de Bongartz y por lo tanto Λ es de tipo de representación finito en estos casos.

De manera análoga a los casos anteriores probaremos la recíproca mostrando, en cada uno de los casos restantes diferentes a i) y ii), un subdiagrama convexo lleno \tilde{Q}' de \tilde{Q} de tipo de representación infinito.

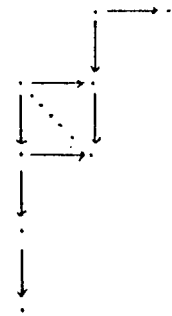
Si $n = 3$ y $r = j = 2$ e $i \geq 3$, se puede elegir \tilde{Q}' como el siguiente diagrama de la lista [BHV].



Para $n = 3, r = 1, i > 5, 2 \leq j < i$ podemos elegir al siguiente diagrama de la lista [BHV] como subdiagrama \tilde{Q}' .

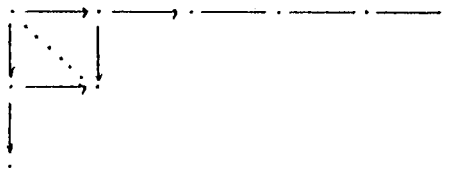


Cuando $n = 3$, $r = 1$, $j = 3$, $i \geq 4$, elegimos \tilde{Q}' perteneciente a la lista [BHV] como sigue:

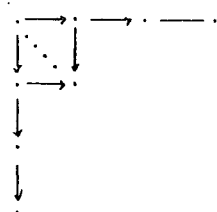


Sea ahora $n > 3$ y $r = 1$.

Para $i = 3$, $n \geq 6$ elegimos \tilde{Q}' del mismo tipo que en el caso $n = 3$, $r = 1$, $i > 5$.



Finalmente, si $i > 3$ se puede elegir \tilde{Q}' como sigue:



Esto concluye el caso II.1.3. \square

II.1.4. Estudiaremos ahora el diagrama Q_δ donde Q es el diagrama de II.1.3. Es decir, Q_δ es el

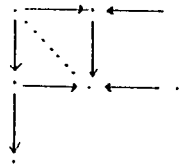
$$\text{diagrama } \bigcirc_\alpha 1 \xrightarrow{\beta} \bigcirc_\gamma 2 \xleftarrow{\delta^{op}} \dots \text{---}_n$$

Sea $\Lambda_\delta = KQ_\delta/I$ con la propiedad (IIP) y tal que no todas las relaciones de Λ_δ son relaciones cero. Por el mismo razonamiento del caso anterior II.1.3, para determinar todas las álgebras Λ_δ de tipo de representación finito sólo debemos estudiar el caso $I = \langle \alpha^i, \gamma^j, \beta\alpha - \gamma\beta \rangle$ con $1 < j \leq i$. Recordemos que la desigualdad $j \leq i$ sigue de la Observación 1.11.

Veamos que Λ_δ es de tipo de representación finito si y sólo si $i = j = 2$ y $n = 3$.

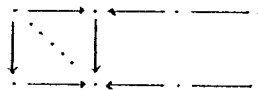
Sea \tilde{Q} el cubrimiento construido en II.1.3. El diagrama \tilde{Q}_δ construido a partir de \tilde{Q} , cambiando la orientación de las flechas que están en la fibra de δ y considerando las relaciones correspondientes, es el cubrimiento Galois universal de Λ_δ .

Se ve fácilmente que si $i \geq 3$ entonces \tilde{Q}_δ contiene al siguiente diagrama de la lista [BHV] como subdiagrama lleno.



Por otro lado, tanto Λ_δ como el cubrimiento dado por \tilde{Q}_δ están en las condiciones del Teorema 3.3.9 y es sencillo verificar las propiedades 2)a), b) y c) del mismo cuando $i = j = 2$ y $n = 3$. De aquí, Λ_δ es de tipo de representación finito en este caso.

Sin embargo, si se consideran estas relaciones sobre Q_δ para $n > 3$ se obtiene un álgebra de tipo de representación infinito. En efecto, \tilde{Q}_δ contiene al siguiente diagrama de la lista [BHV] como subdiagrama convexo lleno.



II.1.5. Sea Q el diagrama dado en II.1.3. y $Q_{\beta,\delta}$ el diagrama obtenido a partir de Q cambiando la orientación de las flechas β y δ : $\underset{\alpha}{\circlearrowleft} 1 \xleftarrow{\beta^{op}} \underset{\gamma}{\circlearrowleft} 2 \xleftarrow{\delta^{op}} \dots \xrightarrow{\quad} n \dots$

Veamos cuáles son las álgebras $\Lambda_{\beta,\delta} = KQ_{\beta,\delta}/I$ con la propiedad (IIP) y de tipo de representación finito. Recordemos que estamos suponiendo que no todas las relaciones de $\Lambda_{\beta,\delta}$ son relaciones cero.

Por las Observaciones 4.7 y 4.9 sólo debemos estudiar el caso en que entre las relaciones de $\Lambda_{\beta,\delta}$ aparece la relación de conmutatividad $\beta^{op}\gamma = \alpha\beta^{op}$. Como $\Lambda_{\beta,\delta}$ tiene la propiedad (IIP) ésta es la única relación de $\Lambda_{\beta,\delta}$ que no sólo involucra lazos.

En este caso $\Lambda_{\beta,\delta}$ es el álgebra opuesta del álgebra Λ de II.1.3 con $r = j$. De allí resulta entonces que $\Lambda_{\beta,\delta}$ es de tipo de representación finito si y sólo si está definida por las relaciones $\alpha^2 = \gamma^2 = 0$, $\beta^{op}\gamma = \alpha\beta^{op}$ con $n = 3$.

II.1.6. Sea Q el diagrama de II.1.3. y Q_β el diagrama obtenido a partir de Q cambiando la orientación de la flecha β , es decir, Q_β es el diagrama $\bigcirc_\alpha 1 \xleftarrow{\beta^{op}} \bigcirc_\gamma 2 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{n}$:

Sea $\Lambda_\beta = KQ_\beta/I$ con la propiedad (IIP) y tal que no todas las relaciones de Λ_β son relaciones cero. Por el Teorema 1.9, el ideal I de las relaciones de Λ_β es de la forma $I = \langle \alpha^i, \gamma^j, \beta^{op}\gamma^r - \sum_{k=0}^{r-1} P_k(\alpha)\beta^{op}\gamma^k, \delta\gamma^s \rangle$ con $1 < r, s \leq j$. De acuerdo con las Observaciones 4.7 y 4.9, basta estudiar cuándo las relaciones $\alpha^i = \gamma^j = \delta\gamma^s = 0$, $\beta^{op}\gamma = \alpha\beta^{op}$ determinan un álgebra de tipo de representación finito.

Recordemos que por la Observación 1.11 se puede suponer que $1 < i \leq j$.

Probaremos que Λ_β es de tipo de representación finito si y sólo si $s = i = j = 2$ y $n = 3$, ó $s = 1$ e i, j y n satisfacen alguno de los siguientes casos i) ó ii).

$$i) \quad n = 3, \quad \begin{cases} i = 2, j \leq 5 \\ \text{ó} \\ i = j = 3 \end{cases}$$

$$ii) \quad 3 < n < 7, i = j = 2$$

Si $s = j$ entonces Λ_β es el álgebra dual del álgebra Λ_δ de II.1.4 y por lo tanto es de tipo de representación finito para $i = j = 2$ y $n = 3$.

De manera análoga a los casos anteriores usaremos el Criterio de Bongartz para tipo finito para probar que tanto las condiciones dadas en i) como las dadas en ii) determinan

un álgebra de tipo de representación finito cuando $s = 1$.

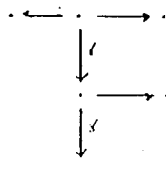
Supongamos que $s = 1$ y que estamos en las condiciones de i) ó ii). Sigue inmediatamente de la Proposición 3.3.8 que Λ_β es distributiva.

Por otro lado, si \tilde{Q} es el cubrimiento construido en II.1.3, entonces \tilde{Q}_β , con las relaciones correspondientes, es el cubrimiento Galois universal de Λ_β en estos casos. De la misma manera que se probó en II.1.3 que \tilde{Q} (con las relaciones allí consideradas) es simplemente conexo se puede probar que \tilde{Q}_β (con las relaciones correspondientes a este caso) es simplemente conexo. Notar que las relaciones sobre \tilde{Q} en II.1.3 son análogas a las que estamos estudiando aquí.

Luego Λ_β es un álgebra standard y estamos en las condiciones del Criterio de Bongartz para tipo finito. Más aún, es fácil ver que tanto en i) como en ii) el cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda}_\beta = K\tilde{Q}_\beta/\tilde{I}$ de arriba satisface las condiciones 2)a), b) y c) del Criterio de Bongartz y por lo tanto Λ_β es de tipo de representación finito en estos casos.

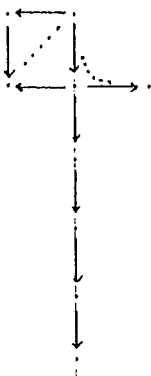
Tal como hemos hecho en los casos anteriores, para probar que las condiciones de i) y ii) son las únicas que determinan álgebras de tipo de representación finito, mostraremos a continuación, para cada uno de los casos restantes, un subdiagrama convexo lleno \tilde{Q}'_β de \tilde{Q}_β de tipo de representación infinito.

Si $s > 1$, $s \neq j$ y $j > 2$ se puede elegir \tilde{Q}_β de tipo \tilde{D}_5 como sigue:

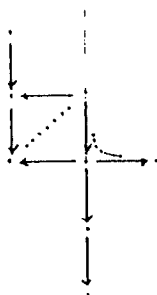


Supongamos ahora $s = 1$.

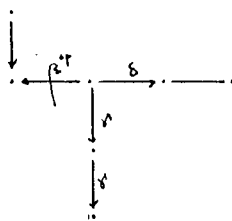
Cuando $n = 3$, $j > 5$ e $i = 2$ se puede elegir \tilde{Q}'_β como el siguiente diagrama perteneciente a la lista [BHV].



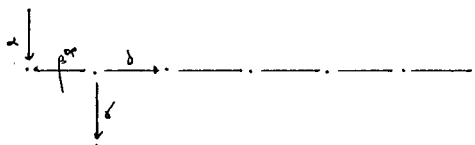
Para $n = 3$ y $j > 3$ e $i = 3$ elegimos \tilde{Q}'_β como el siguiente diagrama de la lista [BHV].



Cuando $3 < n < 7$ y $j \geq 3$ se puede elegir \tilde{Q}'_β de tipo \tilde{E}_7 como mostramos a continuación.



Por último, si $n \geq 7$, elegimos \tilde{Q}'_β de tipo \tilde{E}_8 como sigue.



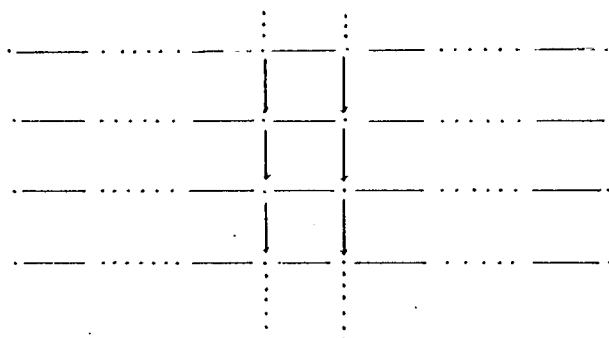
Esto termina el caso II.1.6. y el estudio de los diagramas de la forma $\bigcirc_\alpha \frac{\beta}{\gamma} \bigcirc_\gamma \frac{\delta}{\dots} \dots$.

Estudiaremos a continuación los diagramas de la forma $1 \dots \frac{\beta_1}{\alpha} \bigcirc_k \frac{\beta_2}{\gamma} \bigcirc_\gamma \frac{\beta_3}{\dots} \dots \dots n$ con $n \geq 4$ y $k > 1$.

Sea Q un diagrama como arriba y $\Lambda = KQ/I$ tal que todas las relaciones de Λ son relaciones cero. Entonces $\Lambda' = \Lambda/\Lambda(e_1 + \dots + e_{k-1})\Lambda$ es una de las álgebras consideradas en II.1.2 y por lo tanto es de tipo de representación infinito. Luego Λ es de tipo de representación infinito.

Podemos reducirnos entonces a estudiar los casos en los que entre las relaciones de Λ aparece una de la forma $\beta\alpha = \gamma\beta$ con β una flecha y α, γ lazos (cf. Observaciones 4.7 y 4.9).

Observación.4.10. Sea Q un diagrama como arriba y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP) tal que entre las relaciones de Λ aparece una relación de conmutatividad que involucra a β_2, α y γ . Entonces el cubrimiento Galois universal de Λ está dado por el siguiente diagrama conmutativo \tilde{Q} con las relaciones cero correspondientes.



Por otro lado, de acuerdo a la Observación 4.2, el álgebra $\Lambda' = \Lambda/\Lambda(\sum_{i=1}^{k-1} e_i)\Lambda$ satisface la propiedad (IIP) y está dada por el diagrama Q' que se obtiene de Q quitando los vértices $1, \dots, k-1$. Más aún, $\Lambda' = KQ'/I \cap KQ'$ y para determinar cuándo Λ es de tipo de representación finito basta considerar relaciones de Λ tal que Λ' es de tipo de representación finito. Claramente, las álgebras Λ' fueron estudiadas en II.1.2, II.1.3, II.1.4, II.1.5 y II.1.6 y los resultados allí obtenidos serán de gran utilidad en lo que sigue. \square

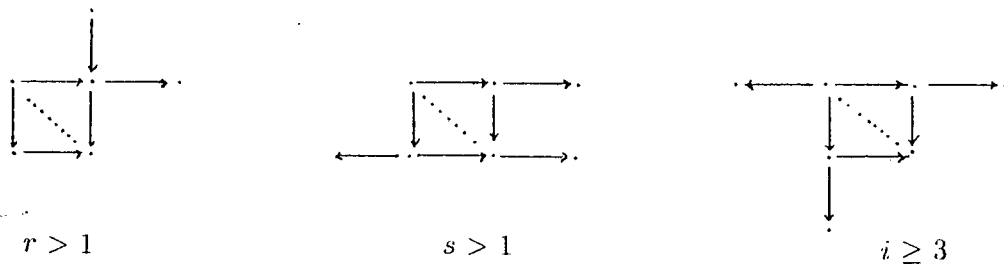
II.1.7 Sea Q el diagrama $1 \dots \xleftarrow{\beta_1} \underset{\alpha}{\circlearrowleft} \xrightarrow{\beta_2} \underset{\gamma}{\circlearrowright} \xrightarrow{\beta_3} \dots \xrightarrow{\beta_n} n$ con $n \geq 4$ y $k \geq 2$ y sea $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP).

Estudiamos cuándo las relaciones $\alpha^i = \gamma^j = \beta_3\gamma^r = \beta_1\alpha^s = 0, \beta_2\alpha = \gamma\beta_2$ con $1 < j, s \leq i, 1 < r \leq j$ definen un álgebra Λ de tipo de representación finito.

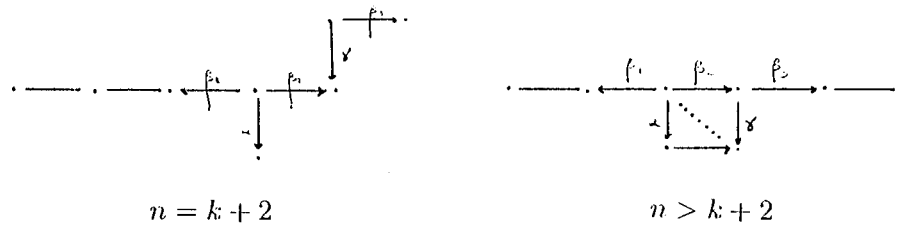
Probaremos que Λ es de tipo de representación finito si y sólo si $r = s = 1$, $i = j = 2$, con $\begin{cases} k = 2, \forall n \\ 2 < k < n \leq 5 \end{cases}$.

Veamos primero que si no estamos en las condiciones de arriba para r, s, i, j, n entonces Λ es de tipo de representación infinito. Para ello usamos la misma técnica que en los casos anteriores. Es decir, mostramos para cada uno de los casos restantes, un subdiagrama convexo lleno \tilde{Q}' de tipo infinito del diagrama \tilde{Q} dado en la Observación.4.10, el cual define el cubrimiento Galois universal de Λ .

Si $r > 1$ ó $s > 1$ ó $i \geq 3$ se puede elegir \tilde{Q} como uno de los siguientes diagramas de la lista [BHV]:



Para $n > 5$ y $k > 2$ elegimos \tilde{Q} de tipo \tilde{E}_7 ó perteneciente a la lista [BHV] según $n = k + 2$ ó $n > k + 2$.



Análogamente a los casos anteriores, usando el Criterio de Bongartz para tipo finito, resulta que para $r = s = 1$, $i = j = 2$, $\begin{cases} k = 2, \forall n \\ 2 < k < n \leq 5 \end{cases}$ Λ es de tipo de representación finito. Hemos completado así el caso II.1.7. \square

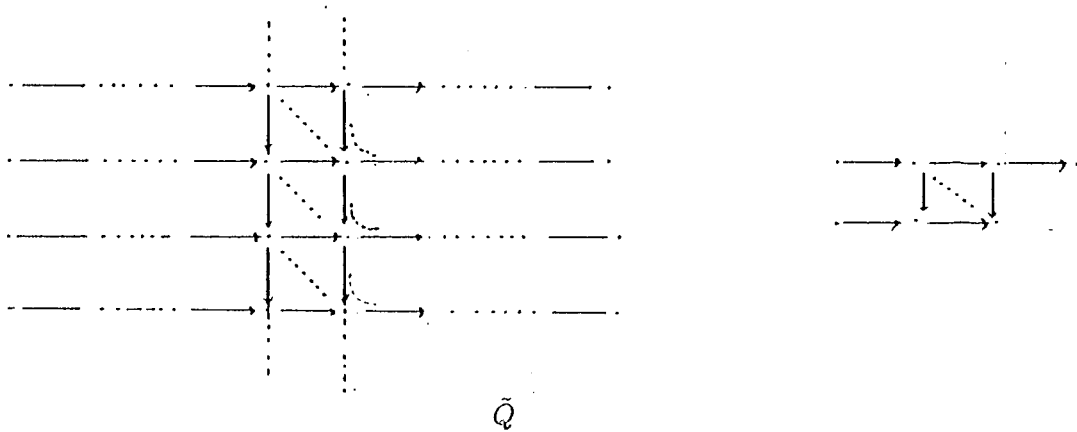
II.1.8. Sea ahora Q el diagrama $1 \cdots k-1 \xrightarrow{\beta_1} \underset{\alpha}{\circlearrowleft} k \xrightarrow{\beta_2} \underset{\gamma}{\circlearrowleft} k+1 \xrightarrow{\beta_3} \cdots \rightarrow n$, $k > 1$, $n \geq k + 2$.

Vamos a probar que si $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) entonces es de tipo de representación infinito.

Para ello basta ver que $\Lambda' = \Lambda/\Lambda(e_1 + \dots + e_{k-2} + e_{k+3} + \dots + e_n)\Lambda$, que también tiene la propiedad (IIP), es de tipo de representación infinito.

Claramente el álgebra Λ' está dada por el diagrama $k-1 \xrightarrow{\beta_1} \bigoplus_{\alpha} k \xrightarrow{\beta_2} \bigoplus_{\gamma} k+1 \xrightarrow{\beta_3} k+2$ con relaciones.

De la forma que tienen las relaciones en las álgebras con la propiedad (IIP) resulta que no existen relaciones en Λ' que involucren a la flecha β_1 . Observando cuidadosamente el estudio hecho en II.1.7, y la analogía existente entre ambos casos, se ve que Λ' sólo podría ser de tipo finito si está dada por las relaciones $\alpha^i = \gamma^2 = 0, \beta_2\alpha = \gamma\beta_2, \beta_3\gamma = 0$. Sin embargo, en este caso es fácil construir el cubrimiento Galois universal de Λ' y ver que contiene un subdiagrama convexo lleno de la lista [BHV], lo que prueba que Λ' es de tipo de representación infinito. Mostramos a continuación el cubrimiento y el subdiagrama elegido.



Esto termina el caso II.1.8. \square

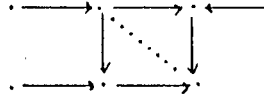
II.1.9. Consideremos ahora el diagrama $Q : 1 \xrightarrow{\dots} \frac{\beta_1}{\alpha} \bigoplus k \xrightarrow{\beta_2} \bigoplus_{\gamma} \xleftarrow{\beta_3} \dots \xrightarrow{\dots} n$, y sea $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP).

Consideramos por separado los casos en que β_1 es una flecha con origen en k y β_3 es una flecha con final en k .

Si β_1 es una flecha con final en k entonces Λ es de tipo de representación infinito.

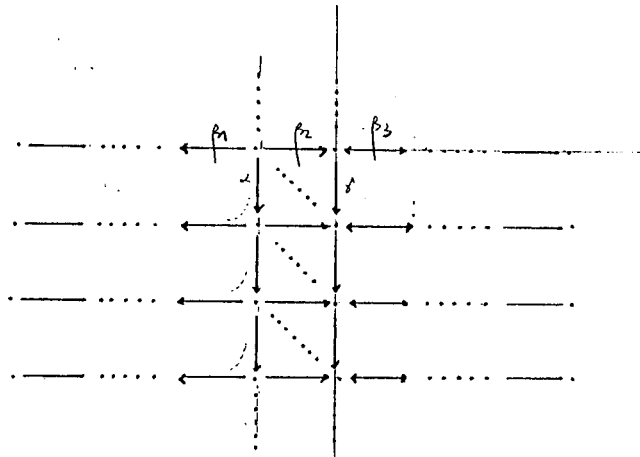
De acuerdo a la Observación.4.10. y a los resultados obtenidos en II.1.4 basta probar

que $\Lambda' = KQ / \langle \alpha^2, \gamma^2, \beta_2\alpha - \gamma\beta_2 \rangle$ es de tipo de representación infinito en este caso. Esto sigue de que el cubrimiento Galois universal de Λ' contiene al siguiente diagrama de la lista [BHV] como subdiagrama convexo lleno.



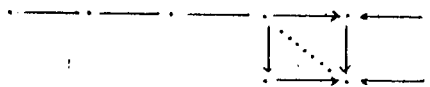
Supongamos ahora que β_1 es una flecha con origen en k . Análogamente a lo recién visto basta estudiar cuándo el álgebra $\Lambda = KQ / \langle \alpha^i, \gamma^j, \beta_2\alpha - \gamma\beta_2, \beta_1\alpha \rangle$ es de tipo de representación finito. Probaremos que Λ es de tipo de representación finito si y sólo si $n = k + 2 < 6$ ó $n = k + 4 < 6$ ó $n = k + 3 < 5$ y Λ está definida por las relaciones $\alpha^2 = \gamma^2 = 0, \beta_2\alpha = \gamma\beta_2, \beta_1\alpha = 0$.

El cubrimiento Galois universal de Λ está dado por el siguiente diagrama \tilde{Q} con relaciones:

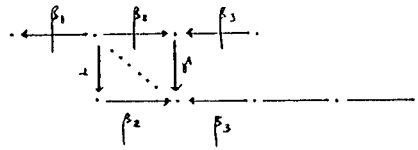


Es fácil ver usando el Criterio de Bongartz para tipo finito que en las condiciones de arriba Λ es de tipo de representación finito. Probaremos la recíproca mostrando, en cada uno de los casos restantes, un diagrama \tilde{Q}' de la lista [BHV] que puede ser elegido como subdiagrama convexo lleno de \tilde{Q} .

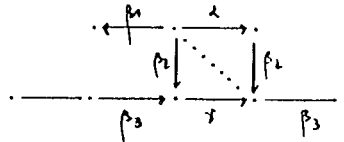
Si $n = k + 2 \geq 6$ elegimos \tilde{Q}' como sigue:



Para $n = k + 4 \geq 6$ se puede elegir \tilde{Q}' como el siguiente diagrama:



Finalmente si $n = k + 3 \geq 5$ elegimos \tilde{Q}' como sigue:

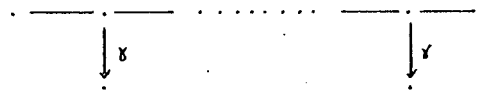


Esto concluye el caso II.1.9. \square

II.1.10. Sea ahora Q el diagrama $1 \dashrightarrow \dots \xrightarrow{\beta_1} \circlearrowleft_{\alpha} \xrightarrow{\beta_2} \dots \xrightarrow{\beta_3} \circlearrowright_{\gamma} \xrightarrow{\beta_4} \dots \dashrightarrow n$.

Veamos que toda álgebra $\Lambda = KQ/I$ que tiene la propiedad (IIP) es de tipo de representación infinito.

Para ello construimos el cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ de Λ y elegimos en él un subdiagrama convexo lleno de tipo infinito \tilde{D}_r como sigue.



Notar que el diagrama elegido es un subdiagrama lleno de \tilde{Q} pues Λ tiene la propiedad (IIP).

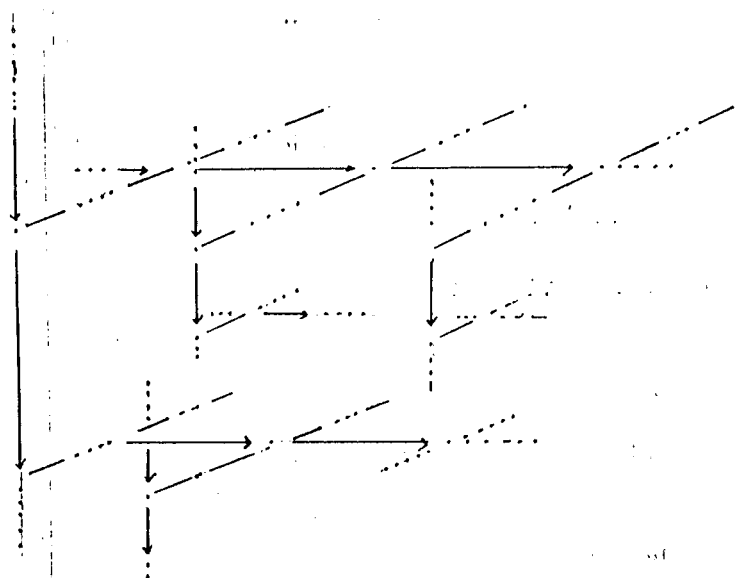
Con el caso II.1.10 hemos completado el estudio de los diagramas

$$1 \dashrightarrow \dots \xrightarrow{\beta_1} \circlearrowleft_{\alpha} \xrightarrow{\beta_2} \dots \xrightarrow{\beta_3} \circlearrowright_{\gamma} \xrightarrow{\beta_4} \dots \dashrightarrow n \quad \text{con } k > 1, j \geq 1, n \geq 4.$$

Continuaremos estudiando el caso $k = 1, j > 1$. Es decir, Q es un diagrama del tipo

$$\circlearrowleft_{\alpha} \xrightarrow{\beta} \dots \xrightarrow{\delta_1} \circlearrowright_{\gamma} \xrightarrow{\delta_2} \dots \dashrightarrow n \quad \text{con } 3 \leq k \leq n.$$

un lazo son relaciones cero. De aquí, el cubrimiento Galois universal de Λ es un álgebra $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ con \tilde{Q} un árbol infinito. Más aún, \tilde{Q} es el siguiente diagrama:



Como \tilde{Q} es un árbol, por la Observaciones 3.3.5 y 3.3.7 $\tilde{\Lambda}$ es simplemente conexa y satisface la condición 2) a) del Criterio de Bongartz para tipo finito (Teorema.3.3.9). \square

En el estudio de los diagramas de la forma $\circlearrowleft_{\alpha} 1 \xrightarrow{\beta} \dots \xrightarrow{\delta_1} \circlearrowleft_{\gamma} k \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_n} n$ con $3 \leq k \leq n$ consideraremos casos según la orientación de las flechas $\beta, \delta_1, \delta_2$ y $k < n$ ó $k = n$. En cualquiera de estos casos, nos referiremos al cubrimiento $\tilde{\Lambda}$ dado en la Observación anterior como el cubrimiento Galois de Λ entendiendo que se considera la orientación adecuada de las flechas que están en la fibra de $\beta, \delta_1, \delta_2$ y las relaciones correspondientes.

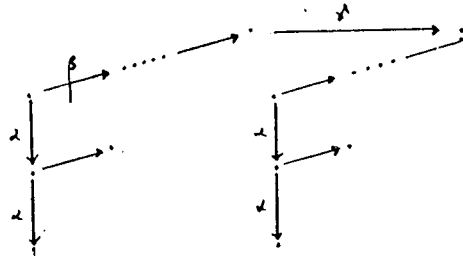
Comenzamos estudiando el caso $k = n$. Es decir, Q es un diagrama del tipo $\circlearrowleft \xrightarrow{\beta} \dots \xrightarrow{\delta} \circlearrowleft$.

II.1.11. Sea Q el diagrama $\circlearrowleft_{\alpha} 1 \xrightarrow{\beta} \dots \xrightarrow{\delta} \circlearrowleft_{\gamma} n$ y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP). Por el Teorema 1.9, Λ tiene la propiedad (IIP) si y sólo si $I = \langle \alpha^i, \gamma^j, \beta\alpha^r \rangle, 1 \leq r \leq i$. Vamos a probar que Λ es de tipo de representación finito si y sólo si $\alpha^i = \beta\alpha = \gamma^2 = 0$ cualesquiera sean i y n .

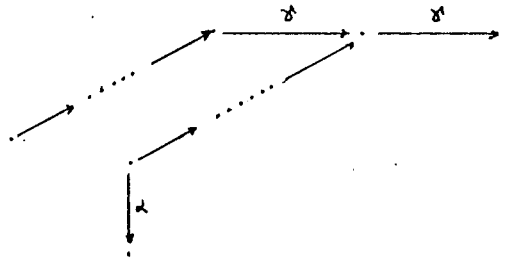
Consideramos el cubrimiento Galois universal de Λ dado en la Observación.4.11. El grupo que actúa sobre \tilde{Q} es el grupo libre con dos generadores $\pi(Q, 1) = \langle [\alpha], [\beta^{-1} \dots \delta^{-1} \gamma \delta \dots \beta] \rangle$.

Veamos primero que si no se tienen las relaciones de arriba entonces Λ es de tipo de representación infinito. Para ello mostramos que en cada caso \tilde{Q} contiene un subdiagrama convexo lleno \tilde{Q} de tipo infinito.

Si $2 \leq r \leq i$ se puede elegir \tilde{Q} como el siguiente diagrama de tipo \tilde{D}_s :



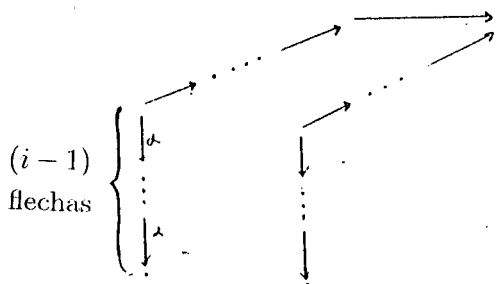
Si $r = 1$ y $j \geq 3$ entonces se puede elegir \tilde{Q} de tipo \tilde{E}_7 y subdiagrama del siguiente diagrama :



Usaremos el Teorema 3.3.9 para probar que las relaciones $\alpha^i = \beta\alpha = \gamma^2 = 0, \forall i, n$ definen un álgebra Λ de tipo de representación finito.

Sigue de la Proposición 3.3.8 que Λ es standard y por la Observación anterior 4.11, que \tilde{Q} satisface las hipótesis y la condición 2a) del Teorema 3.3.9. Veamos ahora que se satisface la condición 2 b) de dicho Teorema.

Como Q tiene n vértices, y $\alpha, \dots, \alpha^{i-1}, \gamma$ son elementos no nulos y linealmente independientes en Λ resulta que $d = \dim_K \Lambda > n + (i - 1) + 1 = n + i$. Luego, $2d + 1 > 2n + 2i + 1 > 2n + 2i - 2$ y la condición 2b) sigue entonces de que \tilde{Q} no contiene subdiagramas llenos de tipo A_r con $r > 2n + 2i - 2$. Esto sigue de la maximalidad del siguiente diagrama de tipo $A_{2n+2i-2}$.



La condición 2 c) del Teorema 3.3.9 se verifica fácilmente. Esto termina el estudio de este caso probando que Λ es de tipo de representación finito si y sólo si $\alpha^i = \beta\alpha = \gamma^2 = 0, \forall i, n$. \square

II.1.12. Con la notación de la Observación 4.5, dado Q como en II.1.11, vamos a considerar ahora el diagrama $Q_\delta : \underset{\alpha}{\circlearrowleft}_1 \xrightarrow{\beta} \dots \xleftarrow{\delta^{op}} \underset{\gamma}{\circlearrowright}_n$.

Del Teorema 1.9 sigue que $\Lambda = KQ_\delta/I$ tiene la propiedad (IIP) si y sólo si $I = \langle \alpha^i, \gamma^j, \beta\alpha^r, \delta^{op}\gamma^s \rangle$ con $i, j > 1$ y $1 \leq r \leq i, 1 \leq s \leq j$. Usaremos el Criterio de Bongartz para tipo finito (Teorema 3.3.9) para probar que Λ es de tipo de representación finito si y sólo si está definida por las relaciones i) ó ii) siguientes:

$$\text{i) } \alpha^i = \beta\alpha = \gamma^2 = 0, \forall i$$

$$\text{ii) } \alpha^i = \beta\alpha = \delta^{op}\gamma = \gamma^j = 0, \forall i, j$$

Sea $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}_\delta/\tilde{I}$ el cubrimiento Galois universal de Λ dado en Observación 4.11.

Por la Proposición 3.3.8, Λ es un álgebra distributiva y por la Observación 4.11 se satisfacen las hipótesis y la condición 2) a) del Teorema 3.3.9. Resta ver entonces que en los casos i) y ii) valen también las condiciones 2)b) y c) lo cual es inmediato.

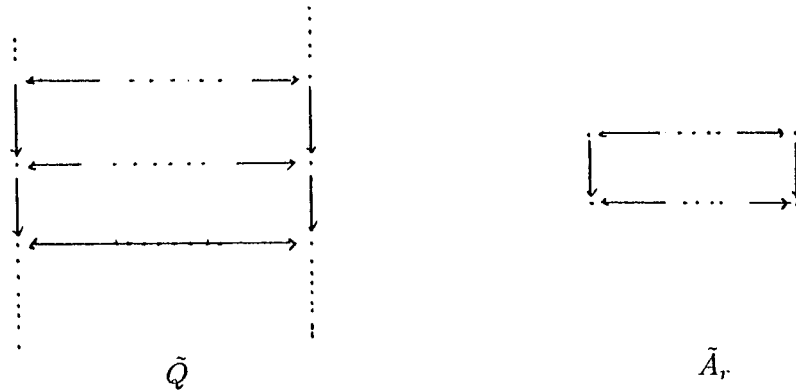
La recíproca sigue de que si no estamos en los casos i) ó ii) \tilde{Q}_δ contiene un subdiagrama convexo lleno de tipo \tilde{E}_7 .

Con esto finalizamos el caso II.1.12. \square

II.1.13. Sea Q como en II.1.11 y consideremos $Q_\beta : \underset{\alpha}{\circlearrowleft}_1 \xleftarrow{\beta^{op}} \dots \xrightarrow{\delta} \underset{\gamma}{\circlearrowright}_n$.

Ya hemos observado anteriormente (cf. Observación.1.8) que si en los vértices donde hay lazos no nace ninguna flecha, el álgebra tiene la propiedad (IIP) si y sólo si el ideal de las relaciones está generado por relaciones que sólo involucran lazos. En nuestro caso $\Lambda = KQ_\beta/I$ tiene la propiedad (IIP) si y sólo si $I = \langle \alpha^i, \gamma^j \rangle, i, j > 1$.

Es muy sencillo construir un cociente del cubrimiento Galois universal de Λ que contenga un subdiagrama lleno de tipo \tilde{A}_r , lo cual prueba que Λ es de tipo de representación infinito.



Con este último caso se completa el estudio de los diagramas de tipo

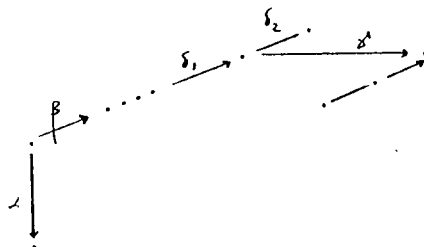
$$\begin{matrix} \circlearrowleft & \dots & \circlearrowleft & \dots & \circlearrowleft \\ \alpha & \delta_1 & \gamma & \delta_2 & n \end{matrix} \text{ con } n = k \geq 3. \text{ Consideraremos a continuación el caso } n > k.$$

Sea Q un tal diagrama y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP). Recordemos que por la Observación 4.2., el álgebra $\Lambda' = \Lambda/\Lambda.(e_{k+1} + \dots + e_n).\Lambda$ también la satisface. Más aún, Λ' está dada por un diagrama Q' de los estudiados en II.1.11, II.1.12 y II.1.13 y es de tipo finito si Λ lo es. De aquí, para hallar todas las álgebras $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP) y de tipo de representación finito basta considerar Q tal que Q' es el diagrama de II.1.11. ó II.1.12.

II.1.14. Sea Q el diagrama $\begin{matrix} \circlearrowleft & \xrightarrow{\beta} & \dots & \xrightarrow{\delta_1} & \circlearrowleft & \xrightarrow{\delta_2} & \dots & \xrightarrow{\dots} & n \end{matrix}, n > 3.$

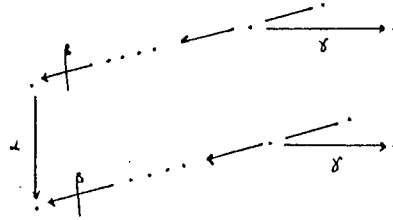
Vamos a probar que si $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) entonces es de tipo de representación infinito. Por el Teorema 1.9 Λ tiene la propiedad (IIP) si y sólo si $I = \langle \alpha^i, \gamma^j, \beta\alpha^r, \delta_2\gamma^s \rangle$ con $1 \leq r \leq i, 1 \leq s \leq j$ si δ_2 es una flecha con origen en $n = 1$ ó $I = \langle \alpha^i, \gamma^j, \beta\alpha^r \rangle, 1 \leq r < i$ si δ_2 es una flecha con final en $n - 1$.

Consideremos el cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ de Λ dado en la Observación 4.11. y veamos que se puede elegir en \tilde{Q} un subdiagrama convexo lleno de tipo \tilde{E}_7 y subdiagrama del siguiente diagrama:



Esto prueba que Λ es de tipo de representación infinito. \square

II.1.15. Sea Q el diagrama $\circlearrowleft_{\alpha} 1 \xleftarrow{\beta} \dots \xleftarrow{\delta_1} \circlearrowleft_{\gamma} k \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_n} n$ y $\Lambda = KQ/I$. Probemos que si Λ tiene la propiedad (IIP) entonces es de tipo de representación infinito. Esto sigue de que el cubrimiento Galois universal \tilde{Q} de Λ dado en la Observación 4.11 contiene al siguiente diagrama de tipo \tilde{D}_{2k+3} como subdiagrama convexo lleno.



II.1.16. Sea Q el diagrama de II.1.14 y sea $Q_{\delta_1} : \circlearrowleft_{\alpha} 1 \xrightarrow{\beta} 2 \dots \xleftarrow{\delta_1^{op}} k \circlearrowleft_{\gamma} \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_n} n$, $3 \leq k < n$.

Sigue del Teorema 1.9 que $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) si y sólo si $I = \langle \alpha^i, \gamma^j, \beta\alpha^r, \delta_1^{op}\gamma^s, \delta_2\gamma^t \rangle$, $1 \leq r \leq i$, $1 \leq s \leq j$, $1 \leq t \leq j$. Veamos cuándo las relaciones definidas por un tal ideal I determinan un álgebra de tipo de representación finito.

Supongamos primero que $n = k + 1$ y $k \geq 3$. De manera análoga a los casos anteriores tenemos que si $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) y es de tipo finito entonces las álgebras cocientes $\Lambda_1 = \Lambda / \langle \alpha \rangle$ y $\Lambda_2 = \Lambda / \Lambda.e_{k+1}.\Lambda$ también. De aquí por los resultados obtenidos en I.1.4 y II.1.12 se tiene que para determinar todas las álgebras $\Lambda = KQ/I$ con (IIP) y de tipo finito basta estudiar los siguientes casos:

- a) $\alpha^i = \beta\alpha = \delta_2\gamma = \gamma^2 = 0, \forall i$
- b) $\alpha^2 = \delta_1^{op}\gamma = \gamma^2 = 0$
- c) $\alpha^2 = \delta_1^{op}\gamma = \delta_2\gamma = \gamma^2 = 0$
- d) $\alpha^i = \beta\alpha = \delta_1^{op}\gamma = \gamma^2 = 0, \forall i$
- e) $\alpha^i = \beta\alpha = \delta_1^{op}\gamma = \delta_2\gamma = \gamma^j = 0, \forall i, j$

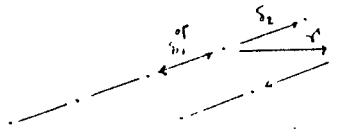
Probaremos que Λ es de tipo de representación finito exactamente en los siguientes casos:

$$i) \alpha^i = \beta\alpha = \delta_1^{op}\gamma = \gamma^2 = 0, \begin{cases} n = 4, i = 2, 3 \\ n = 5, i = 2 \end{cases}$$

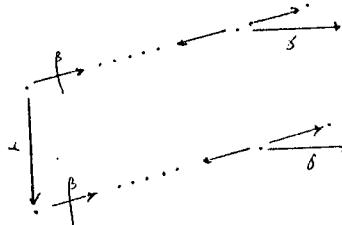
$$ii) \alpha^i = \beta\alpha = \delta_1^{op}\gamma = \delta_2\gamma = \gamma^j = 0, \begin{cases} n = 4, \begin{cases} \forall i, j = 2 \\ i = 2, 3, j = 3 \end{cases} \\ n = 5, i = 2, j = 3 \\ n > 5, j = 2, \forall i \end{cases}$$

Sea \tilde{Q} el cubrimiento Galois universal de Λ dado en la Observación 4.11. Veamos primero que si no estamos en las condiciones i) ó ii) entonces Λ es de tipo de representación infinito. Para ello mostraremos en cada uno de los casos restantes, un subdiagrama lleno \tilde{Q}' de \tilde{Q} de tipo infinito.

Para las relaciones dadas en a), \tilde{Q}' es el siguiente diagrama de tipo \tilde{E}_7 :



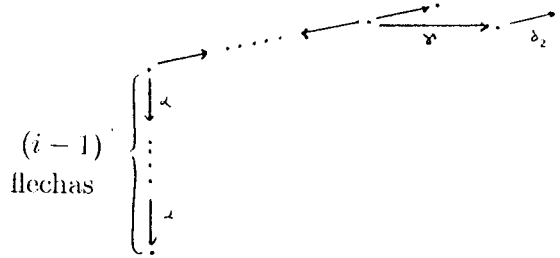
Tanto en el caso c) como en el b) se puede elegir \tilde{Q}' de tipo \tilde{D}_n como mostramos a continuación.



Notemos que las relaciones dadas en i) y ii) corresponden a los casos d) y e) respectivamente, con ciertas condiciones sobre i y j . Análogamente, las dadas en ii) corresponden al caso e).

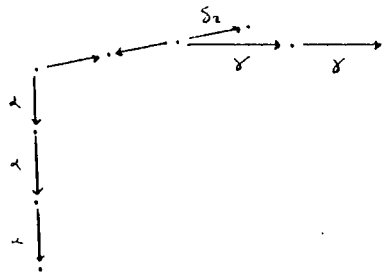
Supongamos que Λ está definida por las relaciones de d) y que no satisface las condiciones de i), es decir, $\begin{cases} n = 4, i \geq 4 \\ n = 5, i \geq 3 \\ n \geq 6 \end{cases}$

Cada una de estas condiciones definen álgebras de tipo infinito pues en cualquiera de estos casos se puede elegir un subdiagrama lleno \tilde{Q}' en \tilde{Q} , de tipo \tilde{E}_8 y que es subdiagrama de:

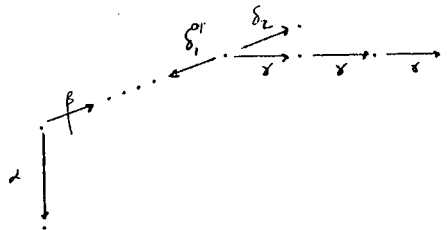


Supongamos ahora que Λ está definida por las relaciones de e) y que no satisface las condiciones de ii). Veamos que Λ es de tipo infinito.

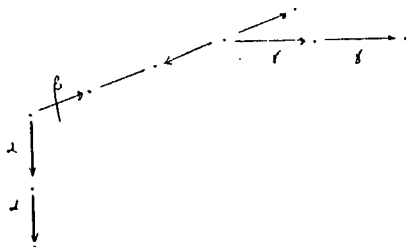
Si $n = 4$, $i \geq 4$, $j \geq 3$ se puede elegir \tilde{Q}' de tipo \tilde{E}_8 , en \tilde{Q} . Tal diagrama \tilde{Q}' es el siguiente:



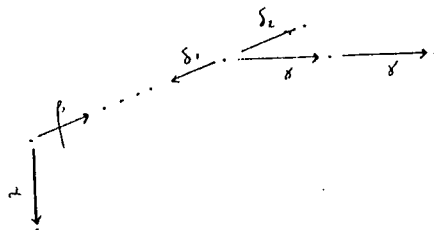
Para $i = 2$, $j \geq 4$, $(\forall n)$, \tilde{Q} contiene un subdiagrama lleno de tipo \tilde{E}_7 que es subdiagrama de:



Cuando $n = 5$, $j = 3$, $i \geq 3$ se puede elegir \tilde{Q}' de tipo \tilde{E}_8 como sigue.



Por último si $n > 5$, $i = 2$, $j > 2$ el diagrama \tilde{Q}' es de tipo \tilde{E}_8 y es subdiagrama del siguiente diagrama:



Análogamente a los casos anteriores se ve fácilmente, usando el Teorema 3.3.9, que en los casos i) y ii) Λ es de tipo de representación finito.

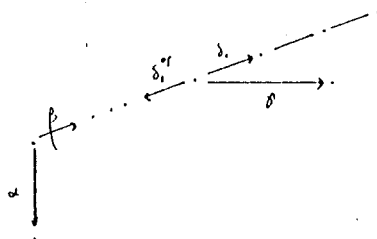
Supongamos ahora $n \geq k + 2$ y $k \geq 3$ y veamos que Λ es de tipo de representación finito si y sólo si $\alpha^i = \gamma^2 = \beta\alpha = \delta_1\gamma = \delta_2\gamma = 0$, $n = k + 2$, $\begin{cases} k = 3, 4, i = 2 \\ i = k = 3 \end{cases}$.

Al igual que en los casos anteriores estamos en las condiciones del Criterio de Bongartz para tipo finito y usando este criterio se prueba fácilmente que si Λ está definida por dichas relaciones entonces es de tipo de representación finito.

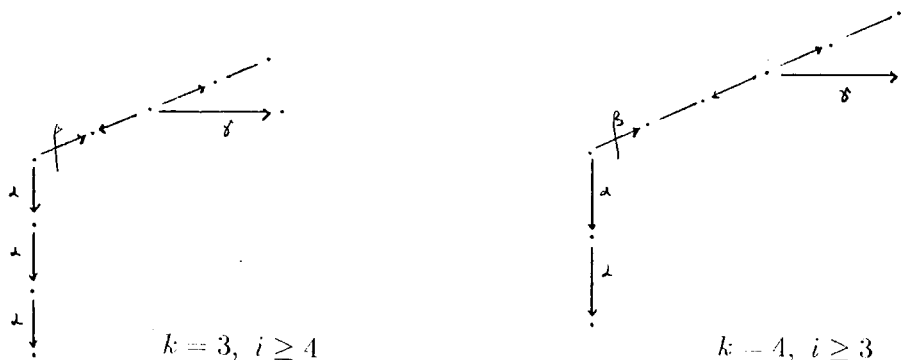
Para probar la recíproca mostraremos a continuación, un subdiagrama lleno \tilde{Q}' de \tilde{Q} de tipo infinito en los casos:

$$\begin{cases} n > k + 2, (k \geq 3) \\ n = k + 2, \begin{cases} k = 3, i \geq 4 \\ k = 4, i \geq 3 \end{cases} \end{cases}$$

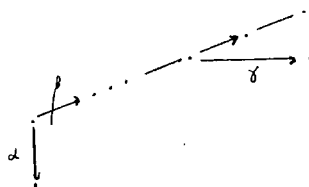
Si $n > k + 2$ se puede elegir \tilde{Q}' de tipo \tilde{E}_7 , subdiagrama del siguiente diagrama:



Sea $n = k + 2$. Si $k = 3, i \geq 4$ ó $k = 4, i \geq 3$ se puede elegir \tilde{Q}' de tipo \tilde{E}_3 como mostramos a continuación:



Por último si $k \geq 5$ \tilde{Q}' es subdiagrama del siguiente diagrama.



Esto completa el caso II.1.16. \square

II.1.17. Sea Q el diagrama $\circlearrowleft_1 \xrightarrow{\beta} \dots \xleftarrow{\delta_1} \circlearrowleft_k \xleftarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\gamma} \dots \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\beta} \dots$, $n > k$ y sea $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP). Como ya hemos observado, es condición necesaria para que Λ sea de tipo finito que el álgebra cociente $\Lambda_1 = \Lambda / \Lambda(e_{k+1} + \dots + e_n)\Lambda$, que también tiene la propiedad (IIP), satisfaga la misma condición.

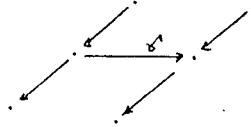
De los resultados obtenidos en II.1.12 sigue que Λ_1 satisface la propiedad (IIP) y es de tipo finito en los siguientes casos:

- a) $\alpha^i = \beta\alpha = \gamma^2 = 0, \forall i$
- b) $\alpha^i = \beta\alpha = \delta_1\gamma = \gamma^j = 0, \forall i, j$

Consideremos por separado las relaciones de a) y b) sobre Λ y veamos cuándo Λ es de tipo de representación finito.

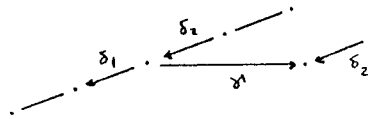
Sea \tilde{Q} el cubrimiento Galois universal de Λ que dimos en la Observación 4.11.

Las relaciones de a), cualquiera sea i , determinan álgebras de tipo infinito pues \tilde{Q} contiene al siguiente diagrama de tipo \tilde{D}_5 como subdiagrama lleno.

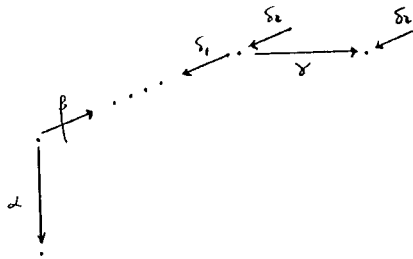


Basta estudiar entonces bajo cuáles condiciones sobre i, j, k y n las relaciones dadas en b) determinan álgebras de tipo finito.

Si $n \geq k + 2$ se puede elegir en \tilde{Q} un subdiagrama lleno de tipo \tilde{E}_6 y por lo tanto Λ es de tipo infinito. Tal subdiagrama es el siguiente.

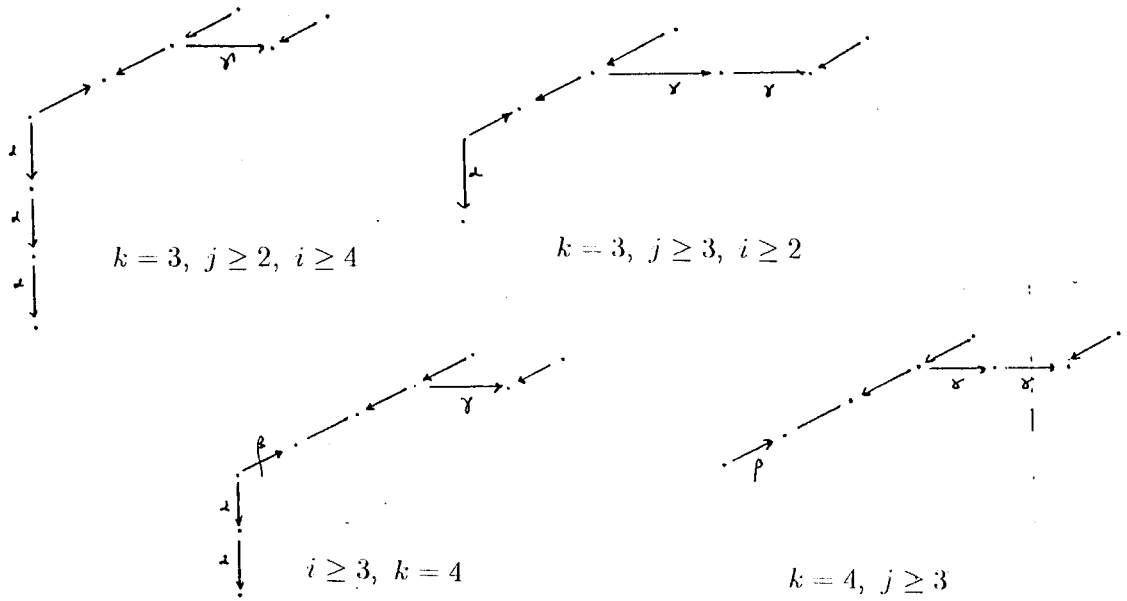


Supongamos $n = k + 1$. Para $n \geq 6$, Λ es de tipo infinito pues \tilde{Q} contiene un subdiagrama lleno de tipo \tilde{E}_3 y subdiagrama del siguiente diagrama.



Podemos suponer entonces $n \leq 5$. Usando el Criterio de Bongartz para tipo finito (Teorema 3.3.9) se prueba fácilmente que si $j = 2$ y $k = 3, i = 2, 3$ ó $k = 4, e i = 2$ entonces Λ es de tipo de representación finito.

Veamos que éstas son las únicas condiciones sobre i, j, k, n tales que las relaciones de b) determinan álgebras de tipo finito. Para ello mostramos a continuación, en cada uno de los casos restantes, un subdiagrama lleno de \tilde{Q} de tipo infinito.



Con esto finalizamos la sección II.1. en la que estudiamos diagramas de tipo A_n con dos lazos. En la sección II.2 estudiaremos diagramas de Dynkin de tipo D_n con dos lazos en cualesquiera de sus vértices.

II.2. Q es un diagrama de tipo D_n con dos lazos.

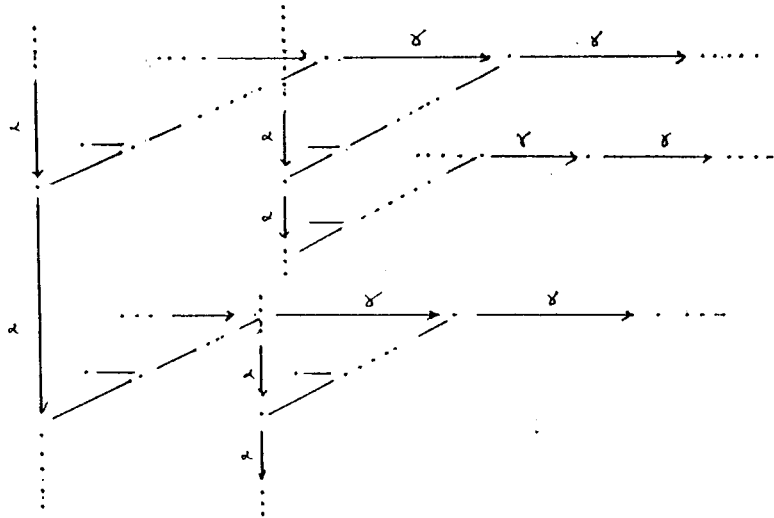
Si Q es un diagrama de tipo D_n con dos lazos entonces es uno de los siguientes:

- a) $\circ_1 - | - \dots - \circ_k - \dots - n$
- b) $\circ_1 - | - \dots - n$
- c) $1 - | - \dots - \circ_i - \dots - \circ_j - \dots - n, \quad 3 \leq i < j \leq n$

Estudiaremos primero los diagramas de a) con $k = n$. Comenzamos con una Observación que será de utilidad en el estudio de dichos diagramas.

Observación.4.12. Sea $Q : \circ_{\alpha} 1 \xrightarrow{\beta} | - \dots - \xrightarrow{\delta} \circ_{\gamma} n$. Sigue del Teorema 1.9 que si $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP), y existen relaciones en Λ que involucran alguna flecha que no es un lazo entonces tales relaciones son relaciones cero de la forma $\beta\alpha^i = 0$ ó $\delta\gamma^j = 0$. De aquí, el cubrimiento Galois universal de Λ está dado por un árbol infinito \tilde{Q} con relaciones. Tal diagrama

\tilde{Q} es el siguiente.



Para diferentes orientaciones en las flechas β y δ de Q nos referiremos a este cubrimiento entendiéndolo que se consideran, en cada caso, las orientaciones adecuadas para las flechas de \tilde{Q} que están en la fibra de β y δ y también las relaciones correspondientes. \square

II.2.1. Sea Q el diagrama $\bigcirc_{\alpha} 1 \xrightarrow{\beta} \dots \xleftarrow{\delta} n \bigcirc_{\gamma}$. Sabemos que si $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) y es de tipo finito entonces el álgebra cociente $\Lambda/\Lambda.e_{n+1}.\Lambda$ también. Luego, por los resultados obtenidos en II.1.12 podemos suponer que $n \leq 5$.

Al mismo tiempo, las álgebras $\Lambda/\Lambda.e_1.\Lambda$ y $\Lambda/\Lambda.e_n.\Lambda$, que también satisfacen la propiedad (IIP), son de tipo finito si Λ lo es. Luego, por los resultados de I.2.2 y I.2.3 para determinar cuáles son todas las álgebras Λ con la propiedad (IIP) y de tipo finito basta estudiar el caso en que Λ está definida por las relaciones $\alpha^i = \beta\alpha = \delta\gamma = \gamma^j = 0$ con $i, j > 1$.

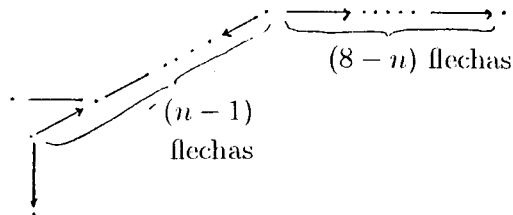
Veamos que

$$\Lambda \text{ es de tipo finito} \iff \begin{cases} n = 3, & \begin{cases} i = 2, j \leq 4 \\ i = 3, 4, j = 2 \end{cases} \\ n = 4, i = 2, j \leq 3 \\ n = 5, i = j = 2 \end{cases}$$

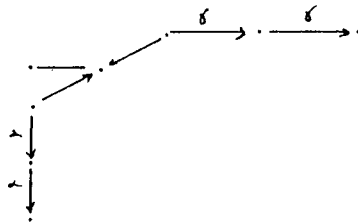
Notar que en las condiciones anteriores, $n + j \leq 7$.

Usando el Teorema 3.3.9 se ve fácilmente que si $i = 2$ y n y j satisfacen algunas de las condiciones anteriores entonces Λ es de tipo de representación finito. Para probar la recíproca consideremos el cubrimiento Galois universal \tilde{Q} de Λ dado en la Observación.4.12. y veamos que en los casos restantes se puede elegir en \tilde{Q} un subdiagrama convexo lleno \tilde{Q}' de tipo infinito.

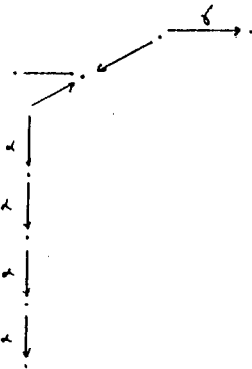
Si $n + j > 7$ siempre se puede elegir \tilde{Q}' de tipo \tilde{E}_8 como mostramos a continuación.



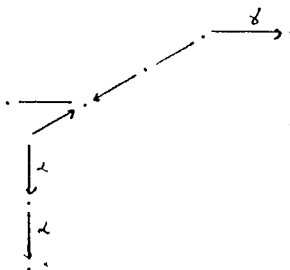
Supongamos $n + j \leq 7$. Si $n = 3$, $i \geq 3$, $j > 2$, \tilde{Q}' es de tipo \tilde{E}_7 .



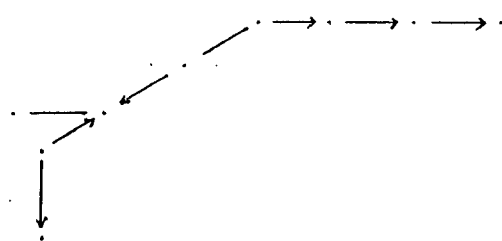
Para $n = 3$, $i > 4$, $j = 2$, \tilde{Q}' es de tipo \tilde{E}_8 .



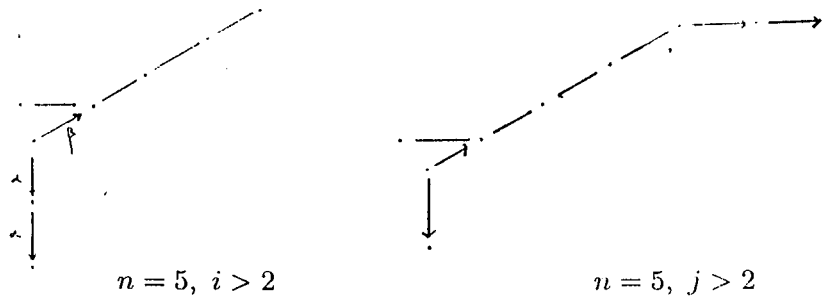
Si $n = 4$ e $i > 2$ ó $n = 4$, $i = 2$, $j > 3$ se puede elegir \tilde{Q}' de tipo \tilde{E}_7 ó \tilde{E}_8 respectivamente, como sigue.



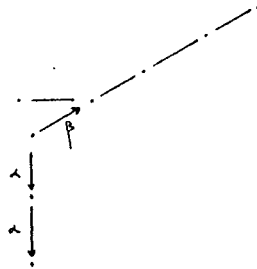
$n = 4, i > 2$



$n = 4, i = 2, j > 3$

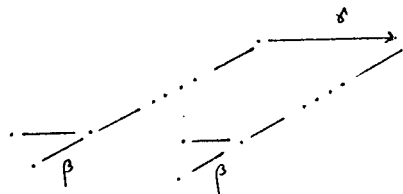


Por último si $n = 5$ e $i > 2$ ó $n = 5$ y $j > 2$ elegimos \tilde{Q}' de tipo \tilde{E}_7 ó \tilde{E}_8 respectivamente, como mostramos a continuación.



II.2.2. Si Q' es un diagrama obtenido a partir del diagrama anterior Q cambiando la orientación de alguna (ó ambas) de las flechas β y δ y $\Lambda' = KQ'/I$ tiene la propiedad (IIP) entonces Λ' es de tipo de representación infinito.

Esto resulta inmediatamente de que el diagrama \tilde{Q} dado en la Observación 4.12 contiene un subdiagrama lleno de tipo \tilde{D}_r que es el siguiente:



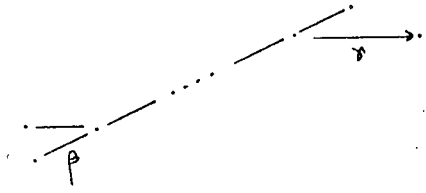
De aquí, si Λ' tiene la propiedad (IIP) es de tipo de representación infinito. \square

Con el caso II.2.2 completamos el estudio de los diagramas dados al comienzo de la sección II.2 en a) con $k = n$. Consideraremos a continuación los diagramas de a) con $n > k$.

II.2.3. Sea $Q : \underset{\alpha}{\circlearrowleft} 1 \xrightarrow{\beta} 2 \xrightarrow{\dots} \xrightarrow{\delta} k \underset{\gamma}{\circlearrowright} \dots \xrightarrow{\dots} n$, con $n > k$, $k \geq 3$. Veremos que si $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) entonces es de tipo de representación infinito.

El cubrimiento Galois universal de Λ está dado por un diagrama \tilde{Q} que se construye de manera análoga al de la Observación.4.12 y es fácil ver que \tilde{Q} contiene un subdiagrama

convexo lleno de tipo \tilde{D}_7 , como mostramos a continuación.



El siguiente caso completa el estudio de los diagramas dados en a) al comienzo de la sección II.

II.2.4 Sea Q el diagrama $\circlearrowleft \xrightarrow[\gamma]{\beta} \circlearrowleft \dots \xrightarrow{\alpha} \circlearrowleft$ y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP).

Probaremos que Λ es de tipo de representación infinito.

Si todas las relaciones de Λ son relaciones cero, entonces

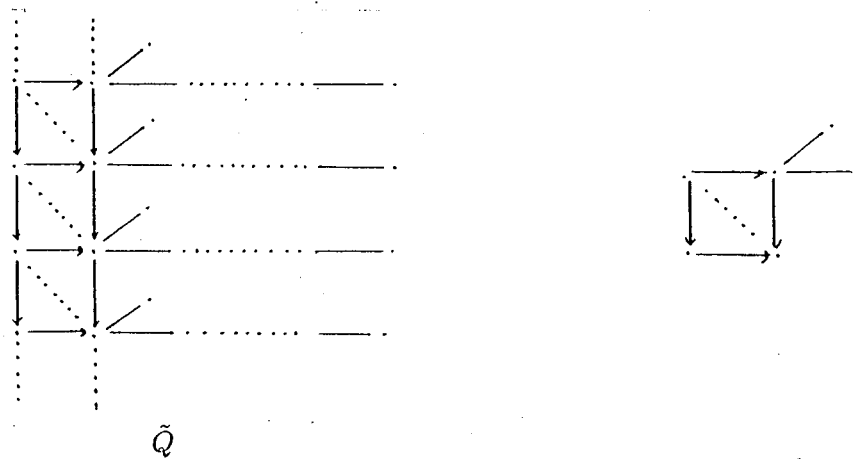
$\Lambda' = \Lambda / \langle \alpha, e_4, \dots, e_n \rangle$ tiene también la propiedad (IIP) y por la Observación 4.3 es de tipo de representación infinito. Luego Λ lo es.

Supongamos entonces que esto no ocurre. De la Observación 4.10 resulta entonces que la relación $\beta\alpha = \gamma\beta$ aparece entre las relaciones de Λ . Probemos que Λ es también de tipo infinito en este caso.

Notemos que en estas condiciones no es posible usar la Observación 4.3 para concluir que Λ es de tipo infinito porque Λ' lo es, ya que si bien

$\Lambda' = \Lambda / \langle \alpha, e_4, \dots, e_n \rangle$ está dada por el diagrama $\circlearrowleft \xrightarrow{\beta} \circlearrowleft$, no tiene la propiedad (IIP) pues entre las relaciones de Λ' aparece la relación $\gamma\beta = 0$.

Construyamos entonces el cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$, de Λ , y veamos que existe un diagrama de la lista [BHV] que es subdiagrama convexo lleno de \tilde{Q} .



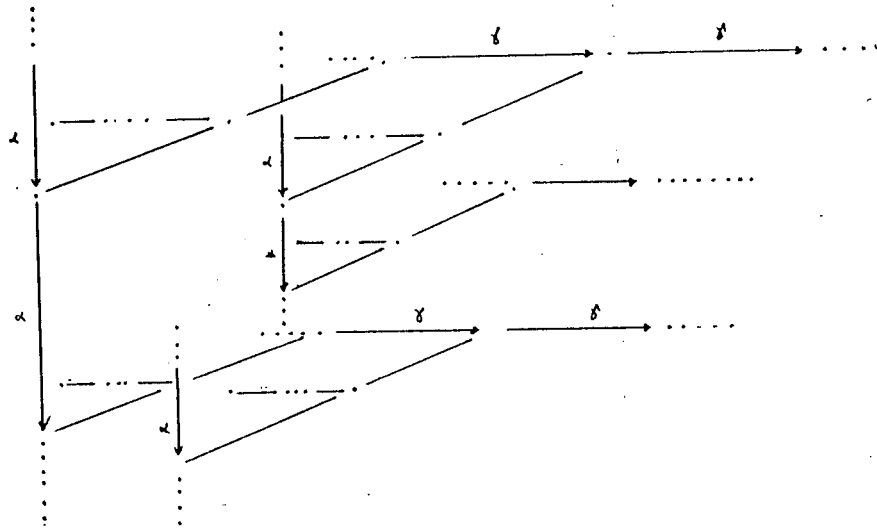
Observemos que si se considera el diagrama Q_β , que se obtiene a partir de Q cambiando la orientación de la flecha β , y $\Lambda_\beta = KQ_\beta/I$ satisface la propiedad (IIP) entonces el álgebra cociente $\Lambda'_\beta = \Lambda_\beta / \langle \alpha, e_4, \dots, e_n \rangle$ también la satisface y está dada por el diagrama $\leftarrow \overset{\circ}{1} \rightarrow$. Luego, sigue de la Observación 4.3 que Λ'_β es de tipo infinito y de aquí Λ es de tipo de representación infinito. \square

Estudiamos a continuación álgebras $\Lambda = KQ/I$ con Q como en b) del comienzo de la sección II.2.

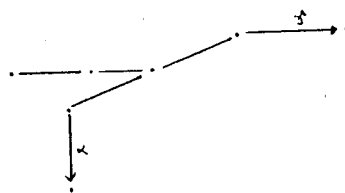
II.2.5. Sea Q como en b): $\overset{\circ}{1} \rightarrow \dots \rightarrow n$ y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP).

El caso $n = 3$ fue estudiado en II.2.1 y II.2.2. Supongamos entonces $n \geq 4$ y veamos Λ es de tipo de representación infinito.

Por la forma que tienen las relaciones sobre las álgebras con la propiedad (IIP) tenemos que el cubrimiento Galois universal de Λ está dado por un árbol infinito \tilde{Q} con relaciones. El diagrama \tilde{Q} es el siguiente.



Es fácil ver que independientemente de cuáles sean las relaciones de Λ , \tilde{Q} siempre contiene un subdiagrama convexo lleno de tipo \tilde{E}_6 como mostramos a continuación. De aquí Λ es de tipo de representación infinito.



Por último consideraremos a continuación los diagramas dados en c) al comienzo de la sección II.2.

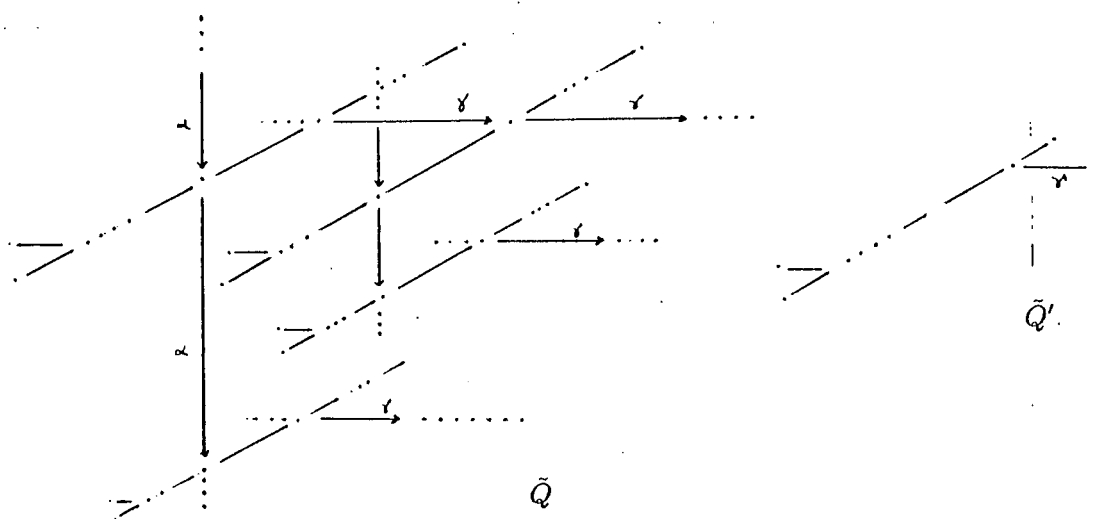
II.2.6 Sea Q el diagrama $1 \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\beta} \dots \xrightarrow{\gamma} j \xrightarrow{\dots} n$ con $i \geq 3, j \leq n$ y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP).

Veremos que Λ es de tipo de representación infinito.

Si $j > i + 1$ entonces $\Lambda' = \Lambda / \Lambda \cdot (e_j + \dots + e_n)$. Λ' tiene la propiedad (IIP) y está dada por un diagrama de tipo \tilde{D}_r con un lazo. Estas álgebras fueron estudiadas en la sección I.2 y allí se probó que son de tipo de representación infinito.

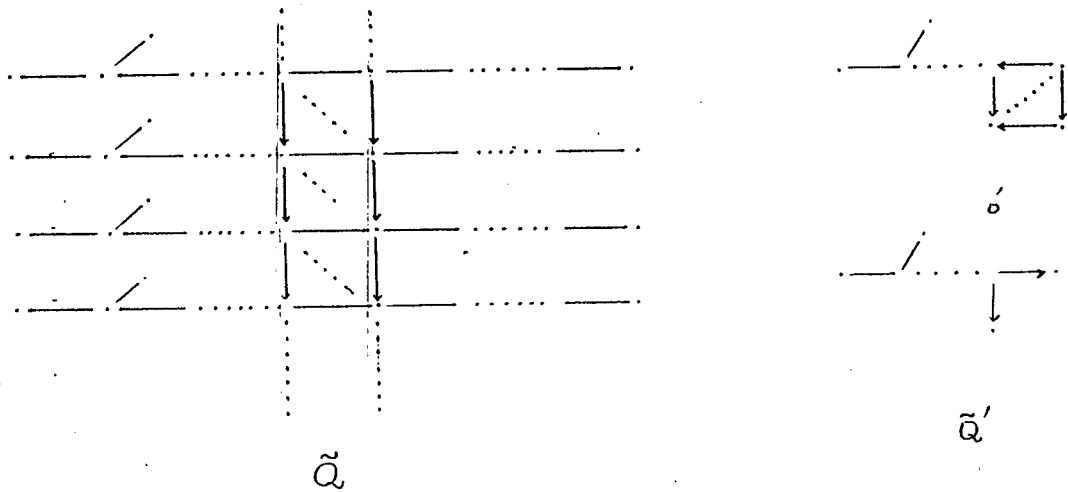
Supongamos entonces $j = i + 1$ y sea S_Λ el conjunto de relaciones minimales de Λ que no sólo involucran lazos.

Si todas las relaciones de S_Λ son relaciones cero, entonces el cubrimiento Galois universal \tilde{Q} de Λ contiene un subdiagrama convexo lleno \tilde{Q}' de tipo \tilde{D}_r y por lo tanto Λ es de tipo infinito. Mostramos a continuación los diagramas \tilde{Q} y \tilde{Q}' .



Supongamos ahora que S_Λ contiene una relación de conmutatividad de la forma $\beta\alpha^r = \gamma^s\beta$ (ó $\gamma^s\beta = \alpha^r\beta$) con $\alpha^r, \gamma^s \neq 0$. Por la Observación 4.10 podemos suponer $r = s = 1$.

En este caso el cubrimiento Galois universal de Λ está dado por el siguiente diagrama \tilde{Q} que contiene un subdiagrama convexo lleno \tilde{Q}' de la lista [BHV].



Finalizamos así el análisis de las álgebras con la propiedad (IIP) dadas por diagramas de tipo D_n con dos lazos. Los resultados aquí obtenidos serán de utilidad en la sección II.3 siguiente dedicada al estudio de los diagramas de tipo E_p con dos lazos, $p = 6, 7, 8$.

II.3. Q es un diagrama de tipo E_p con dos lazos.

Vamos a probar que toda álgebra Λ dada por un diagrama de tipo E_p con dos lazos y con la propiedad (IIP) es de tipo de representación infinito.

Si Q es un diagrama de tipo E_p , $p = 6, 7$ ó 8 con 2 lazos entonces Q es uno de los siguientes diagramas:

- a) $\circ_1 - 2 - \uparrow_3 - \dots - \circ_k - \dots -_{p-1}$; $2 \leq k \leq p$
- b) $1 - 2 \circ - \uparrow - \dots - \circ_k - \dots -_{p-1}$; $3 \leq k \leq p$
- c) $1 - 2 - \uparrow - \dots - \circ_i - \dots - \circ_j - \dots -_{p-1}$; $3 \leq i < j \leq p$

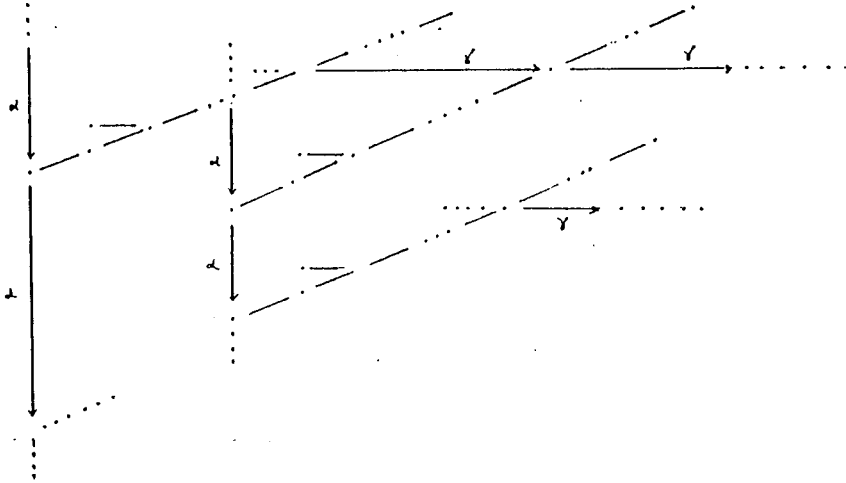
Comenzamos estudiando los diagramas de a).

Supongamos primero que $k = 2$, es decir, Q es de la forma $\circ_1 - \circ_2 - \uparrow_3 - \dots -_{p-1}$. De acuerdo a la Observación 4.2, el álgebra $\Lambda' = \Lambda / \Lambda.(e_5 + \dots + e_{p-1}).\Lambda$ satisface la propiedad (IIP) y está dada por el diagrama $\circ_1 \xrightarrow{\beta} \circ_2 - \uparrow_3 -$ y relaciones. Tales álgebras Λ' fueron estudiadas en la sección II.2.6 y allí se probó que son de tipo de representación infinito. Luego Λ

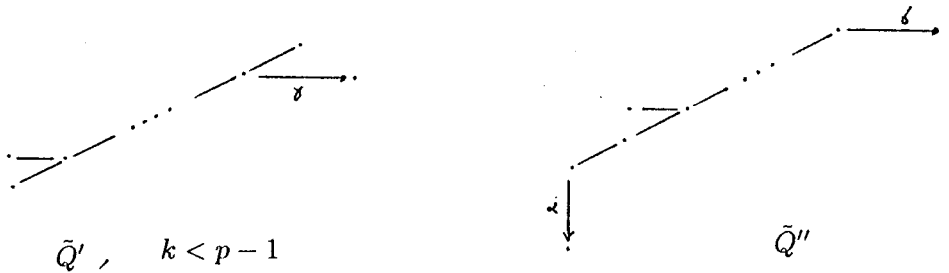
es de tipo de representación infinito.

Si $k = 3$ sigue de la Observación.4.4 que $\Lambda' = \Lambda/\Lambda.(e_1 + e_5 + \dots + e_{p-1}).\Lambda$ es de tipo de representación infinito y de aquí, también lo es Λ .

Supongamos por último $3 < k \leq p - 1$ en Q . Claramente si $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) las relaciones de Λ son todas relaciones cerc y de aquí, su cubrimiento Galois universal está dado por un diagrama de árbol \tilde{Q} que es el siguiente.



Mostraremos a continuación que cualesquiera sean las relaciones tal que Λ tiene la propiedad (IIP), se puede elegir en \tilde{Q} un subdiagrama lleno \tilde{Q}' de tipo infinito. Distinguiamos los casos $k < p - 1$ y $k = p - 1$. En el primer caso \tilde{Q}' es de tipo \tilde{D}_r . En el segundo \tilde{Q}' es de tipo \tilde{E}_7 y es subdiagrama del siguiente diagrama \tilde{Q}'' .



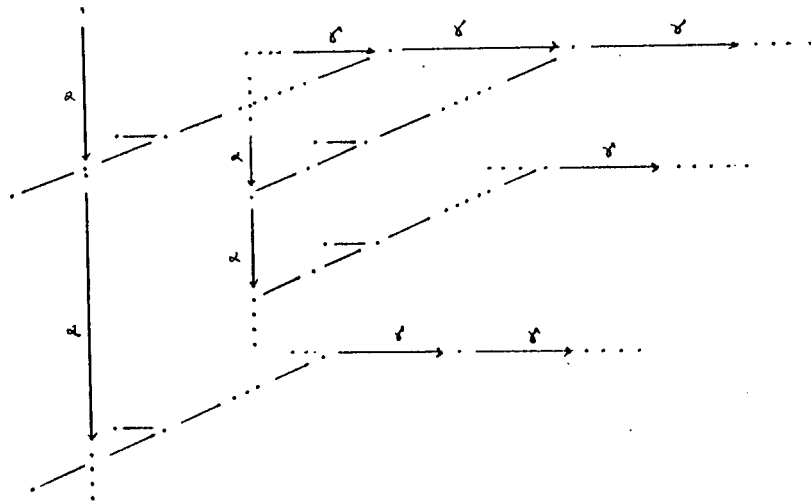
Finalmente, si Q es un diagrama como en a) con $k = p$ y $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) entonces $\Lambda' = \Lambda/\Lambda.(e_5 + \dots + e_{p-1}).\Lambda$ también tiene la propiedad (IIP) y está dada por el diagrama $\circlearrowleft_\alpha \text{ --- } \overset{\circ}{\mid} \text{ ---}$ que fue estudiado en II.2.5. Allí se probó que Λ' es de tipo de representación infinito y por lo tanto Λ también lo es.

Consideremos ahora los diagramas dados en b) al comienzo de la sección II.3. Sea Q un tal diagrama y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP). Si $k < p - 1$ ó $k = p$ entonces el álgebra $\Lambda' =$

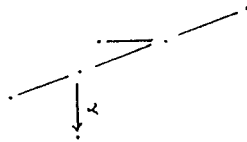
$\Lambda/\Lambda.e_1.\Lambda$ satisface también la propiedad (IIP) y está dada por un diagrama del tipo $\circ \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \circ_k \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \circ_{p-1}$, $k < p-1$ ó $\circ_1 \dashrightarrow \dots \dashrightarrow \circ_n$.

Estas álgebras fueron consideradas en II.2.4 y II.2.5 donde se probó que son todas de tipo de representación infinito. Luego Λ es de tipo de representación infinito.

Supongamos ahora que $k = p-1$ en Q (como en b)). Entonces el cubrimiento Galois universal de Λ está dado por el siguiente árbol infinito \tilde{Q} .



Es fácil ver que si Λ tiene la propiedad (IIP) entonces \tilde{Q} contiene un subdiagrama lleno de tipo \tilde{D}_5 que es el siguiente.



De aquí resulta que Λ es de tipo de representación infinito lo que completa el estudio de los diagramas de b).

Por último, sea Q un diagrama como en c) y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP). Entonces $\Lambda' = \Lambda/\Lambda.e_1.\Lambda$ es un álgebra que también satisface la propiedad (IIP) y está dada por un diagrama de tipo D_n con dos lazos de los estudiados en la sección II.2. De los resultados allí obtenidos sigue que Λ es de tipo de representación infinito.

Con esto completamos el estudio de los diagramas dados en c) y la sección II.3.

III. Q ES UN DIAGRAMA DE DYNKIN CON 3 LAZOS

Sea Q un diagrama de Dynkin con tres lazos, $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP) y \mathcal{L}_Λ el conjunto de relaciones de Λ que sólo involucran lazos. Es fácil ver que si \mathcal{L}_Λ genera I entonces Λ es de tipo de representación infinito. Podemos suponer entonces que existe una relación r que no está en \mathcal{L}_Λ .

Recordemos que una relación $r = \sum_{i \in J} \delta_i$ de I , con δ_i caminos de x a y , se dice minimal si $\sum_{i \in J_0} \delta_i \notin I$ para todo subconjunto no vacío $J_0 \subsetneq J$. Sea \mathcal{S}_Λ el conjunto de relaciones minimales $r = \sum \delta_i$ de Λ con δ_i un camino de x en y , $x \neq y$. Por lo supuesto arriba $\mathcal{S}_\Lambda \neq \emptyset$.

Análogamente a las secciones anteriores comenzamos estudiando los diagramas de Dynkin de tipo A_n con 3 lazos.

Lema.4.13. *Sea Q un diagrama de tipo A_3 con un lazo en cada vértice y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP). Si Λ es de tipo de representación finito entonces I está generado por relaciones que sólo involucran lazos y relaciones de la forma $\beta\alpha = c\gamma\beta$ con $c \in K$, $c \neq 0$, β una flecha y α y γ lazos.*

Demostración. Q es uno de los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{l} 1) \quad \circ \xrightarrow{\beta_1} \circ \xrightarrow{\beta_2} \circ \\ \alpha_1 \qquad \alpha_2 \qquad \alpha_3 \\ 2) \quad \circ \xrightarrow{\beta_1} \circ \xleftarrow{\beta_2} \circ \\ \alpha_1 \qquad \alpha_2 \qquad \alpha_3 \\ 3) \quad \circ \xleftarrow{\beta_1} \circ \xrightarrow{\beta_2} \circ \\ \alpha_1 \qquad \alpha_2 \qquad \alpha_3 \end{array}$$

Vamos a considerar los siguientes casos para el conjunto \mathcal{S}_Λ :

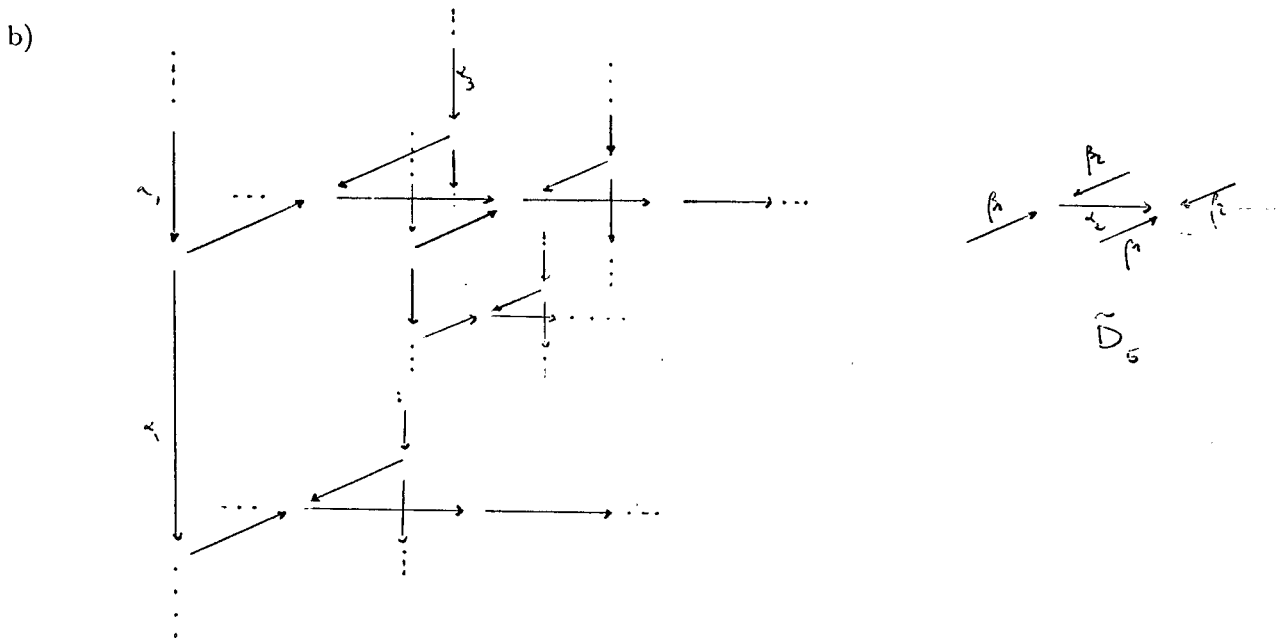
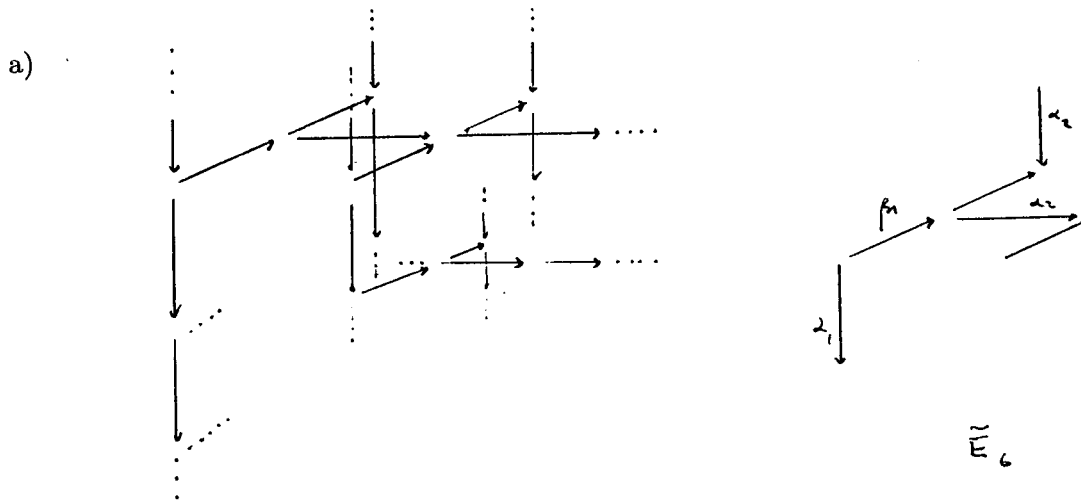
- \mathcal{S}_Λ contiene dos relaciones cero de la forma $\beta\alpha$ con β una flecha y α un lazo.
- \mathcal{S}_Λ contiene una relación cero de la forma $\beta'\alpha'$ y una relación de la forma $\beta\alpha - (c_2\gamma^2 + c_1\gamma)\beta$ con c_1, c_2 no simultáneamente nulos, β, β' flechas y α, α', γ lazos.
- \mathcal{S}_Λ contiene dos relaciones de la forma $\beta\alpha - (c_2\gamma^2 + c_1\gamma)\beta$ con β una flecha y α, γ lazos.

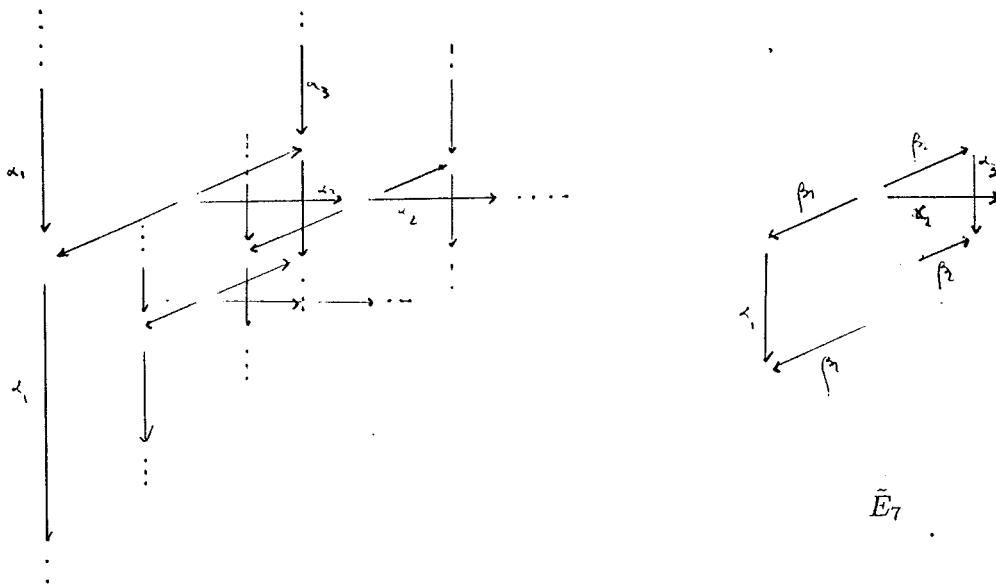
Observemos que si \mathcal{S}_Λ contiene sólo una relación de la forma $\beta\alpha - (c_2\gamma^2 + c_1\gamma)\beta$ entonces existe un cociente de Λ en las condiciones de a) ó b). Análogamente, si \mathcal{S}_Λ contiene alguna relación cero

de la forma $\beta\alpha^i$ con $i > 1$ entonces existe un cociente de Λ en las condiciones de a) ó b).

Comencemos estudiando el caso a). Vamos a probar que Λ es de tipo de representación infinito. Para ello usaremos la misma técnica que en casos anteriores, es decir, construimos el cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ de Λ y elegimos un subdiagrama lleno de \tilde{Q} de tipo de representación infinito.

Mostramos a continuación el cubrimiento y el subdiagrama elegido según Q sea el diagrama de 1), 2) ó 3).

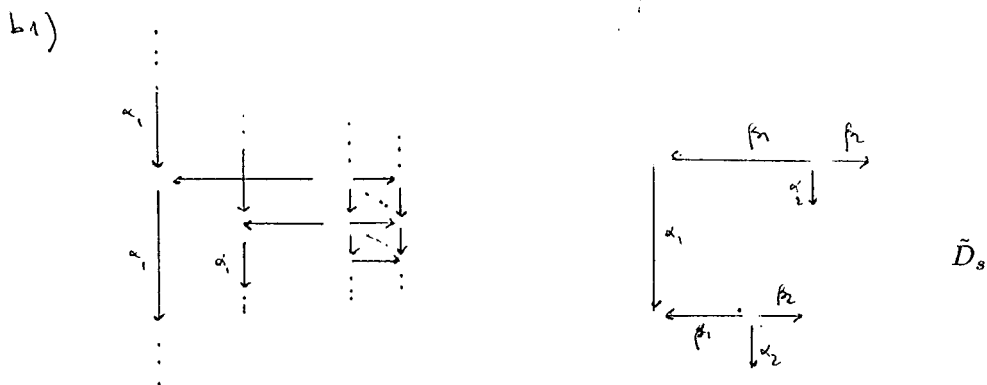


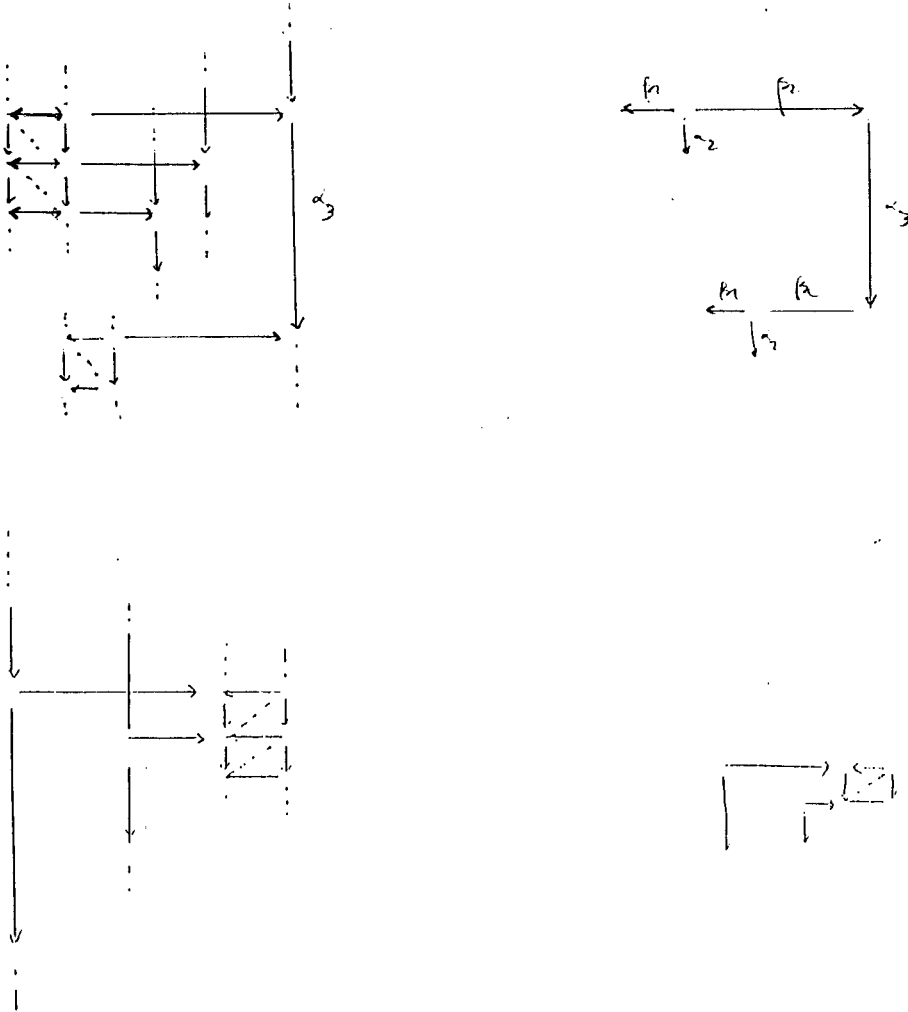


Consideremos ahora el caso b). Tenemos entonces una relación de la forma $\beta'\alpha' = 0$ y otra de la forma $\beta\alpha = (c_2\gamma^2 + c_1\gamma)\beta$ en Λ , con β, β' flechas y α, α', γ lazos.

Si $c_1 \neq 0$ entonces $u = c_2\gamma + c_1$ es inversible en $K[\gamma]$ y haciendo la sustitución $\gamma' = u\gamma$ se obtiene un álgebra isomorfa a Λ , en las condiciones de b) con $c_2 = 0$. Más aún, si $c_2 = 0$ se puede suponer que $c_1 = 1$. En resumen, cuando $c_1 \neq 0$ en b), basta estudiar el caso $\beta'\alpha' = 0, \beta\alpha = \gamma\beta$ con β, β' flechas y α, γ lazos.

Mostramos a continuación que Λ es de tipo de representación infinito en estas condiciones.





Estudiemos ahora el caso b) con $c_1 = 0$. Veamos que en todos los casos existe un cociente Λ' de Λ que es una de las álgebras dadas en el Lema.4.8. De aquí resulta que Λ es de tipo de representación infinito.

Si $c_1 = 0$ se puede suponer que $c_2 = 1$ y tenemos entonces relaciones de la forma $\beta'\alpha' = 0$ y $\beta\alpha = \gamma^2\beta$ en Λ , con β, β' flechas y α, α' y γ lazos. Indicamos a continuación las distintas posibilidades para las relaciones y un álgebra Λ' elegida según Q es el diagrama de 1), 2) ó 3). Escribiremos en 1) las correspondientes al diagrama Q de 1) y análogamente en 2) y 3).

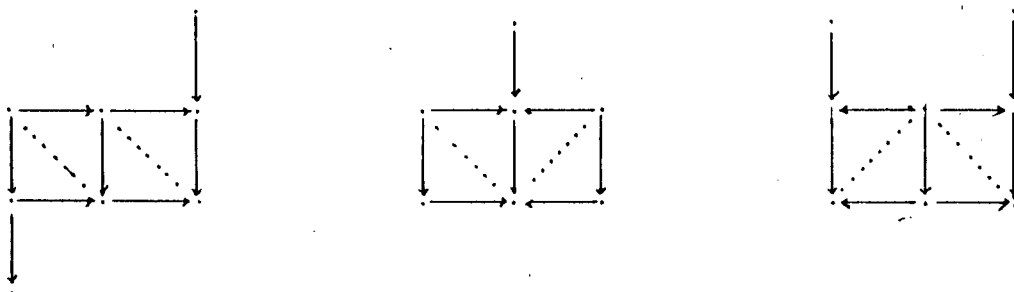
- 1) a) $\beta_1\alpha_1 = \alpha_2^2\beta_1, \beta_2\alpha_2 = 0, \Lambda' = KQ/(I+ \langle \alpha_3 \rangle)$
- b) $\beta_2\alpha_2 = \alpha_3^2\beta_2, \beta_1\alpha_1 = 0, \Lambda' = KQ/(I+ \langle \alpha_1 \rangle)$
- 2) $\beta_1\alpha_1 = \alpha_2^2\beta_1, \beta_2\alpha_3 = 0, \Lambda' = KQ/(I+ \langle \alpha_3 \rangle)$
- 3) $\beta_1\alpha_2 = \alpha_1^2\beta_1, \beta_2\alpha_2 = 0, \Lambda' = KQ/(I+ \langle \alpha_3 \rangle)$

Consideremos, para terminar, el caso c). Es decir, se tienen en Λ dos relaciones $\beta\alpha = (c_2\gamma^2 + c_1\gamma)\beta$ y $\beta'\alpha' = (c'_2\gamma'^2 + c'_1\gamma')\beta'$.

Si $c_2 = c'_2 = 0$ entonces no hay nada que demostrar. Supongamos entonces $c_2 \neq 0$.

Veamos primero que si c_1 y c'_1 son no nulos entonces Λ es de tipo de representación infinito. Basta probar que el cociente $\Lambda' = KQ / \langle \alpha^3, \alpha'^3, \gamma^3, \gamma'^3, \beta\alpha - c_1\gamma\beta, \beta'\alpha' - c'_1\gamma'\beta', \gamma^2\beta, \gamma'^2\beta' \rangle$ de Λ , es de tipo de representación infinito.

Es muy sencillo construir el cubrimiento Galois $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ y ver que según Q sea el diagrama de 1), 2) ó 3) \tilde{Q} contiene a uno de los siguientes diagramas de la lista [BHV] como subdiagrama convexo lleno.



En lo que sigue probaremos que Λ es de tipo de representación infinito mostrando que existe un cociente de Λ isomorfo a un álgebra en las condiciones del caso b).

Si $c_1 = c'_1 = 0$ se tienen las relaciones $\beta\alpha = c_2\gamma^2\beta$ y $\beta'\alpha' = c'_2\gamma'^2\beta'$ y el cociente $\Lambda' = KQ / (I + \langle \gamma^2 \rangle)$ de Λ es una de las álgebras consideradas en el caso b).

Supongamos que $c_1 = 0$ y $c'_1 \neq 0$.

Si $c'_2 = 0$ tenemos las relaciones $\beta\alpha = \gamma^2\beta$ y $\beta'\alpha' = c'_1\gamma'\beta'$ en Λ con β, β' flechas, $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma'$ lazos y el cociente $\Lambda' = KQ / (I + \langle \gamma^2 \rangle)$ de Λ está en las condiciones de b).

Si $c'_2 \neq 0$ consideramos por separado los diagramas de 1), 2) y 3).

1) i) $\beta_1\alpha_1 = \alpha_2^2\beta_1$, $\beta_2\alpha_2 = (c'_2\alpha_3^2 + c'_1\alpha_3)\beta_2$. El cociente $\Lambda' = KQ / I + \langle \alpha_2^2 \rangle$ está en las condiciones de b).

ii) $\beta_2\alpha_2 = \alpha_3^2\beta_3$, $\beta_1\alpha_1 = (c'_2\alpha_2^2 + c'_1\alpha_2)\beta_1$. El cociente $\Lambda' = KQ / I + \langle \alpha_3^2 \rangle$ es isomorfo a un álgebra en las condiciones de b) haciendo la sustitución

$$\alpha'_2 = [c'_2\alpha_2^2 + c'_1\alpha_2] \pmod{I + \langle \alpha_3^2 \rangle}.$$

2) $\beta_1\alpha_1 = \alpha_2^2\beta_1$, $\beta_2\alpha_3 = (c'_2\alpha_2^2 + c'_1\alpha_2)\beta_2$. El cociente $\Lambda' = KQ/(I+ \langle \alpha_2^2 \rangle)$ está en las condiciones de b).

3) $\beta_1\alpha_2 = \alpha_1^2\beta_1$, $\beta_2\alpha_2 = (c'_2\alpha_3^2 + c'_1\alpha_3)\beta_2$. Análogamente al caso 1) ii), el álgebra $\Lambda' = KQ/(I+ \langle \alpha_1^2 \rangle)$ es un cociente de Λ isomorfo a un álgebra en las condiciones del caso b).

Hemos completado así la demostración del Lema. \square

Daremos ahora una sencilla Observación que es consecuencia de la Observación.1.11 que será de utilidad.

Observación.4.14. Sea Q el diagrama $\begin{array}{ccc} \circlearrowleft & \xrightarrow{\beta} & \circlearrowright \\ \alpha & & \gamma \end{array}$ y Λ el álgebra definida por el diagrama Q y las relaciones $\alpha^i = \gamma^j = 0$, $\beta\alpha = (c_2\gamma^2 + c_1\gamma)\beta$ con $c_1 \neq 0$. Entonces $j \leq i$.

En efecto, como $c_1 \neq 0$, $c_2\gamma + c_1$ es un elemento inversible de $K[\gamma]$ y haciendo la sustitución $\gamma' = (c_2\gamma + c_1)\gamma$ se tiene un álgebra isomorfa a Λ definida por el diagrama $\begin{array}{ccc} \circlearrowleft & \xrightarrow{\beta} & \circlearrowright \\ \alpha & & \gamma' \end{array}$ con las relaciones $\alpha^i = \gamma'^j = 0$, $\beta\alpha = \gamma'\beta$ (cf. Obs.4.7). Luego por la Observación.1.11, $j \leq i$. \square

Sea $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP), con Q un diagrama de tipo A_3 con un lazo en cada vértice. Si el conjunto S_Λ consiste sólo de una relación de la forma $\beta\alpha = c\gamma\beta$ con β una flecha, α, γ lazos y $c \neq 0$ entonces Λ es de tipo de representación infinito. Es sencillo construir el cubrimiento Galois universal de Λ en este caso y verificar que contiene un subdiagrama convexo lleno de tipo \tilde{A}_3 .

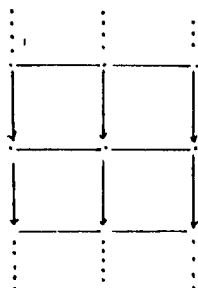
De aquí y el Lema 4.13 anterior, para determinar cuáles son todas las álgebras $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP) y de tipo finito cuando Q es un diagrama A_3 con 3 lazos, sólo resta estudiar el caso en que el conjunto S_Λ contiene exactamente dos relaciones de conmutatividad de la forma $\beta\alpha = c\gamma\beta$ con α, γ lazos, β una flecha y $c \neq 0$. Es fácil ver que en todos los casos se puede suponer $c = 1$. Probaremos que en algunos de ellos se obtienen álgebras de tipo de representación finito.

III.1. En las condiciones de arriba, $\Lambda = KQ/I$ está dada por uno de los siguientes diagramas con relaciones.

- 1) $\begin{array}{ccccc} \circlearrowleft & \xrightarrow{\beta_1} & \circlearrowright & \xrightarrow{\beta_2} & \circlearrowleft \\ \alpha & & \gamma & & \delta \end{array}$, $\alpha^i = \gamma^j = \delta^k = 0$, $\beta_1\alpha = \gamma\beta_1$, $\beta_2\gamma = \delta\beta_2$, $k \leq j \leq i$
- 2) $\begin{array}{ccccc} \circlearrowleft & \xrightarrow{\beta_1} & \circlearrowright & \xleftarrow{\beta_2} & \circlearrowleft \\ \alpha & & \gamma & & \delta \end{array}$, $\alpha^i = \gamma^j = \delta^k = 0$, $\beta_1\alpha = \gamma\beta_1$, $\beta_2\delta = \gamma\beta_2$, $j \leq i, k$
- 3) $\begin{array}{ccccc} \circlearrowleft & \xleftarrow{\beta_1} & \circlearrowright & \xrightarrow{\beta_2} & \circlearrowleft \\ \alpha & & \gamma & & \delta \end{array}$, $\alpha^i = \gamma^j = \delta^k = 0$, $\beta_1\gamma = \alpha\beta_1$, $\beta_2\gamma = \delta\beta_2$, $i, k \leq j$

Notar que las condiciones sobre i , j , k siguen de la Observación.1.11.

En cualquiera de estos casos el cubrimiento Galois universal de Λ está dado por el siguiente diagrama \tilde{Q} con las relaciones correspondientes.



Es fácil ver que tanto en 1) como en 2) y 3) este cubrimiento es simplemente conexo y usando la Proposición 3.3.8 obtenemos que Λ es un álgebra standard. Luego, estamos en las condiciones del Criterio de Bongartz para tipo finito.

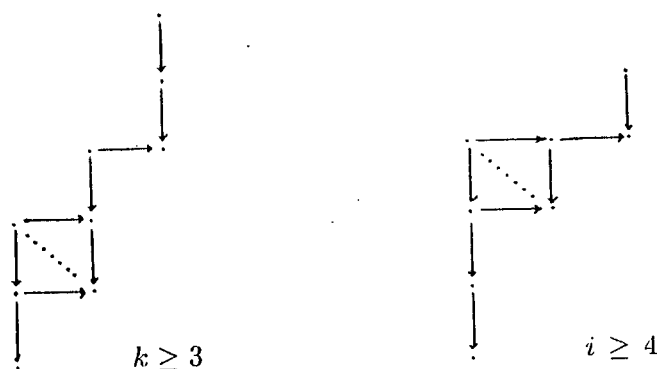
Veamos en cada caso cuáles son las relaciones que determinan álgebras de tipo de representación finito usando dicho criterio.

1) Λ es de tipo de representación finito exactamente en los siguientes casos:

- i) $i = j = k = 2$
- ii) $i = 3, j = 2, 3, k = 2$

Es fácil ver que las propiedades 2)a),b) y c) del Criterio de Bongartz se satisfacen cuando i, j, k están en las condiciones i) ó ii) que acabamos de indicar.

Para probar la recíproca mostraremos a continuación, para cada uno de los casos restantes, un subdiagrama convexo lleno de \tilde{Q} de tipo infinito.



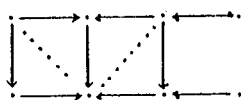
2) Veamos que Λ es de tipo de representación finito exactamente en los siguientes casos:

i) $i = j = 2, k = 2, 3$

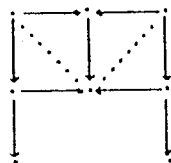
ii) $i = 3, j, k = 2$

Análogamente al caso anterior usando el Criterio de Bongartz se ve que si i, j y k satisfacen cualquiera de las dos condiciones anteriores entonces Λ es de tipo finito.

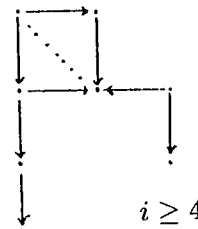
Sin embargo, mostramos a continuación que en los casos restantes \tilde{Q} contiene un diagrama de la lista [BHV] como subdiagrama convexo lleno y por lo tanto Λ es de tipo de representación infinito.



$i = j = 2, k \geq 4$



$i = k \geq 3$

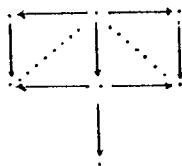


$i \geq 4$

3) Veamos que Λ es de tipo de representación finito si y sólo si $i = j = 2$.

De manera análoga a los casos anteriores se ve fácilmente usando el Criterio de Bongartz que si $i = j = 2$ entonces Λ es de tipo de representación finito.

La recíproca sigue de que si $j \geq 3$ se puede elegir en \tilde{Q} el siguiente subdiagrama convexo lleno perteneciente a la lista [BHV].



Con esto completamos el caso III.1 y también el estudio de los diagramas de tipo A_3 con un lazo en cada vértice.

Para completar el estudio de los diagramas de Dynkin de tipo A_n con 3 lazos estudiaremos a continuación el caso $n > 3$. Para ello consideraremos por separado los siguientes casos:

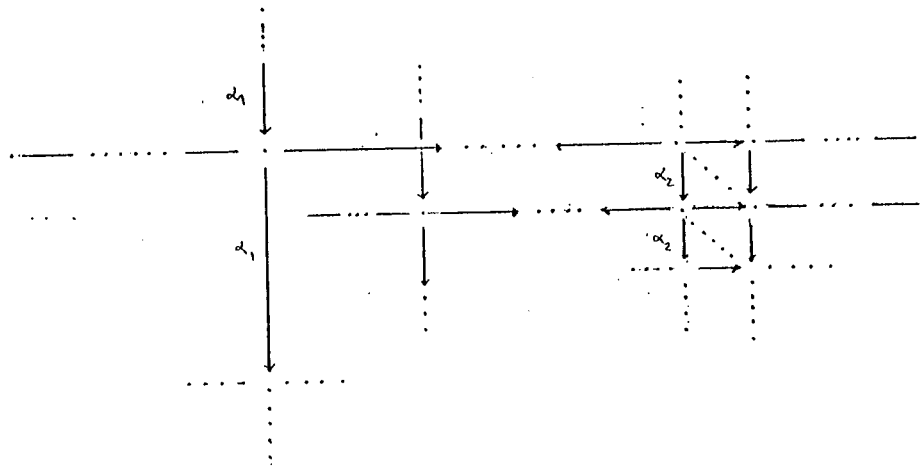
III.2. Sea $Q : \dots \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\beta_1} \dots \xleftarrow{\beta_2} \dots \xrightarrow{\beta_3} \dots \xrightarrow{\delta} \dots$ y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP).

Por la Observación.4.2, $\Lambda' = \Lambda/\Lambda(e_1 + \dots + e_k + e_{l+2} + \dots + e_n)\Lambda$ tiene la propiedad (IIP) y está dada por el diagrama $\dots \xleftarrow{\gamma} \dots \xrightarrow{\beta_3} \dots$.

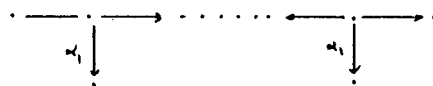
Ya hemos visto en la sección II que si Λ' es de tipo de representación finito entonces entre las relaciones de Λ' aparece la relación $\beta_3\gamma = c\delta\beta_3$ con $c \in K$.

Como las relaciones de Λ' son también relaciones de Λ , para determinar tales álgebras Λ de tipo de representación finito podemos suponer que $\beta_3\gamma = \delta\beta_3$ es una relación en Λ .

Luego el cubrimiento Galois universal de Λ está dado por el siguiente diagrama \tilde{Q} :

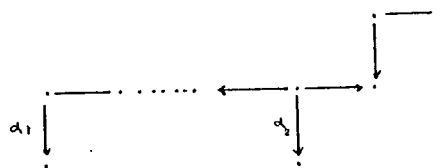


Si $k > 1$ entonces \tilde{Q} contiene un subdiagrama convexo lleno de tipo \tilde{D}_r que es el siguiente:



De aquí Λ es de tipo de representación infinito si $k > 1$.

Análogamente, si $n > l + 1$, \tilde{Q} contiene un diagrama de tipo \tilde{E}_7 que es subdiagrama convexo lleno de:



Luego Λ es también de tipo de representación infinito si $n > l + 1$.

Resta estudiar entonces el caso $k = 1$ y $n = l + 1$. En este caso Q es el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \circlearrowleft & \xrightarrow{\beta_1} & \dots & \xleftarrow{\beta_2} & \circlearrowleft & \xrightarrow{\beta_3} & \circlearrowleft \\ \alpha & & & & \gamma & & \delta \end{array}$$

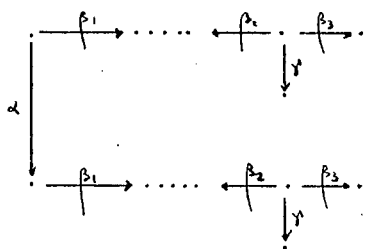
Por el Teorema 1.9, $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) si y sólo si

$$I = \langle \alpha^i, \gamma^j, \delta^t, \beta_1 \alpha^r, \beta_2 \gamma^s, \beta_3 \gamma^u - \delta^v \beta_3 \rangle \text{ con } 1 < r \leq i, 1 < s, u \leq j, 1 < s \leq t.$$

El álgebra $\Lambda / \langle \alpha \rangle$ también tiene la propiedad (IIP) y fue estudiada en II.1.2 y II.1.6. Allí se probó que esta álgebra es de tipo de representación finito si y sólo si $n < 7$ y se tienen las relaciones $\gamma^2 = \delta^2 = 0, \beta_2 \gamma = 0, \beta_3 \gamma = \delta \beta_3$.

Claramente basta estudiar entonces cuándo las relaciones $\alpha^i = \gamma^2 = \delta^2 = 0, \beta_1 \alpha^r = \beta_2 \gamma = 0, \beta_3 \gamma = \delta \beta_3$ definen un álgebra Λ de tipo de representación finito.

Si $r \geq 2$ entonces \tilde{Q} contiene al siguiente diagrama de tipo \tilde{D}_r , como subdiagrama convexo lleno:



Esto prueba que Λ es de tipo de representación infinito si $r \geq 2$.

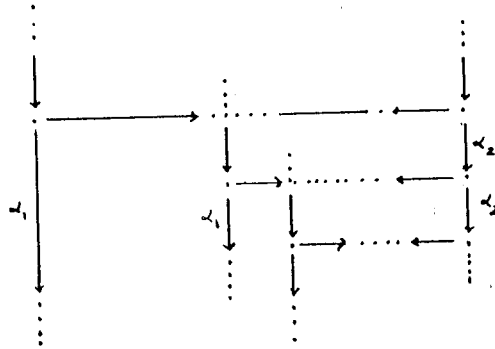
Supongamos $r = 1$ y probemos que $\Lambda = KQ / \langle \alpha^i, \gamma^2, \delta^2, \beta_1 \alpha, \beta_2 \gamma, \beta_3 \gamma - \delta \beta_3 \rangle$ es de tipo de representación finito si y sólo si

$$(*) \quad \begin{cases} l = 3, i = 2, 3 \\ \text{ó} \\ l = 4, i = 2 \end{cases}$$

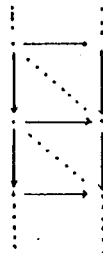
Usaremos el Criterio de Bongartz para probar que si l e i satisfacen cualquiera de las condiciones de (*) entonces Λ es de tipo de representación finito.

De la Proposición 3.3.8 sigue fácilmente que Λ es un álgebra distributiva. Por otro lado, todo vértice s de \tilde{Q} es separante y las K - categorías $K\tilde{\Lambda}_s$ y $K\tilde{\Lambda}^s$ son \tilde{A} - libres.

En efecto, si s está en la fibra de un vértice $a < l$ entonces $K\tilde{\Lambda}_s$ y $K\tilde{\Lambda}^s$ son categorías dadas por un diagrama de árbol (finito), subdiagrama del siguiente árbol infinito:



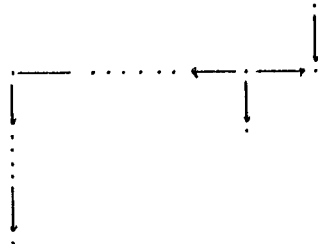
y si $a \geq l$ entonces las categorías $K\tilde{\Lambda}_s$ y $K\tilde{\Lambda}^s$ son subcategorías llenas de la K -categoría determinada por el diagrama



Luego $\tilde{\Lambda}$ es un cubrimiento simplemente conexo de Λ (cf. Proposición.3.3.6). De aquí Λ es un álgebra standard y estamos en las condiciones del Criterio de Bongartz para tipo finito.

Como vimos arriba, la condición 2)a) del Criterio se verifica y es fácil ver que también se satisfacen las condiciones 2) b) y c) de dicho Criterio cuando l e i están en las condiciones de (*) y por lo tanto Λ es de tipo de representación finito.

La recíproca sigue de que en cualquier otro caso distinto de los dados en (*) se puede elegir un subdiagrama convexo lleno \tilde{Q}' de \tilde{Q} de tipo \tilde{E}_8 . \tilde{Q}' es subdiagrama del siguiente diagrama:



Esto termina el caso III.2. \square

Para completar el estudio de los diagramas dados en a) falta estudiar los casos en que Q es uno de los siguientes:

$$1 \cdots \circlearrowleft_{\alpha} \xleftarrow{\beta_1} \cdots \xleftarrow{\beta_2} l \circlearrowleft_{\gamma} \xrightarrow{\beta_3} l+1 \circlearrowright_{\delta} \cdots \cdots n \quad \text{ó}$$

$$1 \cdots \circlearrowleft_{\alpha} \xleftarrow{\beta_1} \cdots \xrightarrow{\beta_2} l \circlearrowleft_{\gamma} \xrightarrow{\beta_3} l+1 \circlearrowright_{\delta} \cdots \cdots n \quad .$$

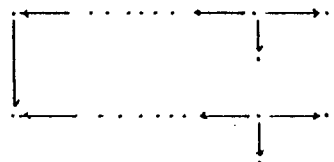
Consideraremos sólo el primero de estos diagramas pues el otro caso se trata en forma análoga.

III.3 Sea $Q: 1 \cdots \circlearrowleft_{\alpha} \xleftarrow{\beta_1} \cdots \xleftarrow{\beta_2} l \circlearrowleft_{\gamma} \xrightarrow{\beta_3} l+1 \circlearrowright_{\delta} \cdots \cdots n$.

Probaremos que si $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) entonces es de tipo de representación infinito.

Por un razonamiento análogo al hecho en III.2, es suficiente probar que si entre las relaciones de Λ aparece la relación de conmutatividad $\beta_3\gamma = \delta\beta_3$ entonces Λ es de tipo de representación infinito.

En este caso el cubrimiento Galois universal de Λ está dado por un diagrama similar al diagrama \tilde{Q} dado en el caso anterior III.2 y es fácil ver que contiene al siguiente diagrama de tipo \tilde{D}_r como subdiagrama convexo lleno.



Esto prueba que Λ es de tipo de representación infinito.

Con esto completamos el estudio de los diagramas dados en a). Continuaremos ahora con el estudio de los diagramas dados en b). Esto es, estudiaremos a continuación diagramas de la forma

$$1 \cdots \cdots k \circlearrowleft \cdots \circlearrowleft_{k+1} \cdots \circlearrowleft_{k+2} \cdots \cdots n .$$

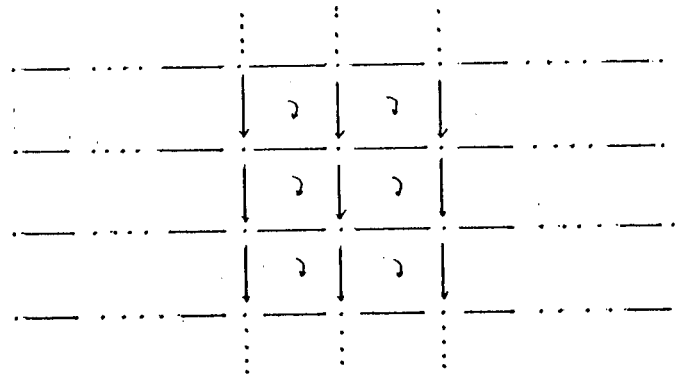
Observación.4.16. Sea Q un diagrama de la forma

$$1 \cdots \cdots k \circlearrowleft_{\alpha} \xrightarrow{\beta_1} k+1 \circlearrowleft_{\gamma} \xrightarrow{\beta_2} k+2 \circlearrowleft_{\delta} \cdots \cdots n \quad \text{y } \Lambda = KQ/I \text{ con la propiedad (IIP).}$$

De acuerdo a la Observación 4.2, el cociente $\Lambda' = \Lambda/\Lambda(c_1 + \cdots + c_{k-1} + c_{k+3} + \cdots + c_n)\Lambda$ de Λ , que está dado por un diagrama de tipo A_3 con un lazo en cada vértice, también satisface la propiedad (IIP).

Como además toda relación de Λ' es también una relación de Λ y Λ' es de tipo de representación finito si Λ lo es, sigue del Lema 4.13 que para determinar cuáles son tales álgebras Λ de tipo de representación finito podemos suponer que entre las relaciones de Λ aparecen $\beta_1\alpha = \gamma\beta_1$ (ó $\beta_1\gamma = \alpha\beta_1$) y $\beta_2\gamma = \delta\beta_2$ (ó $\beta_2\delta = \gamma\beta_2$).

En estas condiciones el cubrimiento Galois universal de Λ está dado por el siguiente diagrama \tilde{Q} .



Para diferentes orientaciones de las flechas β_1 y β_2 nos referiremos al cubrimiento \tilde{Q} como el cubrimiento Galois universal de Λ entendiendo que se consideran en \tilde{Q} las orientaciones correspondientes de las flechas que están en la fibra de β_1 y β_2 y las relaciones adecuadas.

Por otro lado, el álgebra $\Lambda'' = \Lambda / \Lambda \cdot (e_1 + \dots + e_{k-1} + e_{k+3} + \dots + e_n) \cdot \Lambda$ también satisface la propiedad (IIP) y está dada por uno de los diagramas estudiados en III.1 con relaciones. Por la Observación 4.2 basta considerar en Λ relaciones tales que el álgebra Λ'' sea de tipo de representación finito. \square

III.4. Sea $\Lambda = KQ/I$ en las condiciones de la Observación 4.16. y S_Λ el conjunto de relaciones minimales de Λ que no sólo involucran lazos.

Entonces Q es uno de los siguientes diagramas y S_Λ contiene exactamente dos relaciones de conmutatividad de la forma $\beta\alpha_1 = \alpha_2\beta$ con β una flecha y α_1, α_2 lazos.

- 1) $1 \xrightarrow{\dots} i \xrightarrow{\epsilon} \alpha \xrightarrow{\beta_1} \gamma \xrightarrow{\beta_2} \delta \xrightarrow{\beta_3} \dots \xrightarrow{\dots} n, n \geq 4$
- 2) $1 \xrightarrow{\dots} i \xrightarrow{\epsilon} \alpha \xrightarrow{\beta_1} \gamma \xleftarrow{\beta_2} \delta \xrightarrow{\beta_3} \dots \xrightarrow{\dots} n, n \geq 4$
- 3) $1 \xrightarrow{\dots} i \xrightarrow{\epsilon} \alpha \xleftarrow{\beta_1} \gamma \xrightarrow{\beta_2} \delta \xrightarrow{\beta_3} \dots \xrightarrow{\dots} n, n \geq 4$

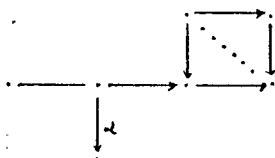
También consideraremos aquí los casos $1 = s(\alpha)$ ó $n = s(\delta)$.

Comenzamos estudiando el caso 1). Probaremos que Λ es de tipo de representación finito exactamente cuando $s(\alpha) = 1$, $s(\beta_3) = 3$, $n = 4$ y se tienen las relaciones $\alpha^2 = \gamma^2 = \delta^2 = 0$, $\beta_1\alpha = \gamma\beta_1$, $\beta_2\gamma = \delta\beta_2$, $\beta_3\delta = 0$.

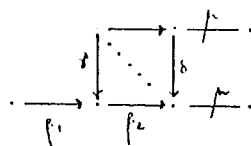
Aplicando el Criterio de Bongartz para tipo finito a Λ y a su cubrimiento Galois universal construido en la Observación.4.16, resulta que en las condiciones que acabamos de indicar Λ es de tipo de representación finito.

Para probar la recíproca procedemos de manera análoga a los casos anteriores. Esto es, mostramos en cada uno de los casos restantes un diagrama \tilde{Q}' de la lista [BHV] que es subdiagrama convexo lleno del cubrimiento \tilde{Q} de Λ .

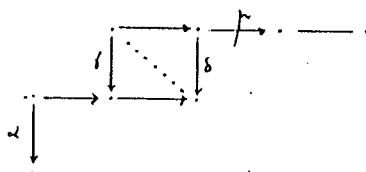
Si $s(\alpha) \neq 1$ elegimos \tilde{Q}' como sigue:



Para el caso $s(\alpha) = 1$ y $e(\beta_3) = 3$ ó $s(\beta_3) = 3$ y $\beta_3\delta \neq 0$ en Λ se puede elegir \tilde{Q}' como el siguiente diagrama:



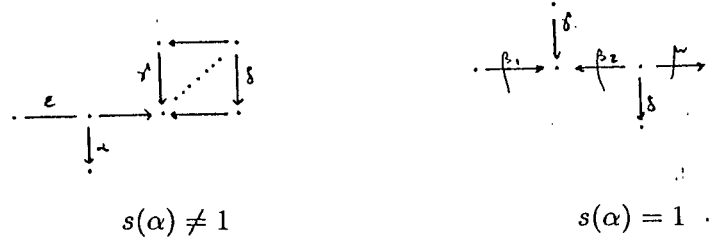
Por último, si $s(\alpha) = 1$ y $n \geq 5$, \tilde{Q}' es el siguiente:



Esto concluye el caso 1).

Veremos ahora que si Q es el diagrama de 2) y $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) entonces Λ es de tipo de representación infinito.

Esto sigue inmediatamente de que el cubrimiento Galois universal de Λ dado por el diagrama \tilde{Q} de la Observación 4.16 contiene a uno de los siguientes diagramas de la lista [BHV] como subdiagrama convexo lleno.

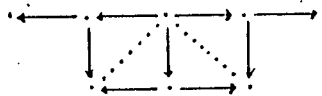


Consideremos para terminar el diagrama Q de 3). Veamos que $\Lambda = KQ/I$ es de tipo de representación finito si y sólo si $s(\alpha) = 1$, $s(\beta_3) = 3$, $n = 4$ y Λ está definida por las relaciones $\alpha^2 = \gamma^2 = \delta^2 = 0$, $\beta_1\gamma = \alpha\beta_1$, $\beta_2\gamma = \delta\beta_2$, $\beta_3\delta = 0$.

Análogamente a los casos anteriores se prueba usando el Criterio de Bongartz para tipo finito que en las condiciones de arriba Λ es de tipo de representación finito.

Probemos la recíproca. Distinguiamos los casos $s(\alpha) \neq 1$ ó $s(\alpha) = 1$. Mostramos en cada caso un diagrama \tilde{Q}' de la lista [BHV] elegido como subdiagrama convexo lleno del cubrimiento \tilde{Q} de Λ .

Si $s(\alpha) \neq 1$ y $n \geq 5$, \tilde{Q}' es el siguiente:



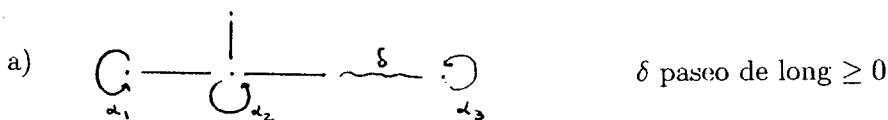
Supongamos $s(\alpha) = 1$. Mostramos el diagrama \tilde{Q}' elegido según $n \geq 5$ ó $n = 4$ y $\alpha^2 \neq 0$.



Esto completa el caso III.4.

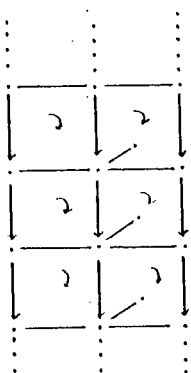
Para terminar con la sección III probaremos en el siguiente lema que no existen álgebras $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP) y de tipo de representación finito dadas por un diagrama de Dynkin de tipo D_n ó E_p , $p = 6, 7, 8$ con 3 lazos.

Lema.4.17. Si Λ es un álgebra que satisface la propiedad (IIP) y está dada por uno de los siguientes diagramas entonces Λ es de tipo de representación infinito.



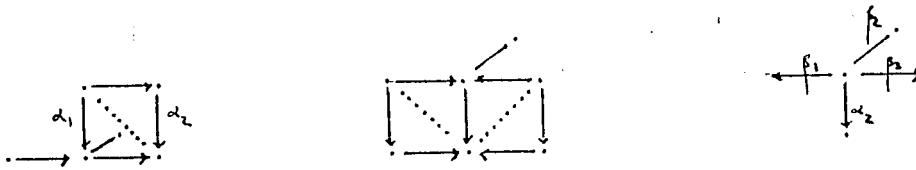
Demostración. Consideremos primero el diagrama Q de a) y sea $\Lambda = KQ/I$. Supongamos que δ es un paseo de longitud mayor que cero. Como Λ tiene la propiedad (IIP), $\Lambda' = \Lambda / \langle \alpha_3 \rangle$ también la tiene. Además Λ' está dada por un diagrama Q' de la forma $\circ - \overset{|}{\circ} - \dots -$ y por lo visto en II.2.5 Λ' es de tipo de representación infinito. De aquí resulta que Λ también lo es.

Supongamos entonces que δ es de longitud 0. Si todas las relaciones minimales de Λ que involucran a las flechas β_1 y β_3 son relaciones de conmutatividad de la forma $\beta_i \alpha_j = \alpha_k \beta_i$ con $i = 1, 3$ y $1 \leq j, k \leq 3$ entonces el siguiente diagrama \tilde{Q} , con las relaciones correspondientes es el cubrimiento Galois universal de Λ .



Más aún, \tilde{Q} contiene a uno de los siguientes diagramas de la lista [BHV] como subdiagrama

convexo lleno:

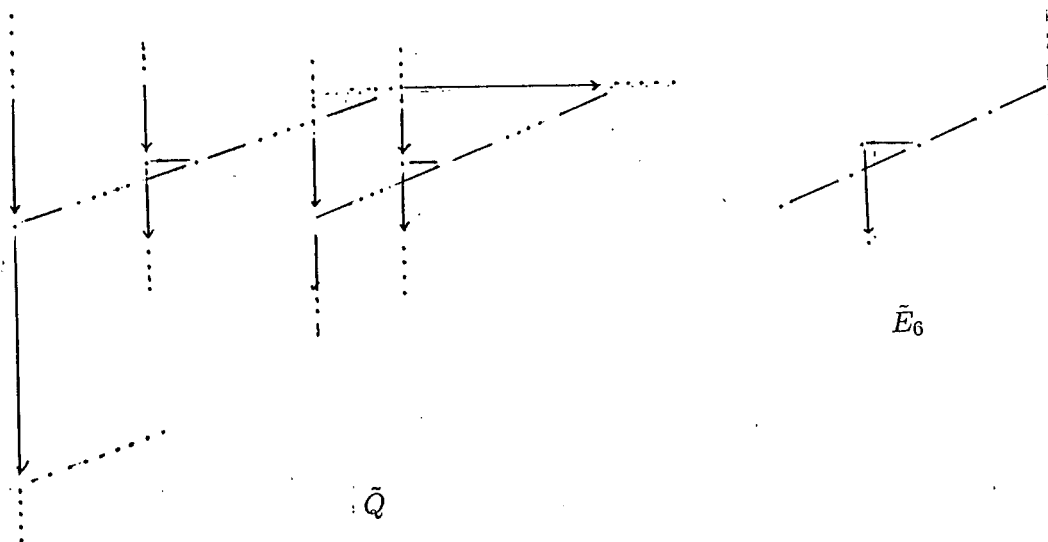


Luego Λ es de tipo de representación infinito en este caso.

Recordemos que notamos con \mathcal{S}_Λ al conjunto de relaciones minimales de Λ que no sólo involucran lazos.

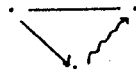
Si no estamos en la situación anterior, es decir, si existe alguna relación cero en \mathcal{S}_Λ , entonces tal relación es de la forma $\beta_1\alpha_i^r = 0$ ó $\beta_3\alpha_j^s = 0$, $1 \leq i, j \leq 3$ y por el Lema 4.13 $\Lambda/\Lambda.e_4.\Lambda$ es de tipo de representación infinito. De aquí, Λ es de tipo de representación infinito, lo cual termina la demostración del lema cuando Q es el diagrama dado en a).

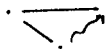
Supongamos ahora que Q es el diagrama dado en b). Es claro que las relaciones de \mathcal{S}_Λ son todas relaciones cero de la forma $\beta\alpha^i = 0$, con β una flecha y α un lazo. Luego el cubrimiento Galois universal de Λ está dado por un árbol infinito \tilde{Q} con relaciones. Mostramos a continuación que en este caso siempre es posible elegir un subdiagrama convexo lleno de \tilde{Q} de tipo \tilde{E}_6 , de donde resulta que Λ es de tipo de representación infinito.



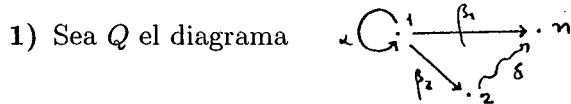
Esto completa la demostración del lema. \square

IV. Q ES UN DIAGRAMA CON LAZOS Y CONTIENE UN SUBDIAGRAMA CONVEXO DEL TIPO



Estudiaremos primero el diagrama  con un lazo en cualquiera de sus vértices. Comenzamos con algunas observaciones que serán de utilidad a lo largo de toda la sección.

Observación.4.18.



y sea $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP). Entonces $\tau_{\hat{P}_1} P_1 \simeq P_2^{d_2} \amalg P_n^{d_n}$, $d_2, d_n \geq 1$ y por el Teorema 1.9, $\phi = (\beta_1, \beta_1\alpha, \dots, \beta_1\alpha^{d_n-1}, \beta_2, \beta_2\alpha, \dots, \beta_2\alpha^{d_2-1})$ define un isomorfismo de $P_2^{d_2} \amalg P_n^{d_n} \rightarrow \tau_{\hat{P}_1} P_1$. De aquí $\beta_1\alpha^{d_n}$ y $\beta_2\alpha^{d_2}$ tienen en Λ una única expresión como imagen de ϕ de la siguiente forma:

$$(1) \quad \beta_1\alpha^{d_n} = \sum_{r=1}^{d_n-1} k_r\beta_1\alpha^r + \sum_{s=0}^{d_2-1} k'_s\delta\beta_2\alpha^s$$

$$(2) \quad \beta_2\alpha^{d_2} = \sum_{j=1}^{d_2-1} k''_j\beta_2\alpha^j$$

Usaremos las expresiones (1) y (2) y el hecho que ϕ es un isomorfismo para probar que $k_r = 0 = k''_j$ cualesquiera sean $1 \leq r \leq d_n - 1$, $1 \leq j \leq d_2 - 1$.

Supongamos que no todos los k''_j de la expresión (2) son nulos y sea j_0 el menor índice j tal que $k''_j \neq 0$. Análogamente supongamos que no todos los k_r en la expresión (1) son nulos y sea $d = \min \{r : k_r \neq 0\}$. Entonces tenemos las siguientes igualdades en Λ :

$$(*) \quad \beta_1\alpha^d(\alpha^{d_n-d} - \dots - k_d) = \sum_{s=0}^{d_2-1} k'_s\delta\beta_2\alpha^s$$

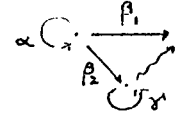
$$(**) \quad \beta_2\alpha^{j_0}(\alpha^{d_2-j_0} - k''_{d_2-1}\alpha^{d_2-j_0-1} - \dots - k''_{j_0}) = 0$$

Como k''_{j_0} y k_d son no nulos, los elementos $u = k''_{i_2}\alpha^{i_2-j_0} + \dots + k''_{j_0+1}\alpha + k''_{j_0}$ y $v = \alpha^{r-d} - \dots - k_d$ son inversibles en $K[\alpha]$ de donde sigue que $\beta_2\alpha^{j_0} = 0$ y

$$\beta_1\alpha^d = \sum_{s=0}^{d_2-1} k'_s\delta\beta_2\alpha^s u^{-1} = \sum_{s=0}^{d_2-1} c_s\delta\beta_2\alpha^s$$

en Λ . Ambas igualdades son una contradicción ya que $\beta_2\alpha^{j_0}$ y $\beta_1\alpha^d$ son coordenadas del isomorfismo ϕ . De aquí y el Teorema.1.9 resulta entonces que

$$\Lambda = KQ / \langle \alpha^i, \beta_2\alpha^{d_2}, \beta_1\alpha^{d_n} - \sum_{s=0}^{d_2-1} k'_s \delta \beta_2\alpha^s \rangle$$



2) Es útil recordar que de acuerdo al estudio hecho en I.1.4 el álgebra

$$\Lambda' = K(\overset{\beta_1}{\leftarrow} \underset{\alpha}{\circlearrowleft} \overset{\beta_2}{\rightarrow}) / \langle \alpha^i, \beta_1\alpha^2, \beta_2\alpha \rangle \text{ con } i > 2 \text{ es de tipo de representación infinito.}$$

□

IV.1. Sea Q el diagrama $\underset{\alpha}{\circlearrowleft} \xrightarrow{\beta_1} n$, y Λ con la propiedad (IIP). Entonces $\tau_{\hat{P}_1} P_1 \simeq$

$$P_2^{d_2} \coprod P_n^{d_n} \text{ y } \Lambda = KQ / \langle \alpha^i, \beta_2\alpha^{d_2}, \beta_1\alpha^{d_n} - \sum_{s=0}^{d_2-1} k'_s \delta \beta_2\alpha^s \rangle \text{ con } d_2, d_n \geq 1 \text{ por la Observación 4.18 1).}$$

Estudiaremos cuándo Λ es de tipo de representación finito de acuerdo a la cantidad de copias de los proyectivos P_2 y P_n que aparecen como sumandos de $\tau_{\hat{P}_1} P_1$. Probaremos que Λ es de tipo de representación finito exactamente cuando está definida por las

$$\text{relaciones } \alpha^i = \beta_2\alpha = 0, \beta_1\alpha = \delta\beta_2 \text{ con } \begin{cases} i = 2, 3, & \text{long}(\delta) = 1 \\ i = 2, & \text{long}(\delta) = 2 \end{cases}$$

a) Supongamos primero que $\tau_{\hat{P}_1} P_1 \simeq P_2 \coprod P_n$. Entonces $\phi = (\beta_1, \beta_2)$, $\beta_2\alpha = 0$ en Λ y la expresión (1) de $\beta_1\alpha$ es la siguiente:

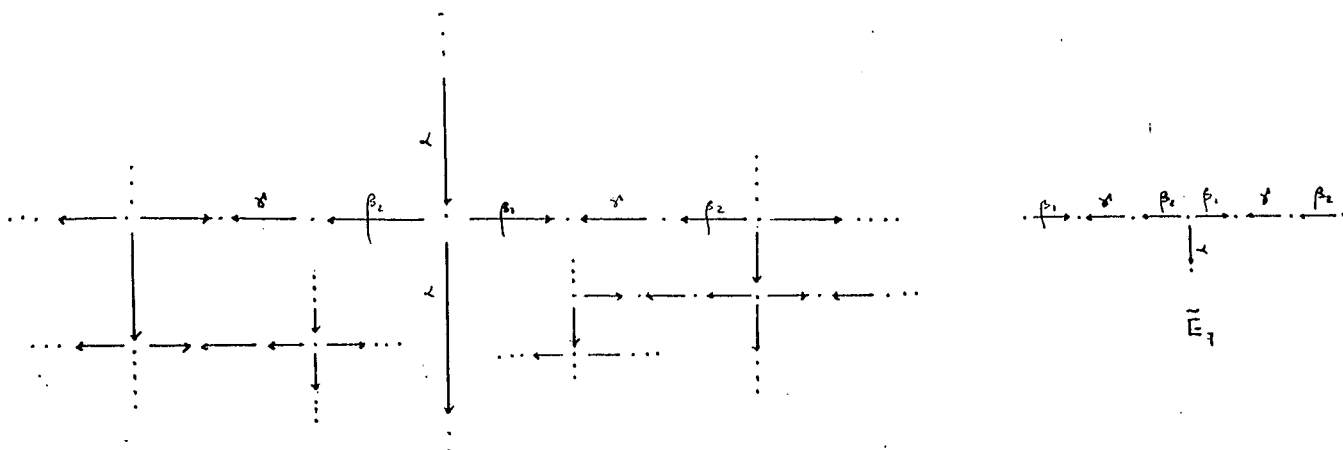
$$(1') \quad \beta_1\alpha = k\delta\beta_2, \quad k \in K$$

Veamos primero que si $k = 0$ en (1') entonces Λ es de tipo de representación infinito. Para ello construimos el cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$ de Λ y mostramos que se puede elegir en \tilde{Q} un subdiagrama convexo lleno de tipo \tilde{E}_7 .

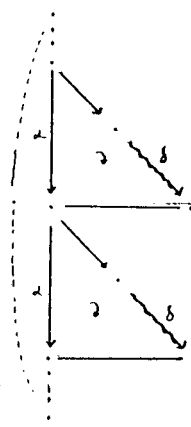
Supongamos ahora $k \neq 0$ en (1'). Podemos suponer que $k = 1$.

Veamos que Λ es de tipo de representación finito si y sólo si $\alpha^i = \beta_2\alpha = 0$,

$$\beta_1\alpha = \delta\beta_2 \text{ con } \begin{cases} i = 2, 3, & \text{long}(\delta) = 1 \\ i = 2, & \text{long}(\delta) = 2 \end{cases}$$



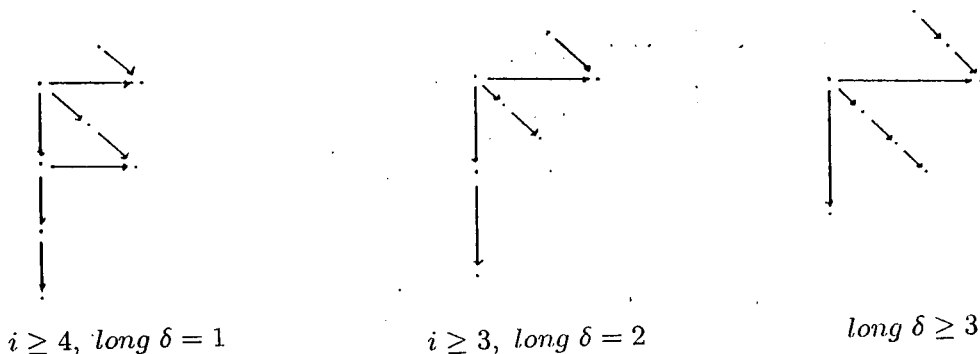
Sea Λ definida por las relaciones que acabamos de escribir. $\Lambda(a, b)$ es uniserial como $\Lambda(a, a) - \Lambda(b, b)$ - bimódulo para todo a y b en Λ y de aquí Λ es un álgebra distributiva. El cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda}$ de Λ está dado por el siguiente diagrama \tilde{Q} con relaciones y el grupo G que actúa sobre $\tilde{\Lambda}$ de modo que $\tilde{\Lambda}/G \simeq \Lambda$ es isomorfo a \mathbb{Z} .



Se ve fácilmente que $\tilde{\Lambda}$ es separada, es decir, que todo punto de $\tilde{\Lambda}$ es separador y que para todo $s \in \tilde{Q}$ las subcategorías $K\tilde{\Lambda}_s$ y $K\tilde{\Lambda}^s$ con \tilde{A} - libres. Luego, por la Proposición 3.3.6 y la definición de simple conexidad se tiene que $\tilde{\Lambda}$ es simplemente conexa. Estamos entonces en las condiciones del Criterio de Bongartz para tipo finito (Teorema 3.3.9) y es fácil ver que se satisfacen las propiedades 2) a), b) y c) de dicho teorema. De aquí Λ es de tipo de representación finito en estos casos.

La recíproca sigue de que en los casos restantes \tilde{Q} contiene a un diagrama \tilde{Q}' de la lista

[BHV] como subdiagrama convexo lleno. Mostramos a continuación tal diagrama \tilde{Q}' para cada caso.



En los casos siguientes probaremos que Λ es de tipo de representación infinito mostrando que el álgebra Λ' de la Observación.4.18. 3) es cociente de Λ .

b) Supongamos que $\tau_{\hat{P}_1} P_1 \simeq P_2 \amalg P_n^{d_n}$ con $d_n \geq 2$. Entonces $\phi = (\beta_1, \beta_1\alpha, \dots, \beta_1\alpha^{d_n-1}, \beta_2)$ $\beta_2\alpha = 0$ en Λ y la expresión de $\beta_1\alpha^{d_n}$ como imagen de ϕ es la siguiente:

$$(1') \quad \beta_1\alpha^{d_n} = k'_0\delta\beta_2$$

con $d_n \geq 2$. Luego el álgebra Λ' de la Observación.4.18. 2) es isomorfa a $\Lambda / \langle \delta \rangle$.

c) Para terminar supongamos que $\tau_{\hat{P}_1} P_1 \simeq P_2^{d_2} \amalg P_n^{d_n}$ con $d_2 \geq 2$. Entonces por la Observación.4.18. 1), $\Lambda = KQ / \langle \alpha^i, \beta_2\alpha^{d_2}, \beta_1\alpha^{d_n} - \sum_{s=0}^{d_2-1} k'_s\delta\beta_2\alpha^s \rangle$ con $d_2 \geq 2$. De aquí resulta que $KQ / (I + \langle \beta_1\alpha, \delta \rangle)$, que es cociente de Λ , es isomorfa al álgebra Λ' de la Observación.4.18. 3).

Hemos completado entonces el caso IV.1. \square

IV.2. Sea Q el diagrama con δ_1, δ_2 paseos y $2 \leq k \leq n$.

Si $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) entonces $\Lambda / \langle \alpha \rangle$ es un álgebra hereditaria dada por un diagrama de tipo \tilde{A}_n y por lo tanto es de tipo de representación infinito. Luego Λ es de tipo de representación infinito.

Observación 4.16. Sea Q' un diagrama que contiene al diagrama Q de IV.1 como subdiagrama convexo lleno, y sean i_1, i_2, \dots, i_n los vértices de Q correspondientes a tal subdiagrama. Digamos que Q es el diagrama



Sea $\Lambda' = KQ'/I'$ con la propiedad (IIP). Como vimos en la Observación.4.2,

$\Lambda'' = \Lambda' / \Lambda'.(\sum_{j \neq i_k} e_j)$. $\Lambda'' = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) y es isomorfa a $KQ/I' \cap KQ$ por ser Q un subdiagrama convexo lleno de Q' . De aquí resulta que toda relación de Λ'' es una relación de Λ' .

Luego por los resultados obtenidos en IV.1, para determinar cuándo Λ' es de tipo de representación finito basta considerar conjuntos de generadores del ideal I' de las relaciones, que incluyan a $\{\alpha^i, \beta_2\alpha, \beta_1\alpha - \delta\beta_2\}$ con $i = 2, 3$ si $long(\delta) = 1$ ó $i = 2$ si $long(\delta) = 2$. \square

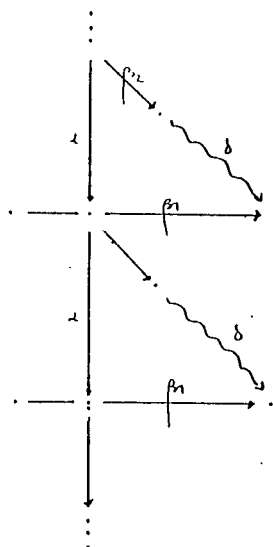
IV.3 Sea Q el diagrama

A diagram with a central vertex. There is a loop labeled α starting and ending at this vertex. There is a straight arrow labeled β_1 pointing to the right. There is a straight arrow labeled β_2 pointing down and then right. There is a wavy arrow labeled δ pointing down and then right.

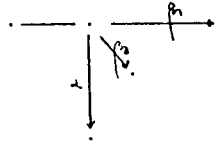
Veamos que si $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) entonces es de tipo infinito.

De acuerdo a la Observación anterior basta probar que si $\beta_1\alpha = \delta\beta_2$ es una relación en Λ entonces Λ es de tipo de representación infinito.

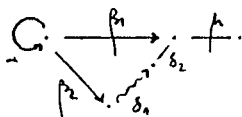
En estas condiciones el siguiente diagrama \tilde{Q} , con las relaciones correspondientes, es el cubrimiento Galois universal de Λ .



Como Λ tiene la propiedad (IIP) el siguiente diagrama de tipo \tilde{D}_4 es un subdiagrama convexo lleno de \tilde{Q} .

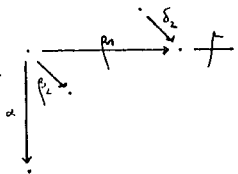


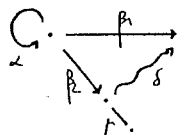
Esto prueba que Λ es de tipo de representación infinito.

IV.4 Sea Q el diagrama  y $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP).

Probaremos que Λ es de tipo de representación infinito. De manera análoga al caso anterior y de acuerdo con la Observación.4.16, basta probar que si $\beta_1\alpha = \delta_2\delta_1\beta_2$ es una relación en Λ entonces Λ es de tipo de representación infinito.

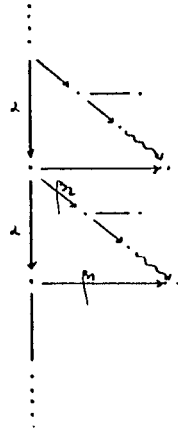
En estas condiciones el cubrimiento Galois universal de Λ está dado por un diagrama \tilde{Q} similar al del caso anterior. Mostramos a continuación un diagrama de tipo \tilde{D}_5 que puede ser elegido como subdiagrama convexo lleno de \tilde{Q} lo cual prueba que Λ es de tipo de representación infinito.



IV.5 Consideremos ahora el diagrama Q 

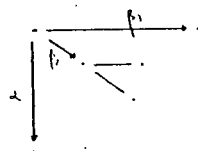
Análogamente a los casos anteriores, basta estudiar el álgebra $\Lambda = KQ / \langle \alpha^2, \beta_2\alpha, \beta_1\alpha - \delta\beta_2 \rangle$. Vamos a probar que Λ es de tipo de representación finito si y sólo si $\text{long}(\delta) = 1$.

El cubrimiento Galois universal de Λ está dado por el siguiente diagrama \tilde{Q} con relaciones.

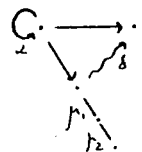


Es fácil ver que Λ es un álgebra distributiva, es decir que para todo $a, b \in \Lambda$, $\Lambda(a, b)$ es uniserial como $\Lambda(a, a) - \Lambda(b, b)$ - bimódulo. Por otro lado el cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda} = K\tilde{Q}/\tilde{I}$, de Λ , es un álgebra separada tal que para todo vértice s de \tilde{Q} , las subcategorías $K\tilde{\Lambda}_s$ y $K\tilde{\Lambda}^s$ de $\tilde{\Lambda}$ son \tilde{A} - libres. Luego, por la Proposición 3.3.6. $\tilde{\Lambda}$ es simplemente conexa y de aquí estamos en las condiciones del Criterio de Bongartz para tipo finito (Teorema 3.3.9). Se ve que se satisfacen las propiedades 2) a), b) del criterio de Bongartz y que si $long(\delta) = 1$, \tilde{Q} satisface también la condición 2)c). Luego Λ es de tipo de representación finito en este caso.

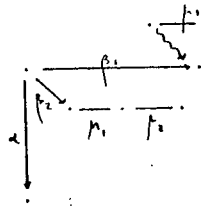
La recíproca sigue de que si $long(\delta) > 1$, digamos $\delta = \delta_2\delta_1$, entonces se puede elegir un subdiagrama convexo lleno de \tilde{Q} de tipo \tilde{D}_5 como mostramos a continuación.



Observemos que si las mismas relaciones son consideradas sobre el diagrama

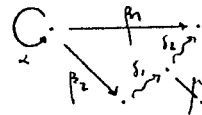


se obtiene un álgebra de tipo infinito. En efecto, su cubrimiento Galois universal se construye de manera análoga al caso anterior y contiene al siguiente diagrama de tipo \tilde{E}_7 como subdiagrama convexo lleno.



De aquí resulta que no existen álgebras con la propiedad (IIP) y de tipo finito dadas por este diagrama.

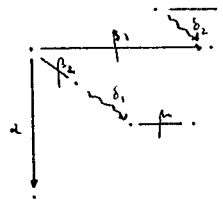
IV.6 Sea Q el diagrama



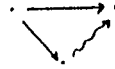
Vamos a probar que toda álgebra $\Lambda = KQ/I$ con la propiedad (IIP) es de tipo de representación infinito.

Análogamente a los casos anteriores basta probar que las relaciones $\alpha^2 = \beta_2\alpha = 0$, $\beta_1\alpha = \delta\gamma\beta_2$ definen un álgebra Λ de tipo de representación infinito.

El cubrimiento Galois universal de Λ se construye de manera análoga a los casos anteriores y es fácil ver que se puede elegir en \tilde{Q} un subdiagrama convexo lleno \tilde{Q}' de tipo \tilde{E}_7 . Tal diagrama \tilde{Q}' es un subdiagrama del siguiente diagrama.



□

Veremos a continuación que toda álgebra dada por el diagrama  con lazos en dos cualesquiera de los vértices 1, 2, ó 3 es de tipo de representación infinito.

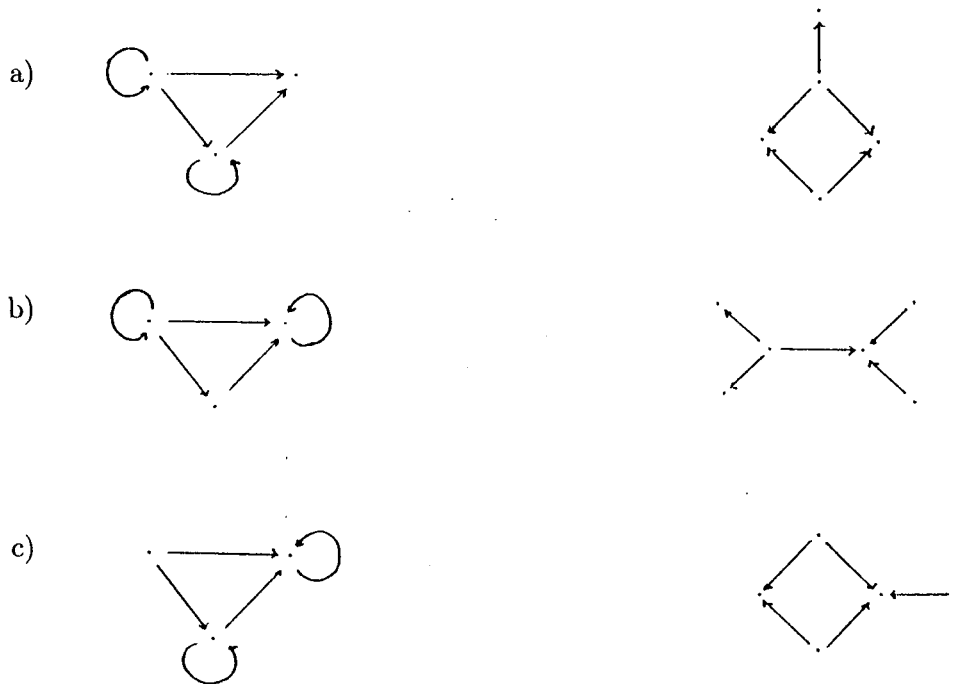
En particular resulta que no existen álgebras dadas por un tal diagrama, que satisfagan la propiedad (IIP) y sean de tipo de representación finito.

Observemos primero que si se añaden dos lazos en dos vértices cualesquiera del diagrama

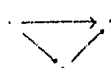
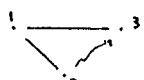
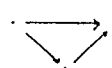


el álgebra Λ obtenida es de tipo de representación infinito. Esto sigue de que el

álgebra separada de $\Lambda/\underline{r}^2\Lambda$ es de tipo de representación infinito. En efecto:



Es un hecho conocido que si un álgebra Λ es de tipo de representación finito entonces para todo Λ -módulo proyectivo P , $End(P)$ es también de tipo de representación finito. El mismo resulta de que el funtor $Hom_{\Lambda}(P, \cdot) : mod \Lambda \rightarrow mod End(P)^{op}$ define una equivalencia entre la categoría de los módulos con una presentación en $add P$ y $mod End(P)^{op}$.

Usando este resultado y el hecho que toda álgebra dada por el diagrama  con dos lazos es de tipo de representación infinito resulta que añadiendo dos lazos en cualesquiera de los vértices 1, 2 ó 3 del diagrama  se obtiene un álgebra Λ de tipo de representación infinito. En efecto, $End_{\Lambda}(P_1 \amalg P_2 \amalg P_3)$ es un álgebra dada por el diagrama  con dos lazos.

Concluimos aquí el estudio de los casos I, II, III y IV. Probaremos a continuación un lema que será de utilidad en la demostración del Teorema principal de este capítulo.

Lema.4.19. Si Q es un diagrama de tipo A_n con 4 lazos y $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) entonces Λ es de tipo de representación infinito.

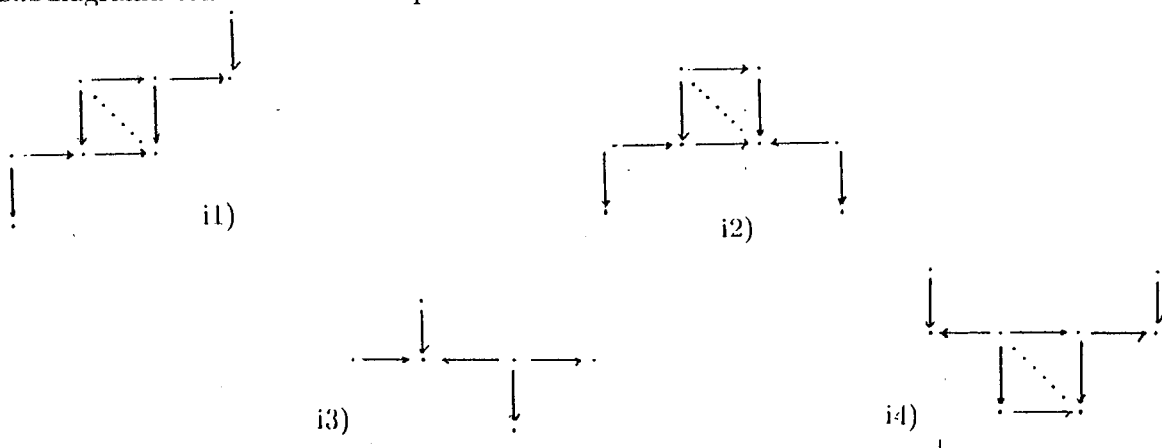
Demostración. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ los lazos de Q y supongamos que existe un cociente $\Lambda' = KQ'/I'$ de Λ tal que Q' es de la forma $\circlearrowleft_{\alpha_1} \xrightarrow{\beta_1} \circlearrowleft_{\alpha_2} \xrightarrow{\beta_2} \circlearrowleft_{\alpha_3} \xrightarrow{\beta_3} \circlearrowleft_{\alpha_4}$. Veamos que Λ' es de tipo infinito. Un simple razonamiento permite deducir que Λ' tiene la propiedad (IIP) pues Λ la tiene. Sea $S_{\Lambda'}$ el conjunto de relaciones minimales de Λ' que no sólo involucran lazos. Supongamos que todas las relaciones de $S_{\Lambda'}$ son relaciones de conmutatividad de la forma $\beta_i \alpha_j = \alpha_k \beta_i$ para algún $1 \leq i, j, k \leq 3$.

Notemos que por la Observación 4.10. no es necesario estudiar relaciones de conmutatividad de la forma $\beta_i \alpha_j^r = \alpha_k^s \beta_i$ con r y $s > 1$ pues tales relaciones siempre determinan álgebras de tipo de representación infinito.

En estas condiciones tenemos las siguientes posibilidades para el álgebra Λ' .

- i1) $\circlearrowleft_{\alpha_1} \xrightarrow{\beta_1} \circlearrowleft_{\alpha_2} \xrightarrow{\beta_2} \circlearrowleft_{\alpha_3} \xrightarrow{\beta_3} \circlearrowleft_{\alpha_4}$, $\alpha^{j_i} = 0, \beta_i \alpha_i = \alpha_{i+1} \beta_i, i = 1, 2, 3$
- i2) $\circlearrowleft_{\alpha_1} \xrightarrow{\beta_1} \circlearrowleft_{\alpha_2} \xrightarrow{\beta_2} \circlearrowleft_{\alpha_3} \xleftarrow{\beta_3} \circlearrowleft_{\alpha_4}$, $\beta_i \alpha_i = \alpha_{i+1} \beta_i, i = 1, 2, \beta_3 \alpha_4 = \alpha_3 \beta_3, \alpha^{j_i} = 0,$
 $i = 1, 2, 3$
- i3) $\circlearrowleft_{\alpha_1} \xrightarrow{\beta_1} \circlearrowleft_{\alpha_2} \xleftarrow{\beta_2} \circlearrowleft_{\alpha_3} \xrightarrow{\beta_3} \circlearrowleft_{\alpha_4}$, $\beta_1 \alpha_1 = \alpha_2 \beta_1, \beta_2 \alpha_3 = \alpha_2 \beta_2, \beta_3 \alpha_3 = \alpha_4 \beta_3, \alpha^{j_i} = 0,$
 $i = 1, 2, 3$
- i4) $\circlearrowleft_{\alpha_1} \xleftarrow{\beta_1} \circlearrowleft_{\alpha_2} \xrightarrow{\beta_2} \circlearrowleft_{\alpha_3} \xrightarrow{\beta_3} \circlearrowleft_{\alpha_4}$, $\alpha^{j_i} = 0, \beta_i \alpha_i = \alpha_{i+1} \beta_i, i = 2, 3, \beta_1 \alpha_2 = \alpha_1 \beta_1$

Para probar que en cualquiera de estos casos Λ' es de tipo infinito es suficiente mostrar un subdiagrama convexo lleno de tipo infinito del cubrimiento Galois universal $\tilde{\Lambda}' = K\tilde{Q}'/\tilde{I}'$ de Λ' .



Supongamos ahora que el conjunto $S_{\Lambda'}$ contiene alguna relación que no es de la forma $\beta \alpha = \gamma \beta$ con β una flecha y α, γ lazos. Entonces existe un cociente Λ'' de Λ' , con la propiedad (IIP) y dado

por un diagrama de tipo A_3 con 3 lazos y tal que $S_{\Lambda''}$ contiene por lo menos una relación cero. Luego, por el Lema.4.13. resulta que Λ'' y en consecuencia Λ' y Λ son de tipo de representación infinito.

Con esto hemos probado que si existe un cociente de Λ dado por un diagrama de tipo A_4 con un lazo en cada vértice entonces Λ es de tipo de representación infinito.

Supongamos que esta condición no se satisface. Entonces es posible hallar un cociente $\Lambda' = KQ'/I'$, de Λ , que también satisface la propiedad (IIP), donde Q' es un diagrama de la forma $\bigcirc_{\alpha_1} \text{---} \dots \text{---} \bigcirc_{\alpha_2} \xrightarrow{\delta} \bigcirc_{\alpha_3} \xrightarrow{\mu} \bigcirc_{\alpha_4} \text{---} \dots \text{---} \bigcirc_n$ con $k > 2$ y δ y μ una sucesión de r_δ y r_μ flechas respectivamente, r_δ y $r_\mu \geq 1$. Probemos que Λ' es de tipo de representación infinito.

Si $r_\delta \geq 2$ entonces se puede hallar un cociente Λ'' , de Λ' , con la propiedad (IIP) y dado por un diagrama de la forma $\text{---} \bigcirc_{\alpha_2} \text{---} \dots \text{---} \bigcirc_{\alpha_3} \text{---}$. Por lo visto en II.1.10, Λ'' es de tipo infinito y de aquí, también lo son Λ' y Λ .

Análogamente, si $r_\mu \geq 2$ entonces se puede hallar un cociente Λ'' de Λ' , que también satisface la propiedad (IIP), dado por un diagrama de la forma $\text{---} \text{---} \bigcirc_{\alpha_2} \rightsquigarrow \bigcirc_{\alpha_3} \text{---} \text{---}$. Sigue de los resultados obtenidos en II.1.7, II.1.8, II.1.9 y II.1.10 que Λ'' , y de aquí Λ' , son de tipo de representación infinito.

Consideremos por último el caso $r_\delta = r_\mu = 1$, esto es, Q' es un diagrama del tipo $\bigcirc_{\alpha_1} \text{---} \dots \text{---} \bigcirc_{\alpha_2} \xrightarrow{\delta} \bigcirc_{\alpha_3} \xrightarrow{\mu} \dots \xrightarrow{m} \bigcirc_{\alpha_{4n}}$, $n > 4$. Sea $\Lambda'' = \Lambda' / \langle \alpha_1 \rangle$. Esta álgebra tiene la propiedad (IIP) y fue estudiada en III.4 donde se probó que es de tipo de representación infinito. Luego Λ' y Λ son de tipo de representación infinito, lo cual termina la demostración del lema. \square

Estamos en condiciones ahora de probar el resultado principal de este capítulo. En él se da la lista de todas las álgebras básicas, conexas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K , con la propiedad (IIP) y de tipo de representación finito.

Teorema 4.20. Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces toda K - álgebra básica, conexa Λ con la propiedad (IIP) y de tipo de representación finito es isomorfa al álgebra de caminos de uno de los siguientes diagramas con relaciones.

1) Un diagrama de Dynkin sin relaciones.

2) $\underset{\alpha}{\circlearrowleft}, \quad \alpha^i = 0$

3) $\underset{\alpha}{\circlearrowleft} 1 \xrightarrow{\beta} \dots \text{---} n, \quad n \geq 2$

a) $\alpha^i = 0, \quad \begin{cases} i) & n = 2, i = 2, 3 \\ ii) & n > 2, i = 2 \end{cases}$

b) $\alpha^i = \beta\alpha = 0, \quad \forall i, n.$

c) $\alpha^i = \beta\alpha^2 = 0, \quad \begin{cases} i) & n = 2, i = 3, 4, 5 \\ ii) & n = i = 3 \end{cases}$

4) $\underset{\alpha}{\circlearrowleft} 1 \leftarrow \dots \text{---} n, \quad \alpha^i = 0, \quad \begin{cases} i) & n = 2, i = 2, 3 \\ ii) & n > 2, i = 2 \end{cases}$

5) $1 \xleftarrow{\beta} \underset{\alpha}{\circlearrowleft} \leftarrow \dots \text{---} n, \quad \alpha^2 = \beta\alpha = 0, \quad \forall n \leq 4.$

6) $1 \rightarrow \underset{\alpha}{\circlearrowleft} \xrightarrow{\beta} \dots \text{---} n, \quad \alpha^2 = \beta\alpha = 0, \quad \forall n \leq 6$

7) $1 \xleftarrow{\beta_1} \underset{\alpha}{\circlearrowleft} \xrightarrow{\beta_2} \dots \text{---} n$

a) $\alpha^2 = \beta_1\alpha = 0, \quad n \leq 4.$

b) $\alpha^2 = \beta_2\alpha = 0, \quad n \leq 6$

c) $\alpha^i = \beta_1\alpha = \beta_2\alpha = 0, \quad \begin{cases} i) & i = 2, \forall n \\ ii) & n = 3, \forall i \\ iii) & n = 4, i \leq 5 \\ iv) & n = 5, 6, i \leq 3 \end{cases}$

8) $1 \text{---} \xleftarrow{\beta_1} \underset{\alpha}{\circlearrowleft} \xrightarrow{\beta_2} \dots \text{---} n, \quad \alpha^2 = \beta_1\alpha = \beta_2\alpha = 0, \quad n \leq 7$

$$9) \quad \bigcirc_{\alpha} \xrightarrow{\beta} | \dots -_n, \quad 3 \leq n < 7, \quad \alpha^i = \beta\alpha = 0, \quad \begin{cases} i) & n=3, \forall i \\ ii) & n=4, i \leq 4 \\ iii) & n=5, i=2 \end{cases}$$

$$10) \quad -| \dots \xleftarrow{\beta} {}_n \bigcirc_{\alpha}, \quad \alpha^i = \beta\alpha = 0, \quad \forall i$$

$$11) \quad \bigcirc_{\alpha} \xrightarrow{\beta} -| \dots -_{p-1}, \quad \alpha^i = \beta\alpha = 0, \quad \begin{cases} p=6, i \leq 3 \\ p=7, i=2 \end{cases}$$

$$12) \quad - - | - - \xleftarrow{\beta} \bigcirc_{\alpha}, \quad \alpha^2 = \beta\alpha = 0$$

$$13) \quad \bigcirc_{\alpha} \xrightarrow{\beta} \bigcirc_{\gamma}$$

$$a) \quad \alpha^i = \beta\alpha = \gamma^2 = 0, \quad \forall i$$

$$b) \quad \alpha^i = \gamma^j = 0, \quad \beta\alpha = \gamma\beta, \quad \begin{cases} j=2, \quad \forall i \\ j=3, \quad i=3,4,5 \end{cases}$$

$$c) \quad \alpha^2 = \gamma^3 = 0, \quad \beta\alpha = \gamma^2\beta$$

$$14) \quad \bigcirc_{\alpha} \xrightarrow{\beta} \bigcirc_{\gamma} \xrightarrow{\delta} \dots -_n, \quad n \geq 3$$

$$a) \quad \alpha^2 = \gamma^2 = \beta\alpha = \gamma\beta = 0, \quad n=3$$

$$b) \quad \alpha^2 = \gamma^2 = 0, \quad \beta\alpha = \gamma\beta, \quad n=3$$

$$c) \quad \alpha^i = \gamma^j = \delta\gamma = 0, \quad \beta\alpha = \gamma\beta, \quad \begin{cases} i) & n=3, \quad \begin{cases} j=2, i \leq 5 \\ i=j=3 \end{cases} \\ ii) & n>3, \quad \begin{cases} i=j=2 \\ i=3, j \leq 3, n < 6 \end{cases} \end{cases}$$

$$15) \quad \bigcirc_{\alpha} \xrightarrow{\beta} \bigcirc_{\gamma} \leftarrow, \quad \alpha^2 = \gamma^2 = 0, \quad \beta\alpha = \gamma\beta$$

$$16) \quad \bigcirc_{\alpha} \xleftarrow{\beta} \bigcirc_{\gamma} \leftarrow, \quad \alpha^2 = \gamma^2 = 0, \quad \beta\gamma = \alpha\beta$$

$$17) \quad \bigcirc_{\alpha} \xleftarrow{\beta_1} \bigcirc_{\gamma} \xrightarrow{\beta_2} \dots -_n, \quad n \geq 3$$

$$a) \quad \alpha^i = \gamma^j = 0, \quad \beta_1\gamma = \alpha\beta_1, \quad \beta_2\gamma = 0 \text{ con } \begin{cases} n=3, \quad \begin{cases} i=2, j \leq 5 \\ i=j=3 \end{cases} \\ 3 < n < 7, \quad i=j=2 \end{cases}$$

$$b) \quad \alpha^2 = \gamma^2 = 0, \quad \beta_1\gamma = \alpha\beta_1, \quad n=3.$$

$$18) \quad 1 \text{ --- } \dots \xleftarrow{\beta_1} \bigcirc_{\alpha}^k \xrightarrow{\beta_2} \bigcirc_{\gamma} \xleftarrow{\beta_3} \dots \text{ --- } n, \quad n \geq 4, k \geq 2 \text{ con}$$

$$\alpha^2 = \gamma^2 = \beta_1 \alpha = \beta_3 \gamma = 0, \quad \beta_2 \alpha = \gamma \beta_2, \quad \begin{cases} k = 2, & \forall n \\ k > 2, & n = 4, 5 \end{cases}$$

$$19) \quad 1 \text{ --- } \dots \xleftarrow{\beta_1} \bigcirc_{\alpha}^k \xrightarrow{\beta_2} \bigcirc_{\gamma} \xleftarrow{\beta_3} \dots \text{ --- } n, \quad \text{con}$$

$$\alpha^2 = \gamma^2 = \beta_1 \alpha = 0, \quad \beta_2 \alpha = \gamma \beta_2, \quad \begin{cases} n = k + 2 < 6 \\ n = k + 3 < 5 \\ n = k + 4 < 6 \end{cases}$$

$$20) \quad \bigcirc_{\alpha}^1 \xrightarrow{\beta} \dots \rightarrow \bigcirc_{\gamma}^n, \quad \alpha^i = \beta \alpha = \gamma^2 = 0, \quad \forall i, n$$

$$21) \quad \bigcirc_{\alpha}^1 \xrightarrow{\beta_1} \dots \xleftarrow{\beta_2} \bigcirc_{\gamma}^n$$

$$a) \quad \alpha^i = \beta_1 \alpha = \gamma^2 = 0, \quad \forall i$$

$$b) \quad \alpha^i = \beta_1 \alpha = \beta_2 \gamma = \gamma^j = 0, \quad \forall i, j$$

$$22) \quad \bigcirc_{\alpha}^1 \xrightarrow{\beta} \dots \xleftarrow{\delta_1} \bigcirc_k \xrightarrow{\delta_2} \dots \text{ --- } n, \quad 3 \leq k < n$$

$$a) \quad \alpha^i = \gamma^2 = \beta \alpha = \delta_1 \gamma = 0, \quad n = k + 1, \quad \begin{cases} n = 4, i = 2, 3 \\ n = 5, i = 2 \end{cases}$$

$$b) \quad \alpha^i = \gamma^j = \beta \alpha = \delta_1 \gamma = \delta_2 \gamma = 0, \quad n = k + 1, \quad \begin{cases} i) & n = 4, \quad \begin{cases} \forall i, j = 2 \\ i = 2, 3, j = 3 \end{cases} \\ ii) & n = 5, i = 2, j = 3 \\ iii) & n > 5, j = 2, \forall i \end{cases}$$

$$n = k + 2, \quad \begin{cases} i) & k = 3, 4, i = 2, j = 2 \\ ii) & k = i = 3 \end{cases}$$

$$23) \quad \bigcirc_{\alpha} \xrightarrow{\beta_1} \dots \xleftarrow{\beta_2} \bigcirc_{\gamma} \leftarrow \dots \text{ --- } n, \quad \alpha^i = \beta_1 \alpha = \beta_2 \gamma = \gamma^2 = 0, \quad \begin{cases} i) & n = 4, i \leq 3 \\ ii) & n = 5, i = 2 \end{cases}$$

$$24) \quad \bigcirc_{\alpha}^1 \xrightarrow{\beta} 1 \text{ --- } \dots \xleftarrow{\delta} \bigcirc_{\gamma}^n, \quad \alpha^i = \gamma^j = \beta \alpha = \delta \gamma = 0$$

$$i) \quad n = 3, \quad \begin{cases} i = 2, j \leq 4 \\ i = 3, 4, j = 2 \end{cases}$$

$$ii) \quad n = 4, i = 2, j \leq 3$$

$$iii) \quad n = 5, i = j = 2$$

$$25) \quad \circlearrowleft_{\alpha} \xrightarrow{\beta_1} \circlearrowleft_{\gamma} \xrightarrow{\beta_2} \circlearrowleft_{\delta}, \quad \alpha^i = \gamma^j = \delta^k = 0, \beta_1\alpha = \gamma\beta_1, \beta_2\gamma = \delta\beta_2, \quad \begin{cases} i) & i = j = k = 2 \\ ii) & i = 3, j = 2, 3, k = 2 \end{cases}$$

$$26) \quad \circlearrowleft_{\alpha} \xrightarrow{\beta_1} \circlearrowleft_{\gamma} \xleftarrow{\beta_2} \circlearrowleft_{\delta}, \quad \alpha^i = \gamma^j = \delta^k = 0, \beta_1\alpha = \gamma\beta_1, \beta_2\delta = \gamma\beta_2, \quad \begin{cases} i) & i = j = 2, k = 2, 3 \\ ii) & i = 3, j = k = 2 \end{cases}$$

$$27) \quad \circlearrowleft_{\alpha} \xleftarrow{\beta_1} \circlearrowleft_{\gamma} \xrightarrow{\beta_2} \circlearrowleft_{\delta}, \quad \alpha^2 = \gamma^2 = \delta^2 = 0, \beta_1\gamma = \alpha\beta_1, \beta_2\gamma = \delta\beta_2$$

$$28) \quad \circlearrowleft_{\alpha} \xrightarrow{\beta_1} \dots \xleftarrow{\beta_2} \circlearrowleft_{\gamma} \xrightarrow{\beta_3} \circlearrowleft_{\delta}, \quad \alpha^i = \gamma^2 = \delta^2 = \beta_1\alpha = \beta_2\gamma = 0, \beta_3\gamma = \delta\beta_3, \quad \begin{cases} k = 3, i = 2, 3 \\ k = 4, i = 2 \end{cases}$$

$$29) \quad \circlearrowleft_{\alpha} \xrightarrow{\beta_1} \circlearrowleft_{\gamma} \xrightarrow{\beta_2} \circlearrowleft_{\delta} \xrightarrow{\beta_3}, \quad \alpha^2 = \gamma^2 = \delta^2 = \beta_3\delta = 0, \beta_1\alpha = \gamma\beta_1, \beta_2\gamma = \delta\beta_2$$



$$30) \quad \circlearrowleft_{\alpha} \xleftarrow{\beta_1} \circlearrowleft_{\gamma} \xrightarrow{\beta_2} \circlearrowleft_{\delta} \xrightarrow{\beta_3}, \quad \alpha^2 = \gamma^2 = \delta^2 = 0, \beta_3\delta = 0, \beta_1\gamma = \alpha\beta_1, \beta_2\gamma = \delta\beta_2$$

$$31) \quad \circlearrowleft_{\alpha} \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_1} \\ \searrow \beta_2 \\ \nearrow \delta \end{array}, \quad \alpha^i = \beta_2\alpha = 0, \beta_1\alpha = \delta\beta_2, \quad \begin{cases} i) & i = 2, 3, \text{long}(\delta) = 1 \\ ii) & i = 2, \text{long}(\delta) = 2 \end{cases}$$


$$32) \quad \circlearrowleft_{\alpha} \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_1} \\ \searrow \beta_2 \\ \nearrow \delta \end{array}, \quad \alpha^2 = \beta_2\alpha = 0, \beta_1\alpha = \delta\beta_2$$


Demostración. Los cálculos hechos en I, II, III y IV prueban que todas las álgebras de esta lista satisfacen la propiedad (IIP) y son de tipo de representación finito. Veamos ahora que la lista está completa. Para ello probemos que si Q es un diagrama que no fue estudiado en I, II, III ó IV y $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP) entonces Λ es de tipo de representación infinito.

Si Q no es un diagrama de los estudiados en I, II, III ó IV, entonces Q se puede construir agregando lazos a un diagrama Q' de un álgebra hereditaria, donde una de las siguientes condiciones se satisface:

- Q' no es un diagrama de Dynkin y no contiene al diagrama  como subdiagrama.
- Q' contiene al diagrama  como subdiagrama, pero no como subdiagrama convexo.
- Q' es un diagrama de Dynkin y Q es un diagrama con más de 3 lazos.

Si estamos en el caso a), es decir, Q' no es un diagrama de Dynkin y no contiene al diagrama

 como subdiagrama, sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ los lazos de Q . Supongamos que I es un ideal admisible de KQ tal que $\Lambda = KQ/I$ tiene la propiedad (IIP).

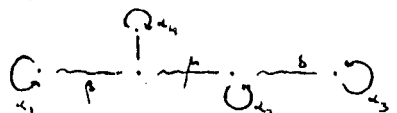
De la hipótesis resulta que en la expresión de los generadores de I , dada en el Teorema 1.4 cada sumando pertenece al ideal $J = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ generado por todos los lazos de Q . En efecto, un tal sumando es de la forma $\gamma\beta a$, donde β es una flecha, a un monomio en lazos y γ es una combinación lineal de caminos. Como Q' no contiene a  como subdiagrama resulta que γ es un polinomio en lazos en el punto final de β y por lo tanto pertenece a J , ó γ es una constante de K . Claramente si a es no trivial, el sumando $\gamma\beta a$ pertenece a J . Si a es el monomio trivial entonces como I es un ideal admisible resulta que $\gamma \in \underline{r} \Lambda$ y por lo tanto $\gamma \in J$. Se tiene entonces $I \subseteq J$. Luego, el álgebra $\Lambda' = KQ/J \simeq KQ'$ es un cociente de Λ de donde resulta que Λ es de tipo de representación infinito porque Λ' lo es.

Sea ahora Q' como en b). En este caso $KQ'/\underline{r}^2(KQ')$ es de tipo de representación infinito como puede verse considerando el álgebra separada.

Supongamos ahora que Q' es un diagrama como en c) y que $\Lambda = KQ/I$ satisface la propiedad (IIP). Haciendo un sencillo análisis se ve que existe un cociente $\Lambda_1 = KQ_1/I_1$ de Λ , también con la propiedad (IIP), donde Q_1 es uno de los siguientes diagramas.

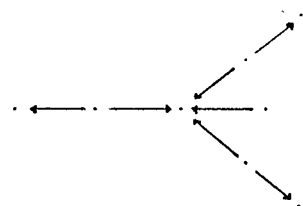
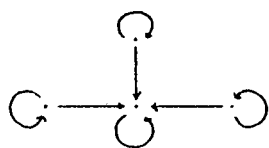
i) Un diagrama de Dynkin de tipo A_n con 4 lazos.

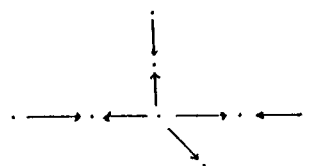
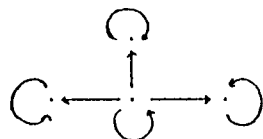
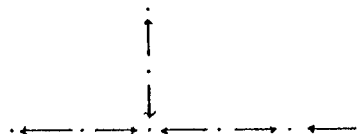
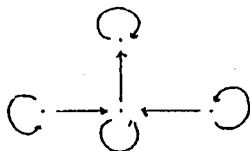
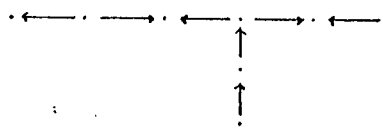
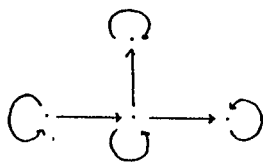
ii)  con δ un paseo.

iii)  con β, δ, μ paseos.

Veamos que Λ_1 es de tipo infinito, con lo que quedará demostrado que Λ lo es.

El caso i) fue estudiado en el Lema.4.19 Supongamos Q_1 como en ii). Si δ es un camino de longitud 1, es decir una flecha, el álgebra separada de $KQ_1/\underline{r}(KQ_1)$ es de tipo de representación infinito de donde resulta que Λ_1 también lo es. En efecto:





Supongamos δ de longitud mayor que 1, digamos $\delta = \delta_2 \delta_1$ con δ_1 una flecha y δ_2 un camino de longitud por lo menos 1. Entonces el cociente $\Lambda' = \Lambda_1 / \Lambda_1 (e_{e(\delta_1)} + e_{e(\delta_1)+1} + \dots + e_n) \Lambda_1$ tiene la propiedad (IIP) y es el álgebra dada en a) del Lema.4.17.

Finalmente si Q_1 es el diagrama de iii) existe un cociente $\Lambda_2 = KQ_2 / I_2$ de Λ_1 , que también satisface la propiedad (IIP), con Q_2 como en b) del Lema.4.17. lo que completa la demostración del teorema. \square

Capítulo II

COHOMOLOGIA DE HOCHSCHILD DE EXTENSIONES LOCALES

Los grupos de cohomología de Hochschild $H^i(B, X)$ con $i \geq 0$, notados $H^i(B)$ si $X = B$, para una K -álgebra B y un $B - B$ -bimódulo X , fueron introducidos por Hochschild y si $i \leq 2$ tienen una interpretación concreta de estructuras algebraicas clásicas como derivaciones y extensiones. Por otro lado, es conocido que $H^2(B)$ controla la teoría de deformaciones de B . Se sabe que si $H^2(B) = 0$ entonces B es rígida.

Para una K -álgebra A y un A -módulo finitamente generado M , Ringel define la extensión por un punto de A por M como el anillo de matrices triangulares $\begin{pmatrix} K & 0 \\ M & A \end{pmatrix}$. Generalizando esta noción, J. A de la Peña y M. Martins definen para dos K -álgebras A y R , R local y M un $A - R$ -bimódulo finitamente generado, la extensión local de A por M como el álgebra de matrices triangulares $\begin{pmatrix} R & 0 \\ {}_A M_R & A \end{pmatrix}$. Las álgebras Λ que satisfacen la propiedad (IIP) y fueron objeto de estudio en el capítulo I, son ejemplos de extensiones locales de otras álgebras que tienen la misma propiedad. Más aún, toda álgebra Λ con la propiedad (IIP) se puede obtener a partir de un anillo local por sucesivas extensiones locales.

En general, el cálculo por definición de los grupos de cohomología de Hochschild de un álgebra B dada presenta dificultades. Para el caso en que B es la extensión por un punto de un álgebra A por un A -módulo M , existe un importante resultado probado por D. Happel en [H], que da una sucesión exacta larga de K -espacios vectoriales conectando los grupos $H^i(B)$, $H^i(A)$ y $Ext_A^i(M, M)$. En muchas ocasiones esta sucesión permite hacer argumentos inductivos o iterativos resultando de gran utilidad.

Motivadas por obtener información acerca de la cohomología de Hochschild de álgebras que satisfacen la propiedad (IIP) estudiamos la cohomología de Hochschild de extensiones locales.

Dedicamos este capítulo a dicho estudio. El mismo está dividido en cuatro secciones cuyo contenido resumimos a continuación.

En la primera sección describimos el producto tensorial de dos álgebras finitamente generadas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K como el álgebra de caminos de un diagrama con relaciones. Si bien la descripción, en principio parece complicada, nos permitió hacer ejemplos y resultó esencial para encontrar ciertas resoluciones proyectivas e inyectivas necesarias para demostrar nuestros resultados.

En la sección 2 damos la definición de los grupos de cohomología de Hochschild $H^i(B, X)$ para una K -álgebra B y un $B - B$ -bimódulo X . Siendo K un cuerpo, $H^i(B, X)$ coincide con $Ext_{B \otimes_K B^{op}}^i(B, X)$ donde B^{op} es el anillo opuesto de B . Recordamos también la interpretación de $H^i(B) = H^i(B, B)$ para $i = 0, 1$.

La sección 3 está dedicada al estudio de la cohomología de Hochschild de extensiones locales. El teorema principal de esta sección da una sucesión exacta larga que conecta la cohomología de Hochschild de A , la de la extensión local $\begin{pmatrix} R & 0 \\ M & A \end{pmatrix}$ y los grupos $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e)$ donde P_e es el B -módulo proyectivo indescomponible correspondiente al idempotente $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de B . El mismo generaliza al resultado de Happel mencionarlo.

Para que esta sucesión resulte útil es necesario calcular los grupos $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e)$ lo cual en general no es sencillo. En el caso de extensiones por un punto, los mismos coinciden con los grupos $Ext_A^i(M, M)$ que tienen la ventaja de que los módulos involucrados en su cálculo son módulos sobre el anillo A . En el caso general, trabajar con módulos sobre el anillo $B \otimes_K R^{op}$ se torna más complicado. Es aquí donde nos presta utilidad la descripción del álgebra de caminos de un producto tensorial dada en la sección 1.

Probamos además en esta sección la existencia de otra sucesión exacta larga que conecta los grupos de cohomología $H^i(R)$ del anillo local R y los grupos $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e)$ y $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, M)$. Incluimos también un ejemplo en el que calculamos la cohomología de Hochschild de una de las álgebras estudiadas en el primer capítulo y para la cual no es posible usar el resultado de Happel.

Finalmente, en la sección 4 aplicamos los resultados obtenidos al caso particular en que B es una extensión local, $B = \begin{pmatrix} R & 0 \\ M & A \end{pmatrix} = KQ_B/I$ satisfaciendo las condiciones:

- i) Q_B tiene un único lazo α en el vértice e y $R = K[\alpha] / \langle \alpha^i \rangle$, $i > 1$.

- ii) Si β_1, \dots, β_n son todas la flechas de Q_B con origen en e que no son lazos, entonces el ideal I está generado por relaciones que no involucran a las flechas β_1, \dots, β_n .

Probamos en este caso que los grupos $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^j(R, P_e)$ que aparecen en la primera sucesión exacta larga mencionada, coinciden con $H^j(R) \forall j \geq 2$. Ahora bien, dado que R es el cociente del anillo de polinomios $K[x]$ por el ideal generado por x^i , los grupos $H^j(R)$ son conocidos.

Por otro lado, hay una clásica $R \otimes_K R^{op}$ - resolución proyectiva de R que nos sirvió de inspiración para construir, en nuestro caso, una $B \otimes_K R^{op}$ - resolución proyectiva de R . Utilizando la misma probamos que los grupos $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^j(R, M)$ son nulos para todo $j \geq 1$ de donde resultó, usando la segunda sucesión exacta mencionada arriba, que $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^j(R, P_e) \simeq H^j(R), \forall j \geq 2$.

Probamos entonces que la primera sucesión exacta larga obtenida es de la forma:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(B) \rightarrow H(A) \rightarrow Ext_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) \rightarrow H^1(B) \rightarrow H^1(A) \rightarrow H^2(R) \rightarrow \dots \\ \rightarrow H^j(B) \rightarrow H^j(A) \rightarrow H^{j+1}(R) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

conectando directamente la cohomología de Hochschild de los anillos A , B y R . Mostramos además que el K - espacio vectorial $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e)$ tiene dimensión $1 + (n - 1)dim_K R$ donde n es el número de flechas que no son lazos con origen en el vértice e de Q_B .

Para terminar calculamos los grupos $H^n(B)$ cuando B satisface las condiciones i) y ii) de arriba y $H^j(A) = 0 \forall j \geq 1$.

Para hacer este capítulo más autocontenido, recordaremos algunas definiciones y notaciones fijadas en el capítulo I.

Toda álgebra Λ considerada aquí es isomorfa a un cociente KQ_Λ/I de un álgebra de caminos KQ_Λ , con Q_Λ un diagrama finito y conexo, por un ideal admisible I . Recordemos que I es un ideal admisible de Λ si para algún entero n , $r^n\Lambda \subseteq I \subseteq r^2\Lambda$, donde $r\Lambda$ denota el ideal bilátero de KQ_Λ/I generado por todas las flechas de Q_Λ .

Para un diagrama $Q = (Q_0, Q_1)$ dado, con Q_0, Q_1 el conjunto de vértices y flechas de Q respectivamente, denotamos con $s : Q_1 \rightarrow Q_0$ y $e : Q_1 \rightarrow Q_0$ a las aplicaciones definidas por $s(\alpha) = i, e(\alpha) = j$ para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$. Un lazo α es una flecha tal que $s(\alpha) = e(\alpha)$. Un camino no trivial α en Q es una sucesión de flechas $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1$ con $e(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1}), i = 1, \dots, n-1$.

Todos los módulos aquí son módulos finitamente generados a izquierda y para un Λ -módulo M , $add M$ es la subcategoría llena de $mod \Lambda$ que consiste de todas las sumas finitas de sumandos de M .

Dada un álgebra $\Lambda = KQ_\Lambda/I$, para cada vértice i de $(Q_\Lambda)_0$ notamos con S_i al Λ -módulo simple asociado a i y con P_i e I_i a las cápsulas proyectiva e inyectiva de S_i respectivamente. Si e_i es el elemento idempotente de Λ correspondiente al vértice i entonces $P_i = \Lambda e_i$. Algunas veces escribimos P_{e_i} para referirnos a P_i .

Si Q_Λ es un diagrama finito con vértices $1, \dots, n$, para cada Λ -módulo proyectivo indescomponible P_i notamos \widehat{P}_i a la suma $\prod_{j \neq i}^n P_j$.

Para un par de Λ -módulos X, Y indicamos con $\tau_X Y$ a la traza de X en Y , es decir al submódulo de Y generado por todas las imágenes homomórficas de X en Y . El Λ -módulo $\tau_X Y$ tiene una estructura de $End Y$ -módulo definiendo para $h \in End Y$ y $x = \sum_{i=1}^m f_i(x_i) \in \tau_X Y$, con $f_i : X \rightarrow Y, \forall i :$

$$h.x = \sum_{i=1}^m h f_i(x_i),$$

con la cual resulta un $\Lambda - (End Y)^{op}$ -bimódulo.

Notamos con Λ^e al álgebra envolvente de Λ , esto es $\Lambda^e = \Lambda \otimes_K \Lambda^{op}$, y para cada elemento $\lambda \in \Lambda$ indicamos con λ^o al correspondiente elemento de Λ^{op} .

1. PRODUCTO TENSORIAL DE K - ALGEBRAS COMO ALGEBRA DE CAMINOS DE UN DIAGRAMA CON RELACIONES

Sean $\Lambda = KQ/I$ y $\Lambda' = KQ'/I'$ K -álgebras finitamente generadas. Entonces $\Lambda \otimes_K \Lambda'$ es una K -álgebra finitamente generada y por lo tanto es isomorfa al álgebra de caminos de un cierto diagrama finito y conexo con relaciones. Digamos $\Lambda \otimes_K \Lambda' \simeq KQ_{\Lambda \otimes_K \Lambda'}/I_{\Lambda \otimes_K \Lambda'}$.

Describiremos aquí el diagrama ordinario $Q_{\Lambda \otimes_K \Lambda'}$ de $\Lambda \otimes_K \Lambda'$ y el ideal de las relaciones $I_{\Lambda \otimes_K \Lambda'}$. Esta descripción será de gran utilidad en las secciones siguientes para realizar ejemplos. En ocasiones será necesario calcular, por ejemplo, resoluciones proyectivas de $\Lambda \otimes_K \Lambda'$ -módulos para ciertas álgebras Λ y Λ' y esta descripción facilita los cálculos.

En toda esta sección $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \Lambda$ y $\{e'_1, \dots, e'_m\} \subseteq \Lambda'$ denotarán conjuntos completos de idempotentes ortogonales primitivos de Λ y Λ' respectivamente.

Notaremos con $\prod_n(K)$ a la K -álgebra que como anillo es $K \times \dots \times K$, el producto de K consigo mismo n veces, y la estructura de K -álgebra está dada por el morfismo de anillos $x \rightarrow (x, \dots, x)$, $\forall x \in K$.

Comenzamos con un resultado conocido que da un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de $\Lambda \otimes_K \Lambda'$ y en consecuencia determina el cardinal del conjunto de vértices $(Q_{\Lambda \otimes_K \Lambda'})_0$.

Lema 1.1. Sean $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \Lambda$ y $\{e'_1, \dots, e'_m\} \subseteq \Lambda'$ conjuntos completos de idempotentes ortogonales primitivos de Λ y Λ' respectivamente. Entonces $\{e_i \otimes e'_j\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de $\Lambda \otimes_K \Lambda'$.

Demostración. Claramente $\{e_i \otimes e'_j\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales de $\Lambda \otimes_K \Lambda'$. Resta ver entonces que los $e_i \otimes e'_j$ son idempotentes primitivos.

En la demostración del lema siguiente se probará, entre otras cosas, que $\Lambda \otimes_K \Lambda' / \mathcal{I}(\Lambda \otimes_K \Lambda') \simeq \prod_{nm} (K)$ como K -álgebras. Luego, el número de $\Lambda \otimes_K \Lambda'$ -módulos simples no isomorfos es nm y por lo tanto los elementos $e_i \otimes e'_j$ son idempotentes primitivos. \square

Del lema anterior resulta que existe un vértice $v_{e_i \otimes e'_j}$ en $Q_{\Lambda \otimes_K \Lambda'}$ por cada idempotente primitivo

$e_i \otimes e'_j$ de $\Lambda \otimes_K \Lambda'$.

Veremos a continuación cuál es el conjunto de flechas $(Q_{\Lambda \otimes_K \Lambda'})_1$. Sabemos que por cada par de vértices $v_{e_i \otimes e'_j}, v_{e_s \otimes e'_t}$ de $(Q_{\Lambda \otimes_K \Lambda'})_0$ existen tantas flechas $v_{e_i \otimes e'_j} \longrightarrow v_{e_s \otimes e'_t}$ como $\dim_K [(e_s \otimes e'_t) \underline{r}(\Lambda \otimes_K \Lambda') / \underline{r}^2(\Lambda \otimes_K \Lambda') (e_i \otimes e'_j)]$.

Los próximos lemas describen a los $(\Lambda \otimes_K \Lambda')$ -módulos $\underline{r}(\Lambda \otimes_K \Lambda')$ y $\underline{r}(\Lambda \otimes_K \Lambda') / \underline{r}^2(\Lambda \otimes_K \Lambda')$.

Lema 1.2. $\underline{r}(\Lambda \otimes_K \Lambda') = \underline{r}\Lambda \otimes_K \Lambda' + \Lambda \otimes_K \underline{r}\Lambda'$.

Demostración. Usando que $\underline{r}\Lambda$ y $\underline{r}\Lambda'$ son ideales biláteros nilpotentes de Λ y Λ' respectivamente, no es difícil ver que $\underline{r}\Lambda \otimes_K \Lambda' + \Lambda \otimes_K \underline{r}\Lambda'$ es un ideal bilátero nilpotente de $\Lambda \otimes_K \Lambda'$. Basta probar entonces que $\Lambda \otimes_K \Lambda' / (\underline{r}\Lambda \otimes_K \Lambda' + \Lambda \otimes_K \underline{r}\Lambda')$ es un anillo semisimple.

Dado que $\Lambda / \underline{r}\Lambda \otimes_K \Lambda' / \underline{r}\Lambda' \simeq \prod_n (K) \otimes_K \prod_m (K) \simeq \prod_{n,m} (K)$ como K -álgebras se tiene que $\Lambda / \underline{r}\Lambda \otimes_K \Lambda' / \underline{r}\Lambda'$ es un anillo semisimple.

De aquí, para probar el lema basta definir un epimorfismo de K -álgebras

$\pi : \Lambda \otimes_K \Lambda' \longrightarrow \Lambda / \underline{r}\Lambda \otimes_K \Lambda' / \underline{r}\Lambda'$ tal que $\ker \pi = \underline{r}\Lambda \otimes_K \Lambda' + \Lambda \otimes_K \underline{r}\Lambda'$. Para $\lambda \otimes \lambda' \in \Lambda \otimes_K \Lambda'$ definimos

$$\pi(\lambda \otimes \lambda') = \bar{\lambda} \otimes \bar{\lambda}'$$

donde $\bar{\lambda}$ indica la clase de λ módulo $\underline{r}\Lambda$ y análogamente $\bar{\lambda}'$ indica la clase de λ' módulo $\underline{r}\Lambda'$.

Es claro que π es un epimorfismo de K -álgebras. Veamos que $\ker \pi = \underline{r}\Lambda \otimes_K \Lambda' + \Lambda \otimes_K \underline{r}\Lambda'$.

Es suficiente probar que $\underline{r}\Lambda \otimes_K \Lambda' + \Lambda \otimes_K \underline{r}\Lambda' \supseteq \ker \pi$ pues la otra inclusión es trivial. Sea

$\mathcal{B}_1 = \{r_1, \dots, r_s\}$ una K -base de $\underline{r}\Lambda$. Extendemos \mathcal{B}_1 a una K -base

$\mathcal{B} = \{r_1, \dots, r_s, b_{s+1}, \dots, b_t\}$ de Λ . Elegimos de manera análoga una K -base \mathcal{B}' de Λ' ,

$\mathcal{B}' = \{r'_1, \dots, r'_l, b'_{l+1}, \dots, b'_m\}$ tal que $\{r'_1, \dots, r'_l\}$ es una K -base de $\underline{r}\Lambda'$. Entonces

$\mathcal{B}_{\Lambda \otimes \Lambda'} = \{r_i \otimes r'_j\} \cup \{r_i \otimes b'_j\} \cup \{b_i \otimes r'_j\} \cup \{b_i \otimes b'_j\}$ es una K -base de $\Lambda \otimes_K \Lambda'$.

Sea $x \in \ker \pi$ y supongamos que x tiene una expresión

$$x = \sum_{i,j} k_{ij} (r_i \otimes r'_j) + \sum_{i,j} k'_{ij} (r_i \otimes b'_j) + \sum_{i,j} k''_{ij} (b_i \otimes r'_j) + \sum_{i,j} k'''_{ij} (b_i \otimes b'_j)$$

en la base $\mathcal{B}_{\Lambda \otimes \Lambda'}$.

Luego $0 = \pi(x) = \sum_{i,j} k'''_{ij} (\bar{b}_i \otimes \bar{b}'_j)$ y de aquí, $k'''_{ij} = 0$ para todo i, j pues $\{\bar{b}_i \otimes \bar{b}'_j\}$ es una K -base de $\Lambda / \underline{r}\Lambda \otimes_K \Lambda' / \underline{r}\Lambda'$. Se tiene entonces que $x \in \underline{r}\Lambda \otimes_K \Lambda' + \Lambda \otimes_K \underline{r}\Lambda'$ lo cual completa la demostración del lema. \square

Como consecuencia inmediata del Lema anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.3. $\underline{r}^2(\Lambda \otimes_K \Lambda') = \underline{r}^2 \Lambda \otimes_K \Lambda' + \underline{r} \Lambda \otimes_K \underline{r} \Lambda' + \Lambda \otimes_K \underline{r}^2 \Lambda'$.

Lema 1.4. Existe un isomorfismo de K - espacios vectoriales

$$\Phi : \underline{r}(\Lambda \otimes_K \Lambda') / \underline{r}^2(\Lambda \otimes_K \Lambda') \longrightarrow \left(\underline{r}\Lambda / \underline{r}^2\Lambda \otimes_K \prod_{j=1}^m K e'_j \right) \times \left(\prod_{i=1}^n K e_i \otimes_K \underline{r}\Lambda' / \underline{r}^2\Lambda' \right)$$

donde $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \Lambda$ y $\{e'_1, \dots, e'_m\} \subseteq \Lambda'$ son conjuntos completos de idempotentes ortogonales primitivos de Λ y Λ' respectivamente, tal que

$$\Phi \left[(e_k \otimes e'_l) \underline{r}(\Lambda \otimes_K \Lambda') / \underline{r}^2(\Lambda \otimes_K \Lambda') (e_s \otimes e'_t) \right] = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq s \text{ y } l \neq t \\ [e_k(\underline{r}\Lambda / \underline{r}^2\Lambda)e_s] \otimes_K K e'_t, & \text{si } l = t \text{ y } k \neq s \\ K e_s \otimes_K [e'_l(\underline{r}\Lambda' / \underline{r}^2\Lambda')e'_t], & \text{si } k = s \text{ y } l \neq t \\ [e_k(\underline{r}\Lambda / \underline{r}^2\Lambda)e_k] \otimes_K K e'_t + \\ K e_s \otimes_K [e'_l(\underline{r}\Lambda' / \underline{r}^2\Lambda')e'_l] & \text{si } k = s \text{ y } l = t \end{cases}$$

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{r_{2,1}, \dots, r_{2,s}, r_{1,s+1}, \dots, r_{1,s+l}, e_1, \dots, e_n\}$ una K - base de Λ formada por caminos tal que $\{r_{2,1}, \dots, r_{2,s}, r_{1,s+1}, \dots, r_{1,s+l}\}$ es una K - base de $\underline{r}\Lambda$ con $r_{2,j} \in \underline{r}^2\Lambda$, $r_{1,j} \in \underline{r}\Lambda - \underline{r}^2\Lambda$.

Elegimos de manera análoga una K - base $\mathcal{B}' = \{r'_{2,1}, \dots, r'_{2,t}, r'_{1,t+1}, \dots, r'_{1,t+u}, e'_1, \dots, e'_m\}$ de Λ' .

Entonces $\mathcal{B}_{r(\Lambda \otimes_K \Lambda')} = \{r_{2,i} \otimes r'_{2,j}\} \cup \{r_{2,i} \otimes r'_{1,j}\} \cup \{r_{2,i} \otimes e'_j\} \cup \{r_{1,i} \otimes r'_{2,j}\} \cup \{r_{1,i} \otimes r'_{1,j}\} \cup \{r_{1,i} \otimes e'_j\} \cup \{e_i \otimes r'_{2,j}\} \cup \{e_i \otimes r'_{1,j}\}$ es una K - base de $\underline{r}(\Lambda \otimes_K \Lambda')$.

Sea $\phi : \underline{r}(\Lambda \otimes_K \Lambda') \longrightarrow \left(\underline{r}\Lambda / \underline{r}^2\Lambda \otimes_K \prod_{j=1}^m K e'_j \right) \times \left(\prod_{i=1}^n K e_i \otimes_K \underline{r}\Lambda' / \underline{r}^2\Lambda' \right)$ la transformación lineal definida por:

$$\phi(r_{1,i} \otimes e'_j) = (\overline{r_{1,i}} \otimes e'_j, 0)$$

$$\phi(e_i \otimes r'_{1,j}) = (0, e_i \otimes \overline{r'_{1,j}})$$

y ϕ cero en los demás elementos de la base $\mathcal{B}_{r(\Lambda \otimes_K \Lambda')}$. Aquí $\overline{r_{1,i}}$ denota la clase de $r_{1,i}$ módulo $\underline{r}^2\Lambda$ y análogamente $\overline{r'_{1,j}}$ indica la clase de $r'_{1,j}$ módulo $\underline{r}^2\Lambda'$.

Es fácil ver que ϕ es un epimorfismo y que $\ker\phi = \underline{r}^2(\Lambda \otimes_K \Lambda')$. Luego existe un isomorfismo $\Phi : \underline{r}(\Lambda \otimes_K \Lambda') / \underline{r}^2(\Lambda \otimes_K \Lambda') \longrightarrow (\underline{r}\Lambda / \underline{r}^2\Lambda \otimes_K \prod_{j=1}^m Ke'_j) \times (\prod_{i=1}^n Ke_i \otimes_K \underline{r}\Lambda' / \underline{r}^2\Lambda')$, que además satisface las condiciones requeridas. \square

Corolario 1.5. $\dim_K \underline{r}(\Lambda \otimes_K \Lambda') / \underline{r}^2(\Lambda \otimes_K \Lambda') = m \cdot \dim_K (\underline{r}\Lambda / \underline{r}^2\Lambda) + n \cdot \dim_K (\underline{r}\Lambda' / \underline{r}^2\Lambda') = m \cdot \text{card}(Q_1) + n \cdot \text{card}(Q'_1)$.

Estamos en condiciones ahora de describir el conjunto de flechas $(Q_{\Lambda \otimes_K \Lambda'})_1$.

Por cada flecha $\beta : i \longrightarrow j$ en Q_1 se tienen m flechas $f_{\beta \otimes e'_s} : v_{e_i \otimes e'_s} \longrightarrow v_{e_j \otimes e'_s}$, $s = 1, \dots, m$ y por cada flecha $\beta' : k \longrightarrow l$ en Q'_1 se tienen n flechas $f_{e_t \otimes \beta'} : v_{e_t \otimes e'_k} \longrightarrow v_{e_t \otimes e'_l}$, $t = 1, \dots, n$ en $(Q_{\Lambda \otimes_K \Lambda'})_1$.

Daremos a continuación una sencilla observación y un ejemplo que ilustra la construcción descripta.

Observación 1.6. Si $\Lambda = KQ/I$ y $\Lambda' = KQ'/I'$ entonces $Q_{\Lambda \otimes_K \Lambda'} = Q_{KQ \otimes_K KQ'}$.

Ejemplo 1.7. Sea Q el diagrama $\begin{array}{ccc} & \beta & \\ \circlearrowleft & 1 & \xrightarrow{\beta} & 2 & \circlearrowright \\ & \alpha & & \gamma & \end{array}$ y Q' el diagrama $\begin{array}{ccc} & & \\ \circlearrowleft & & \circlearrowright \\ & \alpha' & \end{array}$. Entonces $Q_{KQ \otimes_K KQ'}$ es el siguiente

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} f_{\alpha \otimes e'_1} \\ \circlearrowleft \\ v_{e_1 \otimes e'_1} \\ \circlearrowleft \\ f_{e_1 \otimes \alpha'} \end{array} & \xrightarrow{f_{\beta \otimes e'_1}} & \begin{array}{c} f_{\gamma \otimes e'_1} \\ \circlearrowright \\ v_{e_2 \otimes e'_1} \\ \circlearrowright \\ f_{e_2 \otimes \alpha'} \end{array} \end{array}$$

Describiremos ahora el ideal de las relaciones $I_{\Lambda \otimes \Lambda'}$. Para ello supongamos primero que $\Lambda = KQ$ y $\Lambda' = KQ'$.

Consideremos el morfismo de K -álgebras $\theta : KQ_{\Lambda \otimes \Lambda'} \longrightarrow \Lambda \otimes \Lambda' = KQ \otimes_K KQ'$ definido sobre $(Q_{\Lambda \otimes \Lambda'})_0$ y $(Q_{\Lambda \otimes \Lambda'})_1$ como sigue:

$$\begin{aligned} \theta(v_{e_i \otimes e'_j}) &= e_i \otimes e'_j \\ \theta(f_{\beta \otimes e'_j}) &= \beta \otimes e'_j; \quad \theta(f_{e_i \otimes \beta'}) = e_i \otimes \beta' \end{aligned}$$

para todo $v_{e_i \otimes e'_j} \in (Q_{\Lambda \otimes \Lambda'})_0$ y $f_{\beta \otimes e'_j}, f_{e_i \otimes \beta'} \in (Q_{\Lambda \otimes \Lambda'})_1$.

Tenemos entonces el siguiente lema.

Lema 1.8. Sea θ como arriba. Entonces $\ker \theta$ es el ideal bilátero generado por el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ \prod f_{x_i \otimes y_i} - \prod f_{x'_i \otimes y'_i} : \prod x_i = \prod x'_i, \prod y_i = \prod y'_i \right\}$$

donde $x_i \otimes y_i, x'_i \otimes y'_i$ son de la forma $e_{j_i} \otimes \beta'$ ó $\beta \otimes e'_{j_i}$, con β y β' flechas de Q y Q' respectivamente.

Demostración. Claramente todo elemento de \mathcal{S} pertenece a $\ker \theta$. Sea ahora $x \in \ker \theta$. Entonces x tiene una expresión K -lineal de la forma:

$$x = \sum_{\gamma, \gamma'} \sum_{k=1}^{m_{\gamma, \gamma'}} a_{\gamma, \gamma', k} \left(\prod_{i=1}^{n_k} f_{x_{i,k} \otimes y_{i,k}} \right) \\ \prod x_{i,k} = \gamma \\ \prod y_{i,k} = \gamma'$$

donde γ, γ' denotan caminos de Q y Q' respectivamente y los $x_{i,k} \otimes y_{i,k}$ son de la forma $e_{j_i} \otimes \beta'$ ó $\beta \otimes e'_{j_i}$, con β y β' flechas de Q y Q' respectivamente.

Entonces

$$\theta(x) = \sum_{\gamma, \gamma'} \left(\sum_{k=1}^{m_{\gamma, \gamma'}} a_{\gamma, \gamma', k} \right) \gamma \otimes \gamma' = 0$$

de donde resulta que $\sum_{k=1}^{m_{\gamma, \gamma'}} a_{\gamma, \gamma', k} = 0, \forall \gamma, \gamma'$ caminos de Q y Q' respectivamente, pues $\{ \gamma \otimes \gamma' : \gamma \text{ es un camino de } Q \text{ y } \gamma' \text{ es un camino de } Q' \}$ es un conjunto linealmente independiente. Luego x se puede escribir en la forma:

$$x = \sum_{\gamma, \gamma'} \sum_{k=2}^{m_{\gamma, \gamma'}} a_{\gamma, \gamma', k} \left(\prod_{i=1}^{n_k} f_{x_{i,k} \otimes y_{i,k}} - \prod_{i=1}^{n_1} f_{x_{i,1} \otimes y_{i,1}} \right) \\ \prod x_{i,k} = \gamma \quad \prod x_{i,1} = \gamma \\ \prod y_{i,k} = \gamma' \quad \prod y_{i,1} = \gamma'$$

y por lo tanto pertenece al ideal bilátero generado por el conjunto \mathcal{S} . \square

En el siguiente lema describimos el ideal de las relaciones $I_{\Lambda \otimes_K \Lambda'}$ para el caso general $\Lambda = KQ/I, \Lambda' = KQ'/I'$ con $I, I' \neq 0$. Denotemos por J al ideal bilátero de $KQ_{\Lambda \otimes_K \Lambda'} = KQ_{KQ \otimes_K KQ'}$ generado por el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ \prod f_{x_i \otimes y_i} - \prod f_{x'_i \otimes y'_i} : \prod x_i = \prod x'_i, \prod y_i = \prod y'_i \right\}$$

donde $x_i \otimes y_i, x'_i \otimes y'_i$ son de la forma $e_{j_i} \otimes \beta'$ ó $\beta \otimes e'_{j_i}$, con β y β' flechas de Q y Q' respectivamente.

Lema 1.9. Sean $\Lambda = KQ/I$ y $\Lambda' = KQ'/I'$. Entonces

$$I_{\Lambda \otimes_K \Lambda'} \simeq [KQ \otimes_K I' + I \otimes_K KQ'] \amalg J$$

como K - espacios vectoriales.

Demostración. De acuerdo al Lema anterior, existe una sucesión exacta de $KQ_{KQ \otimes_K KQ'}$ - módulos:

$$0 \rightarrow J \rightarrow KQ_{KQ \otimes_K KQ'} \rightarrow KQ \otimes_K KQ' \rightarrow 0$$

Sean $\pi : KQ \rightarrow \Lambda$ y $\pi' : KQ' \rightarrow \Lambda'$ los epimorfismos canónicos. La siguiente es una sucesión exacta de $KQ \otimes_K KQ'$ - módulos:

$$0 \rightarrow KQ \otimes_K I' + I \otimes_K KQ' \rightarrow KQ \otimes_K KQ' \xrightarrow{\pi \otimes \pi'} \Lambda \otimes_K \Lambda' \rightarrow 0$$

En efecto, es claro que $KQ \otimes_K I' + I \otimes_K KQ' \subseteq \ker(\phi \otimes \phi')$. Como se hizo para $\underline{r}\Lambda$ y $\underline{r}\Lambda'$ en la demostración del Lema 1.2 se prueba que $\dim_K [KQ \otimes_K I' + I \otimes_K KQ'] = \dim_K \ker(\phi \otimes \phi')$.

Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo de K - espacios vectoriales:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & J & \longrightarrow & I_{\Lambda \otimes_K \Lambda'} & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & KQ_{KQ \otimes_K KQ'} & \xlongequal{\quad} & KQ_{\Lambda \otimes_K \Lambda'} & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & KQ \otimes_K I' + I \otimes_K KQ' & \longrightarrow & KQ \otimes_K KQ' & \longrightarrow & \Lambda \otimes_K \Lambda' \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

Por el Lema de la serpiente resulta entonces que la siguiente es una sucesión exacta de espacios vectoriales, lo cual completa la demostración del lema.

$$0 \rightarrow J \rightarrow I_{\Lambda \otimes_K \Lambda'} \rightarrow KQ \otimes_K I' + I \otimes_K KQ' \rightarrow 0$$

□

Corolario 1.10. *El siguiente es un conjunto de relaciones minimales de $\Lambda \otimes_K \Lambda'$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \cup \{ \sum k_{\delta_1, \dots, \delta_t} f_{\delta_t \otimes e'_j} \cdots f_{\delta_1 \otimes e'_j} : \sum k_{\delta_1, \dots, \delta_t} \delta_1 \cdots \delta_t \text{ es una relación minimal en } \Lambda \} \cup \\ \cup \{ \sum k_{\delta'_1, \dots, \delta'_t} f_{e_i \otimes \delta'_t} \cdots f_{e_i \otimes \delta'_1} : \sum k_{\delta'_1, \dots, \delta'_t} \delta'_1 \cdots \delta'_t \text{ es una relación minimal en } \Lambda' \} \end{aligned}$$

Notación. En adelante, escribiremos $e_i \otimes e'_j$ en lugar de $v_{e_i \otimes e'_j}$ para designar a los vértices de $Q_{\Lambda \otimes_K \Lambda'}$ y $\beta \otimes e'_j$, $e_i \otimes \beta'$ en lugar de $f_{\beta \otimes e'_j}$ y $f_{e_i \otimes \beta'}$ respectivamente, para designar a las flechas de $Q_{\Lambda \otimes_K \Lambda'}$, por razones de simplicidad.

Finalizamos esta sección con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.11. Sean Q y Q' los diagramas del Ejemplo 1.7. y sean $\Lambda = KQ / \langle \alpha^2, \gamma^2, \beta\alpha - \gamma\beta \rangle$ y $\Lambda' = KQ' / \langle \alpha'^3 \rangle$. Entonces $\Lambda \otimes_K \Lambda'$ es el álgebra de caminos del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} (\alpha \otimes 1) \\ \circ \\ (e_1 \otimes 1) \\ \circ \\ (e_1 \otimes \alpha') \end{array} & \xrightarrow{(\beta \otimes 1)} & \begin{array}{c} (\gamma \otimes 1) \\ \circ \\ (e_2 \otimes 1) \\ \circ \\ (e_2 \otimes \alpha') \end{array} \end{array}$$

con las relaciones $(\alpha \otimes 1)^2 = (e_1 \otimes \alpha')^3 = (\gamma \otimes 1)^2 = (e_2 \otimes \alpha')^3 = 0$; $(\alpha \otimes 1)(e_1 \otimes \alpha') = (e_1 \otimes \alpha')(\alpha \otimes 1)$; $(\gamma \otimes 1)(e_2 \otimes \alpha') = (e_2 \otimes \alpha')(\gamma \otimes 1)$; $(\beta \otimes 1)(\alpha \otimes 1) = (\gamma \otimes 1)(\beta \otimes 1) = (\alpha \otimes 1)(e_1 \otimes \alpha'^2) = (e_1 \otimes \alpha'^2)(\alpha \otimes 1)$; $(\gamma \otimes 1)(e_2 \otimes \alpha'^2) = (e_2 \otimes \alpha'^2)(\gamma \otimes 1)$.

2. GRUPOS DE COHOMOLOGIA DE HOCHSCHILD

En esta sección recordaremos la definición de los grupos de cohomología de Hochschild de una K -álgebra A por un A -bimódulo X de dimensión finita sobre K . Omitiremos las demostraciones correspondientes que pueden verse en [Ho] y [CE].

Sea A una K -álgebra y $A^{\otimes i} = \overbrace{A \otimes_K \cdots \otimes_K A}^{i \text{ veces}}$. Sea además, ${}_A X_A$ un A -bimódulo de dimensión finita sobre K . Se define el complejo de Hochschild $C^\bullet = (C^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ asociado a A y X como sigue:

$C^i = 0, d^i = 0, \forall i < 0, C^0 = {}_A X_A, C^i = \text{Hom}_K(A^{\otimes i}, X), \forall i > 0, d^0 : X \longrightarrow \text{Hom}_K(A, X)$ está dado por $(d^0 x)(a) = ax - xa$, para todo $x \in X$ y $a \in A$ y $d^i : C^i \longrightarrow C^{i+1}$ por

$$(d^i f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i+1}) = a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{i+1}) + \sum_{j=1}^i (-1)^j f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{i+1}) + (-1)^{i+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) a_{i+1}$$

para $f \in C^i$ y $a_1, \dots, a_{i+1} \in A$.

El i -ésimo grupo de cohomología de Hochschild, $H^i(A, X)$, de A con coeficientes en el A -bimódulo X es por definición $H^i(A, X) = H^i(C^\bullet) = \text{Ker} d^i / \text{Im} d^{i-1}$. En el caso particular en que ${}_A X_A = {}_A A_A$, $H^i(A, A)$ se nota $H^i(A)$ y se llama el i -ésimo grupo de cohomología de Hochschild de A .

Claramente, $H^0(A, X) = \{x \in X : ax = xa, \forall a \in A\}$. En particular, $H^0(A)$ coincide con el centro $Z(A)$ de A . Sea $\text{Der}(A, X) = \{\delta \in \text{Hom}_K(A, X) : \delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b\}$ el K -espacio vectorial de las derivaciones de A en X y $\text{Der}^0(A, X)$ el subespacio de derivaciones interiores de A en X , esto es, $\text{Der}^0(A, X) = \{\delta_x \in \text{Hom}_K(A, X) : \delta_x(a) = ax - xa \forall x \in X\}$. Entonces sigue inmediatamente de la definición que $H^1(A, X) = \text{Der}(A, X) / \text{Der}^0(A, X)$.

Es un hecho conocido que $H^2(A)$ controla la teoría de deformaciones de A . Se sabe que si $H^2(A) = 0$ entonces A es rígida. [G]

Los grupos de cohomología de Hochschild de una K -álgebra A por un A -bimódulo ${}_A X_A$ pueden ser definidos también usando el álgebra envolvente, $A^e = A \otimes_K A^{op}$, de A . Todo A -bimódulo ${}_A X_A$ puede ser considerado como A^e -módulo a izquierda de la siguiente manera: $(a \otimes b^\circ).x = axb, \forall a, b \in A, x \in X$. En particular, A puede considerarse como un A^e -módulo a izquierda.

Se construye entonces una A^e -resolución de A , $S_\bullet(A) = (S_i(A), \delta_i^A)_{i \geq 0}$, llamada resolución standard de A , como sigue. Para cada $i \geq -1$, sea $S_i(A) = A^{\otimes(i+2)}$. Entonces $S_i(A)$ es un A^e -módulo a izquierda definiendo $(a \otimes b^\circ).(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i+1}) = aa_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes a_{i+1}b$ para todo $a, b \in A$ y $a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i+1} \in S_i(A)$.

Para cada $i \geq 0$, sea $\delta_i^A : S_i(A) \longrightarrow S_{i-1}(A)$ el A^e -morfismo definido por:

$$\delta_i^A(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i+1}) = \sum_{j=0}^i (-1)^j .(a_0 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{i+1})$$

Entonces $S_{-1}(A) = A, \delta_0 : A \otimes_K A \longrightarrow A$ es un epimorfismo y $S_\bullet = (S_i(A), \delta_i)_{i \geq 0}$ es una A^e -resolución de A (cf. [CE], p.174), proyectiva si K es un cuerpo.

Notar que el A^e - módulo $S_i(A)$ se puede escribir en la forma $S_i(A) = A \otimes_K A^{\otimes i} \otimes_K A \simeq A^e \otimes_K A^{\otimes i}$ de donde resulta inmediatamente que $\text{Hom}_{A^e}(S_i(A), X) \simeq C^i$ para todo $i \geq 0$. Más aún, se prueba que los complejos $(\text{Hom}_{A^e}(S_i(A), X), (\delta_i^A, X))$ y C^\bullet son isomorfos y por lo tanto $H^i(A, X) = \text{Ext}_{A^e}^i(A, X)$.

3. UNA SUCESION EXACTA LARGA DE GRUPOS DE COHOMOLOGIA DE HOCHSCHILD PARA EXTENSIONES LOCALES

En general, el cálculo por definición de los grupos de cohomología de Hochschild de un álgebra dada presenta dificultades. Es por eso que muchas veces se buscan métodos alternativos para el mismo. Para el caso particular de las álgebras que son extensiones (coextensiones) por un punto, D.Happel probó en [H] el siguiente resultado que permite, en muchas ocasiones, calcular los grupos de cohomología de Hochschild de una extensión (coextensión) por un punto conociendo los de un cociente particular.

Teorema. (Happel) Sea B la extensión (coextensión) por un punto de A por un A - módulo M . Entonces existe una sucesión exacta de K - espacios vectoriales que conecta la cohomología de Hochschild de A y la de B , de la forma:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(B) \rightarrow H^0(A) \rightarrow \text{Hom}_A(M, M)/K \rightarrow H^1(B) \rightarrow H^1(A) \rightarrow \text{Ext}_A^1(M, M) \rightarrow \dots \\ \rightarrow H^i(B) \rightarrow H^i(A) \rightarrow \text{Ext}_A^i(M, M) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

El hecho que la sucesión de Happel resulte ser sumamente útil en muchos casos, motivó nuestro interés por obtener un resultado similar para el caso de álgebras que son extensiones locales. Probaremos aquí el siguiente teorema que da una sucesión exacta de K - espacios vectoriales, similar a la dada por D. Happel, para extensiones locales.

Teorema. Sea $B = \begin{pmatrix} R & 0 \\ {}_A M_R & A \end{pmatrix}$ la extensión local de un álgebra A por un $A - R$ -bimódulo M . Entonces existe una sucesión exacta larga de K -espacios vectoriales que conecta la cohomología de Hochschild de A y la de B , de la forma:

$$0 \rightarrow \text{Ann } M_R \cap Z(R) \rightarrow H^0(B) \rightarrow H^0(A) \rightarrow \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) \rightarrow H^1(B) \rightarrow H^1(A) \\ \rightarrow \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^2(R, P_e) \rightarrow \dots \rightarrow H^i(B) \rightarrow H^i(A) \rightarrow \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^{i+1}(R, P_e) \rightarrow \dots$$

donde e es el idempotente $\begin{pmatrix} 1_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de B , $P_e = Be$.

Aparece aquí el problema de calcular los grupos $\text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e)$. En esta sección probaremos además la existencia de otra sucesión exacta larga que relaciona la cohomología de Hochschild de R con los grupos mencionados. Consideraremos en la sección siguiente un caso particular de extensiones locales para el cual esta sucesión es de gran utilidad. La misma permite probar que $\text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e) \simeq H^i(R)$ para todo $i \geq 2$ en ese caso.

Finalizamos esta sección con un ejemplo de aplicación del teorema mencionado. Más precisamente, calculamos los grupos $H^i(B)$ para el álgebra $B = K \left(\begin{smallmatrix} \circlearrowleft & \xrightarrow{\beta} \\ \alpha & \circlearrowright \end{smallmatrix} \right) / \langle \alpha^2, \gamma^2, \beta\alpha - \gamma\beta \rangle$.

Comenzamos recordando la definición de extensión local de un anillo.

Siguiendo a J.A. de la Peña y M. Martins en [dlPM], un anillo de matrices triangulares $B = \begin{pmatrix} R & 0 \\ {}_A M_R & A \end{pmatrix}$ con A y R K -álgebras y ${}_A M_R$ un $A - R$ -bimódulo finitamente generado como A -módulo a izquierda y como R -módulo a derecha, se dice la **extensión local** de A por el $A - R$ -bimódulo M si R es un anillo local. En el caso particular en que R es además un anillo con división la definición coincide con la de **extensión por un punto** dada por Ringel.

Las álgebras Λ que no son anillos locales y satisfacen la propiedad

(IIP) Todos los ideales (biláteros) idempotentes de Λ son Λ -módulos proyectivos a izquierda, consideradas en el capítulo I, son ejemplos de extensiones locales de otras álgebras que tienen la misma propiedad. Más aún, toda álgebra Λ con la propiedad (IIP), que no es un anillo local, se

puede obtener a partir de un cierto anillo local por sucesivas extensiones locales por bimódulos apropiados.

Por ejemplo, si Q es el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \circlearrowright_2 \\ \circlearrowleft_1 & \xrightarrow{\beta} & \\ \alpha & & \gamma \end{array}$$

el álgebra $\Lambda = KQ / \langle \alpha^2, \gamma^2, \beta\alpha - \gamma\beta \rangle$ tiene la propiedad (IIP) y es una extensión local del álgebra $A = \Lambda / e_1 \cdot \Lambda \cdot e_1 \simeq K(\circlearrowright_\gamma) / \langle \gamma^2 \rangle$ por el $A - (End_\Lambda P_1)^{op}$ -bimódulo $M = \tau_{\widehat{P}_1} P_1 = \tau_{P_2} P_1$ que como B -módulo es isomorfo a P_2 . Claramente el álgebra Λ no es una extensión por un punto.

Observación 3.1. Sea $B = \begin{pmatrix} R & 0 \\ M & A \end{pmatrix}$ la extensión local del álgebra A por el $A - R$ -bimódulo M . En lo que sigue notaremos con e al idempotente $\begin{pmatrix} 1_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de B y con P_e al B -módulo proyectivo indescomponible $B.e$.

Recordemos que si $A = \coprod_{i \neq e} P_i$ es la descomposición de A como suma de A -módulos proyectivos indescomponibles entonces $B = (\coprod_{i \neq e} P_i) \coprod P_e$ es la descomposición de B como suma de B -módulos proyectivos indescomponibles y además que $R \simeq (End_B P_e)^{op}$. Este isomorfismo induce una estructura de $A - R$ -bimódulo en $\tau_{\widehat{P}_e} P_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}$ con la cual la aplicación $\varphi : {}_A M_R \rightarrow \tau_{\widehat{P}_e} P_e$ definida por $\varphi(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}$ para todo $m \in M$ es un isomorfismo de bimódulos. Más aún, φ es un B -isomorfismo considerando a M con la estructura de B -módulo inducida por el epimorfismo de álgebras $B \rightarrow A$, que a $\begin{pmatrix} r & 0 \\ m & a \end{pmatrix}$ de B asocia el elemento a de A . \square

La inclusión $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} R & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}$ es un morfismo de B -módulos. Sea \overline{R} su conúcleo. Tenemos entonces una sucesión exacta de B -módulos:

$$0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \overline{R} \rightarrow 0$$

Ahora bien, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} = \tau_{\widehat{P}_e} P_e$ y $\begin{pmatrix} R & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} = P_e$. Entonces esta sucesión induce una sucesión exacta

$$(*) \quad 0 \rightarrow M \rightarrow P_e \rightarrow \overline{R} \rightarrow 0$$

via el isomorfismo φ de la observación anterior.

Observación 3.2. Del hecho que la aplicación $\phi : B \rightarrow R$, $\phi\left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ m & a \end{pmatrix}\right) = r$ es un homomorfismo de anillos resulta que R es un $B - B$ - bimódulo vía ϕ . Es decir:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r & 0 \\ m & a \end{pmatrix} \cdot r' &= \phi\left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ m & a \end{pmatrix}\right) \cdot r' = rr' \\ r' \cdot \begin{pmatrix} r & 0 \\ m & a \end{pmatrix} &= r'r \end{aligned}$$

cualesquiera sean $\begin{pmatrix} r & 0 \\ m & a \end{pmatrix} \in B$, $r' \in R$.

Es natural pensar en identificar a R con el subanillo $\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de B . Sin embargo, si bien la inclusión $j : R \rightarrow B$, $j(r) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es un morfismo de anillos e $Im j$ es un ideal a derecha de B , cuya estructura coincide con la de B^{op} - módulo de R , $Im j$ no es un ideal a izquierda de B .

Considerando a ${}_B R$ con la estructura inducida por ϕ , la aplicación $\mu : R \rightarrow \bar{R}$ dada por $\mu(r) = \overline{j(r)}$, donde la barra indica clase módulo M , es un isomorfismo de anillos y de B - módulos. Luego, hay una sucesión exacta de B - módulos

$$(**) \quad 0 \rightarrow M \rightarrow P_e \xrightarrow{\pi} R \rightarrow 0$$

inducida por la sucesión (*). El morfismo π está definido por $\pi\left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}\right) = r$.

En adelante, nos interesará también la estructura de $B - R$ - bimódulo de R inducida por ϕ . \square

Nuestro propósito ahora es probar el teorema arriba mencionado.

Sea B una extensión local de A por un $A - R$ - bimódulo M . Entonces $P_e = B.e = B.e.B = B^e.e$. Luego P_e es un B^e - módulo. Por otro lado, $Hom_{R^{op}}(R, P_e)$ también tiene una estructura de B^e - módulo inducida por la estructura de B - módulo de R y P_e . Recordemos que la misma está definida por:

$$(f.b)(r) = f(b.r)$$

$$(b.f)(r) = b.f(r)$$

para todo $f \in Hom_{R^{op}}(R, P_e)$, $b \in B$ y $r \in R$.

En el siguiente lema probamos que estos B^e - módulos son isomorfos.

Lema 3.3. Sea B una extensión local de A por un $A - R$ - bimódulo M . Entonces $B^e(P_e) \simeq Hom_{R^{op}}(R, P_e)$.

Demostración. La demostración sigue de que la aplicación $\theta : \text{Hom}_{R^{\text{op}}}(R, P_e) \longrightarrow P_e$ definida por $\theta(f) = f(1_R)$ es un B^e - isomorfismo. \square

La sucesión

$$(1) \quad 0 \rightarrow P_e \longrightarrow B \longrightarrow A \rightarrow 0$$

es B^e - exacta y se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.4. *Sea B una extensión local de A por un $A - R$ - bimódulo M . Entonces*

$$\text{Hom}_{B^e}(B, A) \simeq \text{Hom}_{B^e}(A, A) \simeq \text{Hom}_{A^e}(A, A) = H^0(A)$$

$$\text{Ext}_{B^e}^i(B, A) \simeq \text{Ext}_{B^e}^i(A, A), \quad \forall i \geq 1$$

Demostración. Aplicando el funtor $\text{Hom}_{B^e}(\cdot, A)$ a la sucesión (1) de arriba se obtiene una sucesión exacta larga de la forma :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{B^e}(A, A) \longrightarrow \text{Hom}_{B^e}(B, A) \longrightarrow \text{Hom}_{B^e}(P_e, A) \longrightarrow \text{Ext}_{B^e}^1(A, A) \longrightarrow \text{Ext}_{B^e}^1(B, A) \\ \rightarrow \text{Ext}_{B^e}^1(P_e, A) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Ext}_{B^e}^i(A, A) \longrightarrow \text{Ext}_{B^e}^i(B, A) \longrightarrow \text{Ext}_{B^e}^i(P_e, A) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Es claro que $\text{Hom}_{B^e}(A, A) \simeq \text{Hom}_{A^e}(A, A) = H^0(A)$. De aquí, para probar la primera parte del teorema basta ver que $\text{Hom}_{B^e}(A, A) \simeq \text{Hom}_{B^e}(B, A)$. Para ello es suficiente probar que $\text{Hom}_{B^e}(P_e, A) = 0$, lo cual sigue de que $\text{Hom}_B(P_e, A) = 0$. El resto del teorema resulta del hecho que $\text{Ext}_{B^e}^i(P_e, A) = 0 \quad \forall i \geq 1$ que probaremos a continuación. \square

Como vimos en la sección 1, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de Λ entonces $\{e_i \otimes e_j^{\circ}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de Λ^e . Recordemos que para un idempotente $e_i \otimes e_j^{\circ}$ de Λ^e notamos con $P_{e_i \otimes e_j^{\circ}}$ al Λ^e - módulo proyectivo indescomponible $\Lambda^e \cdot (e_i \otimes e_j^{\circ})$.

El siguiente teorema describe una B^e - resolución proyectiva de P_e cuando B es una extensión local.

Teorema 3.5. *Sea $B = \begin{pmatrix} R & 0 \\ M & A \end{pmatrix}$ la extensión local de A por M y $\{e = e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales de B . Entonces hay una B^e - resolución*

proyectiva de P_e de la forma:

$$\dots \longrightarrow Q_n \longrightarrow \dots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow P_e \longrightarrow 0$$

$$\text{con } Q_n = \prod_i [P_{e_i \otimes e^0}]^{\dim_K \text{Ext}_B^n(S_e, S_i)}, \forall n \geq 0.$$

Demostración. En [H], 1.5, D. Happel prueba que existe una B^e - resolución proyectiva de B de la forma :

$$\dots \longrightarrow R_n \longrightarrow \dots \longrightarrow R_1 \longrightarrow R_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

$$\text{con } R_n = \prod_{i,j} [P_{e_i \otimes e_j^0}]^{r_{ij}} \text{ y } r_{ij} = \dim_K \text{Ext}_{B^e}^n(B, \text{Hom}_K(S_j, S_i)), \forall i, j.$$

Utilizado el mismo argumento - reemplazando B por $P_e = B.e$ - encontramos una B^e - resolución proyectiva de P_e de la forma:

$$\dots \longrightarrow Q_n \longrightarrow \dots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow P_e \longrightarrow 0$$

$$\text{con } Q_n = \prod_{i,j} [P_{e_i \otimes e_j^0}]^{l_{ij}} \text{ y } l_{ij} = \dim_K \text{Ext}_{B^e}^n(Be, \text{Hom}_K(S_j, S_i)), \forall i, j.$$

Aplicando el Teorema 2.8.a, pag. 167, de [CE] resulta que:

$$l_{ij} = \dim_K \text{Ext}_B^n(S_j \otimes_{B^{\circ p}} Be, S_i), \forall i, j$$

Ahora bien,

$$S_j \otimes_{B^{\circ p}} Be \simeq Be \otimes_B S_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq e \\ S_e & \text{si } j = e \end{cases}$$

lo cual termina la demostración del teorema. \square

El siguiente corolario completa la demostración del Teorema 3.4.

Corolario 3.6. Con las hipótesis del Teorema 3.5, $\text{Ext}_{B^e}^i(P_e, A) = 0, \forall i \geq 1$.

Demostración. Aplicando el funtor $\text{Hom}_{B^e}(\cdot, A)$ a la B^e - resolución proyectiva de P_e dada en el Teorema.5.5, basta probar que $\text{Hom}_{B^e}(P_{e_j \otimes e^0}, A) = 0, \forall j = 1, \dots, n$.

Esta igualdad es inmediata del hecho que $\text{Hom}_{B^e}(P_{e_j \otimes e^0}, A) = e_j A e. \square$

La sucesión (1) da origen a la siguiente sucesión exacta larga aplicando el funtor $\text{Hom}_{B^e}(B, \cdot)$:

$$(2) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_{B^e}(B, P_e) \rightarrow \text{Hom}_{B^e}(B, B) \rightarrow \text{Hom}_{B^e}(B, A) \rightarrow \text{Ext}_{B^e}^1(B, P_e) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}_{B^e}^1(B, B) \rightarrow \text{Ext}_{B^e}^1(B, A) \rightarrow \dots$$

Sigue del Lema 3.3. y [CE], Teorema 2.8a (pág.167) que

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{B^e}(B, P_e) &\simeq \text{Hom}_{B^e}(B, \text{Hom}_{R^{op}}(R, P_e)) \simeq \text{Hom}_{B \otimes_K R^{op}}(R \otimes_{B^{op}} B, P_e) \simeq \\ &\simeq \text{Hom}_{B \otimes_K R^{op}}(R, P_e), \quad y \\ \text{Ext}_{B^e}^i(B, P_e) &= \text{Ext}_{B^e}^i(B, \text{Hom}_{R^{op}}(R, P_e)) \simeq \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^i(R \otimes_{B^{op}} B, P_e) \simeq \\ &\simeq \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e) \end{aligned}$$

Así, (2) induce una sucesión exacta de la forma:

$$(3) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_{B \otimes_K R^{op}}(R, P_e) \rightarrow H^0(B) \rightarrow H^0(A) \xrightarrow{\Delta_0} \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) \rightarrow H^1(B) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}_{B^e}^1(B, A) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e) \rightarrow H^i(B) \rightarrow \text{Ext}_{B^e}^i(B, A) \rightarrow \dots$$

vía los isomorfismos del Teorema 3.4 y los que acabamos de mencionar.

Sea $B = KQ/I$. Recordemos que un álgebra cociente A de B se dice una *subcategoría convexa* de B si existe un subdiagrama Q' de Q , lleno y cerrado por caminos tal que $A = KQ'/(I \cap KQ')$. El siguiente es un hecho bien conocido.

Lema 3.7. *Sea A una subcategoría convexa de $B = KQ/I$. Entonces*

$$\text{Ext}_B^i(X, Y) \simeq \text{Ext}_A^i(X, Y)$$

para todo $i \geq 1$ y $X, Y \in \text{mod } A$.

Si bien este resultado es conocido daremos aquí su demostración usando un teorema sobre ideales k -idempotentes.

Un ideal bilátero \mathcal{U} de Λ se dice *k -idempotente*, $k \geq 1$ si $\text{Ext}_{\Lambda/\mathcal{U}}^i(X, Y) \simeq \text{Ext}_{\Lambda}^i(X, Y)$, $\forall i$, $0 \leq i \leq k$, $\forall X, Y \in \text{mod } (\Lambda/\mathcal{U})$. \mathcal{U} se dice *idempotente fuerte* si $\text{Ext}_{\Lambda/\mathcal{U}}^i(X, Y) \simeq \text{Ext}_{\Lambda}^i(X, Y)$, $\forall i \geq 0$, $\forall X, Y \in \text{mod } (\Lambda/\mathcal{U})$.

Estas nociones fueron introducidas por Auslander, Platzeck y Todorov en [APT] donde probaron el siguiente importante teorema.

Teorema. Sea P un Λ - módulo proyectivo, $\mathcal{U} = \tau_P(\Lambda)$ y $1 \leq k \leq \infty$. Sea

$$\dots \longrightarrow P_i \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow 0$$

una Λ - resolución proyectiva minimal de \mathcal{U} . Entonces \mathcal{U} es $(k + 1)$ - idempotente si y sólo si $P_i \in \text{add } P$ para todo $i = 0, \dots, k$.

Demostración del Lema 3.7. Sea $B = \coprod_{i \in Q_0} Q_i$ con $Q_i = B.e_i$, $e_i^2 = e_i$, la descomposición de B como suma de B - módulos proyectivos indescomponibles. Como A es una subálgebra convexa de B , $A \simeq B/\tau_P(B)$ donde $P = \coprod_{i \in Q_0 - Q'_0} B.e_i$ y Q' es el subdiagrama de Q que define a A .

De acuerdo al teorema anterior basta probar que $A = \tau_P(B)$ tiene una resolución proyectiva minimal

$$\dots \longrightarrow P_i \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

con $P_i \in \text{add } P$, $\forall i$.

Si $A = \tau_P(B) = \coprod_{i \in Q_0} \tau_P(Q_i)$ es proyectivo entonces $A = \tau_P(B) \in \text{add } P$ y por lo tanto no hay nada que probar. Supongamos que A no es proyectivo. Es suficiente mostrar que todo sumando no proyectivo de A tiene una resolución proyectiva como deseamos.

Sea $\tau_P(Q_i)$ un sumando no proyectivo de $A = \tau_P(B)$. Entonces, $Q_i \notin \text{add } P$ y por lo tanto el idempotente e_i tal que $Q_i = B.e_i$ está en A . Sea

$$\dots \longrightarrow P'_j \longrightarrow \dots \longrightarrow P'_1 \longrightarrow P'_0 \longrightarrow \tau_P(Q_i) \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva minimal de $\tau_P(Q_i)$. Probaremos por inducción sobre j que todos los P'_j están en $\text{add } P$.

Claramente P'_0 está en $\text{add } P$ pues existe un epimorfismo $P^n \longrightarrow \tau_P(Q_i)$. Sea $j \geq 1$ y supongamos que $P'_0, \dots, P'_{j-1} \in \text{add } P$. Si $P'_j \notin \text{add } P$ entonces tiene un sumando indescomponible $P'_{j,s} \notin \text{add } P$, es decir, existe un sumando indescomponible $P'_{j,s} = B.e_{i_s}$ de P'_j , con e_{i_s} un elemento idempotente de A . Luego se tiene una cadena de morfismos

$$(*) \quad B.e_{i_s} = P'_{j,s} \hookrightarrow P'_j \xrightarrow{d_j} P'_{j-1} \xrightarrow{d_{j-1}} \dots \xrightarrow{d_0} P'_0 \xrightarrow{d_0} \tau_P(Q_i) \hookrightarrow Q_i = B.e_i$$

con los $d_t \neq 0$, $\forall t = 0, \dots, j$ y P'_j, s , Q_i proyectivos en $\text{mod } A$.

Como la restricción de cada d_t a un sumando indescomponible de P'_t es no nula, sigue de (*) que existe una cadena de morfismos no nulos

$$B.e_{i_s} = P'_{j,s} \longrightarrow P'_{i_j} \xrightarrow{d_j} P'_{i_{j-1}} \xrightarrow{d_{j-1}} \dots P'_{i_0} \xrightarrow{d_0} \tau_{P'}(Q_i) \hookrightarrow Q_i = B.e_i$$

con $P'_{i_j} = B.e_{i_j}$ en $\text{add } P$. Esto induce en Q una sucesión de caminos no nulos $i \longrightarrow i_0 \longrightarrow \dots \longrightarrow i_j \longrightarrow i_s$ con i, i_s en Q'_0 y los restantes i_k en $Q_0 - Q'_0$, lo cual contradice la convexidad de A en B . \square

Cuando B es una extensión local de A por un $A - R$ -bimódulo M , A es una subcategoría convexa de B . En consecuencia A^e es una subcategoría convexa de B^e , lo cual se puede ver usando la descripción de A^e y B^e como álgebras de caminos que dimos en la sección 1. Se tiene entonces el siguiente corolario del Lema 3.7.

Corolario 3.8. *Si B es la extensión local de un álgebra A por un $A - R$ -bimódulo M entonces $\text{Ext}_{B^e}^i(X, Y) \simeq \text{Ext}_{A^e}^i(X, Y)$, $\forall i \geq 1$ y $X, Y \in \text{mod } A^e$. En particular, $\text{Ext}_{B^e}^i(A, A) \simeq \text{Ext}_{A^e}^i(A, A) = H^i(A)$, $\forall i \geq 1$.*

Damos ahora un lema necesario para la demostración del resultado principal de la sección.

Lema 3.9. *Sea B una extensión local de A por un $A - R$ -bimódulo M . Entonces*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{B \otimes_K R^{\text{op}}}(R, M) &= 0 \\ \text{Hom}_{B \otimes_K R^{\text{op}}}(R, P_e) &\simeq \text{Ann}(M_R) \cap Z(R) \end{aligned}$$

Demostración. $\text{Hom}_{B \otimes_K R^{\text{op}}}(R, M) = 0$ pues $\text{Hom}_B(R, M) = 0$.

Sea ahora $f : R \longrightarrow P_e$ un $B - R$ -morfismo. Entonces f está unívocamente determinado por $f(1_R) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}$. Además, para todo $b = \begin{pmatrix} r' & 0 \\ m' & a \end{pmatrix} \in B$, $f(b) = f(b.1_R) = b.f(1_R)$ y $f(b.1_R) = f(r') = f(1)r'$, de donde resulta que $rr' = r'r$ y que $m'r + am = mr'$, $\forall r' \in R$, $m' \in M$, $a \in A$. Luego $r \in Z(R)$ y tomando $a = r' = 0$ en la segunda ecuación se tiene que $r \in \text{Ann}(M_R)$. De aquí, $r \in \text{Ann}(M_R) \cap Z(R)$ y $am = mr'$, $\forall r' \in R$ y $a \in A$ de donde resulta que $m = 0$. Luego, $f(1_R) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $r \in \text{Ann}(M_R) \cap Z(R)$ y la aplicación $\theta : \text{Hom}_{B \otimes_K R^{\text{op}}}(R, P_e) \longrightarrow \text{Ann}(M_R) \cap Z(R)$ definida por $\theta(f) = f(1_R)$ es un isomorfismo de grupos. \square

Estamos en condiciones de probar ahora el Teorema principal de esta sección.

Teorema 3.10. *Sea B una extensión local de un álgebra A por un $A - R$ - bimódulo M . Entonces existe una sucesión exacta de K - espacios vectoriales que conecta la cohomología de Hochschild de A y la de B de la forma:*

$$(4) \quad 0 \rightarrow \text{Ann } M_R \cap Z(R) \rightarrow H^0(B) \rightarrow H^0(A) \xrightarrow{\Delta_0} \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) \rightarrow H^1(B) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(A) \rightarrow \dots \rightarrow H^i(B) \rightarrow H^i(A) \xrightarrow{\Delta_i} \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^{i+1}(R, P_e) \dots$$

Demostración. Combinando el Teorema 3.4, el Corolario 3.8 y el Lema 3.9 se tiene que

$$\text{Ext}_{B^e}^i(B, A) \simeq \text{Ext}_{B^e}^i(A, A) \simeq \text{Ext}_{A^e}^i(A, A) = H^i(A)$$

y que

$$\text{Hom}_{B \otimes_K R^{op}}(R, P_e) \simeq \text{Ann } M_R \cap Z(R)$$

Luego, la sucesión (3) induce la sucesión buscada. \square

El siguiente lema da, en particular, una condición necesaria y suficiente para que $\text{Ann}(M_R) = 0$ en el caso en que B es una extensión local de A por un $A - R$ - bimódulo M . La demostración de este resultado es directa y por ello no la incluimos aquí.

Lema 3.11. *Sea $B = KQ_B/I$, con Q_B sin ciclos orientados que no sean lazos, y sea a una fuente de $(Q_B)_0$. Entonces son equivalentes:*

- a) $\text{Hom}_B(S_a, P_a) = 0$
- b) $\text{Ann}((\tau_{P_a} P_a)_{\text{End } P_a}) = 0$
- c) Para todo lazo α en a , con $\alpha^i = 0$ en B , y para todo $j < i$ existe una flecha β que no es un lazo tal que $\beta\alpha^j \neq 0$.

Observación 3.12. Si B es una extensión por un punto, es decir, si el anillo local R es el cuerpo K , se tiene que $\text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e) \simeq \text{Ext}_A^{i-1}(M, M)$, $\forall i \geq 2$ y $\text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) \simeq \text{Hom}_A(M, M)/K$ como probó Happel en [H], 5.3. Claramente, se verifica también que $\text{Ann } M_R = 0$ y por lo tanto el Teorema 3.11. coincide con el resultado probado por Happel en [H], 5.3.

En general no es sencillo calcular los grupos $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e)$ con $i > 0$ que aparecen en la sucesión exacta del teorema 3.10. Probaremos a continuación la existencia de otra sucesión exacta larga que conecta la cohomología de Hochschild de R con dichos grupos.

Aplicando el functor $Hom_{B \otimes_K R^{op}}(R, \cdot)$ a la sucesión exacta de $B \otimes_K R^{op}$ - módulos

$$0 \rightarrow M \rightarrow P_e \rightarrow R \rightarrow 0$$

obtenemos la siguiente sucesión exacta larga de cohomología

$$(6) \quad 0 \rightarrow Hom_{B \otimes_K R^{op}}(R, P_e) \rightarrow Hom_{B \otimes_K R^{op}}(R, R) \rightarrow Ext_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, M) \rightarrow \\ \rightarrow Ext_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) \rightarrow Ext_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, R) \rightarrow \dots$$

Lema 3.13. Sea B una extensión local de un álgebra A por un $A - R$ - bimódulo M . Entonces

$$Hom_{B \otimes_K R^{op}}(R, R) \simeq H^0(R)$$

$$Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(X, Y) \simeq Ext_{R \otimes_K R^{op}}^i(X, Y)$$

para todo $X, Y \in mod(R \otimes_K R^{op})$. En particular, $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, R) \simeq H^i(R)$.

Demostración. Sigue inmediatamente de la estructura de $B \otimes_K R^{op}$ - módulo de R que $Hom_{B \otimes_K R^{op}}(R, R) \simeq H^0(R)$. El resto del lema resulta del Lema 3.7 y el hecho que $R \otimes_K R^{op}$ es una subcategoría convexa de $B \otimes_K R^{op}$. \square

Luego, de acuerdo a los Lemas 3.9 y 3.13, (6) induce una sucesión exacta larga que conecta la cohomología de Hochschild de R con los grupos $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e)$. La misma está dada en el siguiente teorema.

Teorema 3.14. Sea B una extensión local de un álgebra A por un $A - R$ - bimódulo M . Entonces existe una sucesión exacta de K - espacios vectoriales de la forma:

$$0 \rightarrow Ann M_R \cap Z(R) \rightarrow H^0(R) \rightarrow Ext_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, M) \rightarrow Ext_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(R) \rightarrow \dots \rightarrow Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, M) \rightarrow Ext_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_e) \rightarrow H^i(R) \rightarrow \dots$$

Finalizamos esta sección con un ejemplo de aplicación de los resultados obtenidos. Recordemos que si $R = K[x]/\langle x^n \rangle$ los grupos de cohomología de Hochschild de R son conocidos (cf. [W], pag. 304) y que

$$H^i(R) = \begin{cases} R & \text{si } i = 0 \\ R / \langle x^{n-1} \rangle & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3.15. Sea Q el diagrama $\begin{matrix} \circlearrowleft_1 & \xrightarrow{\beta} & \circlearrowleft_2 \\ \alpha & & \gamma \end{matrix}$ y $B = KQ / \langle \alpha^2, \gamma^2, \beta\alpha - \gamma\beta \rangle$.

El álgebra B es la extensión local de $A = K(\circlearrowleft_\gamma) / \langle \gamma^2 \rangle$ por el $A - R$ - bimódulo $M = \tau_{\hat{P}_1} P_1$, con $R = \text{End} P_1^{\text{op}}$. Es decir,

$$B = \begin{pmatrix} R & 0 \\ \tau_{\hat{P}_1} P_1 & A \end{pmatrix}$$

Calculemos los grupos $H^i(B)$, $\forall i \geq 1$. Por el Teorema 3.10 y teniendo en cuenta que $\text{Ann}(M_R) = 0$, tenemos la siguiente sucesión exacta de K - espacios vectoriales

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(B) \rightarrow H^0(A) \rightarrow \text{Ext}_{B \otimes_K R^{\text{op}}}^1(R, P_1) \rightarrow H^1(B) \rightarrow H^1(A) \rightarrow \\ \rightarrow \dots \rightarrow \text{Ext}_{B \otimes_K R^{\text{op}}}^i(R, P_1) \rightarrow H^i(B) \rightarrow H^i(A) \rightarrow \text{Ext}_{B \otimes_K R^{\text{op}}}^{i+1}(R, P_1) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Veamos que $\text{Ext}_{B \otimes_K R^{\text{op}}}^j(R, P_1) = 0$, $\forall j \geq 1$. De aquí resulta que $H^i(B) \simeq H^i(A) = H^i(K[x] / \langle x^2 \rangle) = K$, $\forall i \geq 0$.

Calculamos tales grupos por definición contruyendo una $B \otimes_K R^{\text{op}}$ - resolución inyectiva de P_1 .

Probemos primero que en este caso la aplicación $\phi : P_1 = B.e_1 \rightarrow P_{e_1 \otimes 1} \cdot (e_1 \otimes \alpha + \alpha \otimes 1)$ definida por $\phi(b.e_1) = (b \otimes 1) \cdot (e_1 \otimes \alpha + \alpha \otimes 1)$ para todo $b \in B$, es un $B \otimes_K R^{\text{op}}$ - isomorfismo.

Sean $b \in B$ y $r \in R$. Entonces b y r tienen expresiones K - lineales de la forma:

$$\begin{aligned} b &= k_0 e_1 + k_1 e_2 + k_2 \alpha + k_3 \beta + k_4 \gamma + k_5 \beta \alpha \\ r &= k \cdot 1 + k' \alpha \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \phi[(b \otimes r^\circ).e_1] &= \phi(b e_1 r) = \phi(b r e_1) = (b r \otimes 1) \cdot (e_1 \otimes \alpha + \alpha \otimes 1) = (k_0 k)(e_1 \otimes \alpha) + \\ &+ (k_0 k)(\alpha \otimes 1) + (k_0 k' + k_2 k)(\alpha \otimes \alpha) + (k k_3)(\beta \otimes \alpha) + (k k_3)(\beta \alpha \otimes 1) + \\ &+ (k_3 k' + k_5 k)(\beta \alpha \otimes \alpha) = (b e_1 \otimes r \alpha) + (b \alpha \otimes r e_1) = (b \otimes r^\circ) \phi(e_1) \end{aligned}$$

Vamos ahora que ϕ es un isomorfismo.

$$\begin{aligned}\phi(be_1) = 0 &\iff 0 = (b \otimes 1)(e_1 \otimes \alpha + \alpha \otimes 1) = be_1 \otimes \alpha + b\alpha \otimes 1 = k_0(e_1 \otimes \alpha) + \\ &+ k_2(\alpha \otimes \alpha) + k_3(\beta \otimes \alpha) + (k_5 + k_3)(\beta\alpha \otimes \alpha) + k_0(\alpha \otimes 1) + \\ &+ k_3(\beta\alpha \otimes 1)\end{aligned}$$

De aquí resulta que $k_0 = k_2 = k_3 = k_5 = 0$ pues $\{e_1 \otimes \alpha, \alpha \otimes \alpha, \beta \otimes \alpha, \beta\alpha \otimes \alpha, \alpha \otimes 1, \beta\alpha \otimes 1\}$ es un conjunto linealmente independiente sobre K . Luego $b = k_1e_2 + k_4\gamma$ y por lo tanto $b.e_1 = 0$.

Esto prueba que ϕ es un monomorfismo y como $\dim_K P_1 = \dim_K P_{e_1 \otimes 1}(e_1 \otimes \alpha + \alpha \otimes 1) = 4$ se tiene que ϕ es un isomorfismo.

Se puede ver que el $B \otimes_K R^{op}$ -módulo $P_{e_1 \otimes 1}$ es proyectivo - inyectivo. Más precisamente, $P_{e_1 \otimes 1} = I_{e_2 \otimes 1}$.

Entonces la siguiente sucesión es una $B \otimes_K R^{op}$ -resolución inyectiva de P_1 :

$$0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{\phi} P_{e_1 \otimes 1} \xrightarrow{d_0} P_{e_1 \otimes 1} \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_i} P_{e_1 \otimes 1} \rightarrow \dots$$

con $d_{2k} = e_1 \otimes \alpha - \alpha \otimes 1$ y $d_{2k+1} = e_1 \otimes \alpha + \alpha \otimes 1$ para todo $k \geq 0$.

Luego, como $\text{Hom}_{(B \otimes_K R^{op})}(R, P_{e_1 \otimes 1}) = 0$ se tiene que $\text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^i(R, P_1) = 0 \forall i \geq 1$.

Vale la pena mencionar que para darme cuenta cómo construir la $B \otimes_K R^{op}$ -resolución inyectiva de P_1 utilicé la descripción del diagrama y las relaciones de un producto tensorial de álgebras dada en la sección 1. \square

4. UN CASO PARTICULAR

En esta sección vamos a considerar el caso particular en que B es una extensión local de una K -álgebra A por un $A - R$ -bimódulo M , $B = \begin{pmatrix} R & 0 \\ M & A \end{pmatrix} = KQ_B/I$, con las siguientes hipótesis:

- i) Q_B tiene un único lazo α en e y $R = K[\alpha] / \langle \alpha^i \rangle$ con $i > 1$.
- ii) Si β_1, \dots, β_n son todas las flechas de Q_B con origen en el vértice e que no son lazos, entonces el ideal I está generado por relaciones que no involucran a las flechas β_1, \dots, β_n .

El resultado principal de la sección es el siguiente.

Teorema. Sea B es una extensión local de una K - álgebra A por un $A - R$ - bimódulo M . Si B satisface las condiciones i) y ii) de arriba entonces existe una sucesión exacta de K - espacios vectoriales de la forma:

$$0 \rightarrow H^0(B) \rightarrow H^0(A) \xrightarrow{\Delta_0} \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) \rightarrow H^1(B) \rightarrow H^1(A) \rightarrow H^2(R) \rightarrow \\ \rightarrow \dots \rightarrow \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^j(R, P_e) \rightarrow H^j(B) \rightarrow H^j(A) \rightarrow H^{j+1}(R) \rightarrow \dots$$

donde Δ_0 y los morfismos $H^j(B) \rightarrow H^j(A)$ son los que aparecen en la sucesión exacta del Teorema.3.10.

Para la demostración de este resultado usaremos la sucesión exacta larga dada por el Teorema 3.10. Así, será suficiente probar que $\text{Ext}_{(B \otimes_K R^{op})}^j(R, P_e) \simeq H^i(R)$, $\forall j \geq 2$.

Veremos que en este caso particular es más sencillo calcular los grupos $\text{Ext}_{(B \otimes_K R^{op})}^j(R, M)$ y usar luego la sucesión exacta del Teorema 3.14. Para ello probaremos un resultado que da una $B \otimes_K R^{op}$ - resolución proyectiva de R cuando B es una extensión local que satisface las condiciones i) y ii) de arriba.

Comenzamos con algunos hechos sencillos, válidos para el producto tensorial de K - espacios vectoriales, que serán de utilidad.

Lema 4.1. Sean U y V , K - espacios vectoriales. Entonces:

- a) Dados m vectores linealmente independientes u_1, \dots, u_m de U y n vectores linealmente independientes v_1, \dots, v_n de V , $\{u_i \otimes v_j\}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ es un conjunto linealmente independiente de $U \otimes_K V$.
- b) Si u_1, \dots, u_t son vectores no nulos de U y v_1, \dots, v_t son vectores linealmente independientes de V entonces $u_1 \otimes v_1, \dots, u_t \otimes v_t$ son vectores linealmente independientes de $U \otimes_K V$.

Sea $B = KQ_B/I$ una extensión local de una K - álgebra A por un $A - R$ - bimódulo M . En lo que sigue denotaremos con \mathcal{S} a un conjunto linealmente independiente maximal de

{ caminos $\delta\beta$ de Q_B , no nulos en B , con β una flecha con origen en e que no es un lazo }

y $\#(\mathcal{S})$ al cardinal de \mathcal{S} .

El siguiente lema da una descripción de una K - base del ideal de $B \otimes_K R^{op}$ generado por un elemento cualquiera μ de $R \otimes_K R^{op}$ cuando B satisface las condiciones i) y ii) del comienzo de la sección.

Lema 4.2. *Sea B una extensión local de A por un $A - R$ - bimódulo M satisfaciendo las condiciones i) y ii) del principio. Sea $\mu \in R \otimes_K R^{op}$, $\mathcal{B}_1 = \{b_1, \dots, b_m\}$ una K - base de $(R \otimes_K R^{op}) \mu$ y $\mathcal{B}_2 = \{(\delta\beta \otimes 1).b_i, \delta\beta \in \mathcal{S}, b_i \in \mathcal{B}_1\}$. Entonces $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una K - base de $(B \otimes_K R^{op}) \mu$.*

Demostración. Es fácil ver que \mathcal{B} es un conjunto de generadores del K - espacio vectorial $(B \otimes_K R^{op}) \mu$. Veamos que \mathcal{B} es un conjunto linealmente independiente. Como los elementos de \mathcal{B}_1 son combinación lineal de caminos de $e \otimes 1$ en $e \otimes 1$, y los elementos de \mathcal{B}_2 son combinación lineal de caminos de $e \otimes 1$ en $e(\delta\beta) \otimes 1$ con $\delta\beta \in \mathcal{S}$ (y por lo tanto $e(\delta\beta) \neq e$), resulta que $\langle \mathcal{B} \rangle = \langle \mathcal{B}_1 \rangle \amalg \langle \mathcal{B}_2 \rangle$. Luego, basta probar que \mathcal{B}_2 es un conjunto linealmente independiente.

Consideremos una K - combinación lineal

$$(*) \quad 0 = \sum_{\substack{\delta\beta \in \mathcal{S} \\ 1 \leq j \leq m}} k_{\delta\beta,j} (\delta\beta \otimes 1).b_j$$

y probemos que los escalares $k_{\delta\beta,j}$ son todos nulos. Para cada j , $1 \leq j \leq m$, b_j tiene una expresión de la forma

$$b_j = \sum_{0 \leq s,t \leq i-1} \lambda_{s,t}^{(j)} (\alpha^s \otimes \alpha^t)$$

con $\lambda_{s,t}^{(j)} \in K, \forall 0 \leq s,t \leq i-1, 1 \leq j \leq m$.

Entonces (*) se puede escribir de la siguiente manera:

$$0 = \sum_{0 \leq t \leq i-1} \left(\sum_{0 \leq s \leq i-1} \sum_{\substack{\delta\beta \in \mathcal{S} \\ 1 \leq j \leq m}} k_{\delta\beta,j} \lambda_{s,t}^{(j)} \delta\beta \alpha^s \right) \otimes \alpha^t$$

Sea $u_t = \sum_{0 \leq s \leq i-1} \sum_{\substack{\delta\beta \in \mathcal{S} \\ 1 \leq j \leq m}} k_{\delta\beta,j} \lambda_{s,t}^{(j)} \delta\beta \alpha^s, t = 0, \dots, i-1$. De acuerdo al lema anterior, la

igualdad $0 = u_0 \otimes 1 + \dots + u_{i-1} \otimes \alpha^{i-1}$ sólo es válida si $u_t = 0$ para todo $t = 0, \dots, i-1$.

Como el ideal de las relaciones de B está generado por relaciones que no involucran a las flechas β con origen en e que no son lazos, se tiene que $u_t = 0$ si y sólo si $k_{\delta\beta,j} \lambda_{s,t}^{(j)} = 0$ para todo

$\delta\beta \in \mathcal{S}$, $1 \leq j \leq m$. Dado que para cada j , $1 \leq j \leq m$, existe al menos un par de valores s, t tales que $\lambda_{s,t}^{(j)} \neq 0$ resulta que $k_{\delta\beta, j} = 0$ para todo $\delta\beta \in \mathcal{S}$, $1 \leq j \leq m$. \square

Corolario 4.3. Con las hipótesis del Lema.4.2 se tiene que :

$$a) \dim_K (B \otimes_K R^{op})\mu = [\#(\mathcal{S}) + 1] \dim_K (R \otimes_K R^{op}) \mu$$

$$b) \dim_K P_{e \otimes 1} = \dim_K (B \otimes_K R^{op})(e \otimes 1) = [\#(\mathcal{S}) + 1] \dim_K (R \otimes_K R^{op}) = [\#(\mathcal{S}) + 1] i^2$$

donde \mathcal{S} es el conjunto definido arriba y μ es un elemento de $R \otimes_K R^{op}$.

Mostraremos a continuación una $B \otimes_K R^{op}$ - resolución proyectiva de R cuando B es una extensión local que satisface las condiciones i) y ii) del comienzo de la sección.

Para ello será útil tener en mente una conocida $R \otimes_K R^{op}$ - resolución proyectiva de R . En la siguiente observación recordamos tal resolución y fijamos algunas notaciones necesarias.

Observación 4.4. Si $R = K[x] / \langle x^i \rangle$ entonces la siguiente es una $R \otimes_K R^{op}$ - resolución proyectiva de R (cf. [W], pag. 304):

$$(*) \quad \dots \xrightarrow{d_i} R \otimes_K R^{op} \longrightarrow \dots \xrightarrow{d_1} R \otimes_K R^{op} \xrightarrow{d_0} R \otimes_K R^{op} \xrightarrow{m} R \rightarrow 0$$

donde $m(r' \otimes r^o) = r'.r$, $\forall r' \otimes r^o \in R \otimes_K R^{op}$ y d_{2j}, d_{2j+1} son los morfismos multiplicación por $(1 \otimes x - x \otimes 1)$ y $\sum_{k=0}^{i-1} (x^{i-k-1} \otimes x^k)$ respectivamente, para todo $j \geq 0$. Observemos que (*) es también una sucesión exacta de K - espacios vectoriales.

En adelante notaremos

$$J = \ker m = \text{Im } d_0 = (R \otimes_K R^{op}) (1 \otimes x - x \otimes 1)$$

$$J' = \text{Im } d_1 = (R \otimes_K R^{op}) \left[\sum_{k=0}^{i-1} (x^{i-k-1} \otimes x^k) \right]$$

Entonces

$$\dim_K J = \dim_K (R \otimes_K R^{op}) - \dim_K R = i^2 - i$$

$$\dim_K J' = \dim_K R = i$$

Estas últimas igualdades siguen inmediatamente de las sucesiones exactas cortas de K - espacios vectoriales:

$$0 \rightarrow J \xrightarrow{\text{inc}} R \otimes_K R^{op} \xrightarrow{m} R \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow J' \xrightarrow{\text{inc}} R \otimes_K R^{op} \xrightarrow{d_0} J \rightarrow 0$$

Luego si B es una extensión local satisfaciendo i) y ii), tomando $\mu = (e \otimes \alpha - \alpha \otimes 1)$ y $\mu = \sum_{k=0}^{i-1} (\alpha^{i-k-1} \otimes \alpha^k)$ en el Corolario 4.3 se tiene que :

$$\begin{aligned} \dim_K (B \otimes_K R^{op}) (e \otimes \alpha - \alpha \otimes 1) &= [\#(S) + 1] \dim_K J = [\#(S) + 1] (i^2 - i) \\ \dim_K (B \otimes_K R^{op}) \left[\sum_{k=0}^{i-1} (\alpha^{i-k-1} \otimes \alpha^k) \right] &= [\#(S) + 1] \dim_K J' = [\#(S) + 1] i \end{aligned}$$

□

Estamos en condiciones ahora de probar el teorema que da una $B \otimes_K R^{op}$ - resolución proyectiva de R cuando B es una extensión local que satisface las condiciones i) y ii) del comienzo de la sección.

Teorema 4.5. *Sea B una extensión local de una K - álgebra A por un $A - R$ - bimódulo M satisfaciendo las hipótesis i) y ii) del principio de la sección . Entonces la siguiente es una $B \otimes_K R^{op}$ - resolución proyectiva de R :*

$$\dots \xrightarrow{d_i} P_{(e \otimes 1)} \rightarrow \dots \xrightarrow{d_2} P_{(e \otimes 1)} \xrightarrow{d_1} P_{(e \otimes 1)} \coprod P \xrightarrow{d_0} P_{(e \otimes 1)} \xrightarrow{m(\pi \otimes 1)} R \rightarrow 0$$

donde $P = \prod_{j=1}^n P_{(e(\beta_j) \otimes 1)}$, $\pi : P_e \rightarrow R$ es el epimorfismo $\begin{pmatrix} r & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r$ de la Observación 3.2., $\pi \otimes 1 : P_e \otimes R^{op} = P_{(e \otimes 1)} \rightarrow R \otimes R^{op}$, $m : R \otimes_K R^{op} \rightarrow R$ es la multiplicación $r' \otimes r'' \rightarrow r'r''$, $d_0 = ((e \otimes \alpha - \alpha \otimes 1) \quad (\beta_1 \otimes 1) \quad \dots \quad (\beta_n \otimes 1))$ con $(e \otimes \alpha - \alpha \otimes 1) : P_{(e \otimes 1)} \rightarrow P_{(e \otimes 1)}$ y $(\beta_j \otimes 1) : P_{(e(\beta_j) \otimes 1)} \rightarrow P_{(e \otimes 1)}$ los morfismos dados por multiplicar a derecha por $(e \otimes \alpha - \alpha \otimes 1)$ y $(\beta_j \otimes 1)$ respectivamente; $d_1 = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{i-1} (\alpha^{i-k-1} \otimes \alpha^k) \\ 0 \end{pmatrix}$ con $\sum_{k=0}^{i-1} (\alpha^{i-k-1} \otimes \alpha^k) : P_{(e \otimes 1)} \rightarrow P_{(e \otimes 1)}$ el morfismo multiplicación a derecha por $\sum_{k=0}^{i-1} (\alpha^{i-k-1} \otimes \alpha^k)$ y para $j \geq 1$, $d_{2j} = (e \otimes \alpha - \alpha \otimes 1)$, $d_{2j+1} = \sum_{k=0}^{i-1} (\alpha^{i-k-1} \otimes \alpha^k)$.

Demostración. Como es usual, notaremos $\Omega_1(R) = \ker m(\pi \otimes 1)$ y $\Omega_{i+2}(R) = \ker d_i$, $\forall i \geq 0$.

Claramente $m(\pi \otimes 1)$ es un epimorfismo. Probemos ahora que $\text{Im } d_0 = \Omega_1(R)$.

Recordemos que dada un álgebra $\Lambda = KQ/I$ y un elemento idempotente e_i de Λ , $\tau_{P_i} P_i$ es el Λ - módulo generado por todos los caminos en Q de i en j con $j \neq i$. Teniendo en cuenta este hecho es fácil ver que $(\tau_{P_e} P_e) \otimes R^{op} \simeq \tau_{P_{e \otimes 1}} (P_{e \otimes 1})$.

Del hecho que $d_0(P) \subseteq \tau_{\widehat{P_{e \otimes 1}}} (P_{e \otimes 1}) = (\tau_{\widehat{P_e}} P_e) \otimes R^{op}$ y que $\ker \pi = \tau_{\widehat{P_e}} P_e \simeq M$ resulta que $m(\pi \otimes 1)d_0(P) = 0$.

Sea $x \in P_{e \otimes 1}$. Entonces x tiene una expresión de la forma

$$x = \sum_{j,k=0}^{i-1} \lambda_{jk} (\alpha^j \otimes \alpha^k) + \delta'$$

con $\delta' \in \tau_{\widehat{P_{e \otimes 1}}} (P_{e \otimes 1})$. Luego

$$d_0(x) = \sum_{j,k=0}^{i-1} \lambda_{jk} (\alpha^j \otimes \alpha^k) (e \otimes \alpha - \alpha \otimes 1) + \delta,$$

con $\delta \in \tau_{\widehat{P_{e \otimes 1}}} (P_{e \otimes 1})$ y de aquí

$$m(\pi \otimes 1)d_0(x) = \sum_{j,k=0}^{i-1} \lambda_{jk} (\alpha^j \otimes \alpha^k) m(\pi \otimes 1)(e \otimes \alpha - \alpha \otimes 1) = 0$$

Tenemos entonces que $\text{Im } d_0 \subseteq \Omega_1(R)$. Veamos que $\dim_K \text{Im } d_0 = \dim_K \Omega_1(R)$.

Sea $d = \dim_K \text{Im } d_0$ y $d' = \dim_K \Omega_1(R)$. Como el ideal I de las relaciones de B está generado por relaciones que no involucran a las flechas β_1, \dots, β_n resulta que $d_0|_P$ es un monomorfismo y que $\text{Im } d_0 = (B \otimes R^{op})(e \otimes \alpha - \alpha \otimes 1) \amalg d_0(P)$, con $d_0(P) \simeq P$.

Por la misma razón se tiene que

$$\#(\mathcal{S}) = \sum_{j=1}^n \dim_K P_{e(\beta_j)}$$

donde \mathcal{S} es el conjunto definido anteriormente.

Luego

$$\#(\mathcal{S}) i = \sum_{j=1}^n \dim_K P_{e(\beta_j)} \cdot i = \sum_{j=1}^n \dim_K P_{e(\beta_j) \otimes 1} = \dim_K P$$

Teniendo en cuenta la Observación 4.4 resulta entonces que

$$\begin{aligned} d &= \dim_K \text{Im } d_0 = \dim_K (B \otimes R^{op})(e \otimes \alpha - \alpha \otimes 1) + \dim_K P = \\ &= [\#(\mathcal{S}) + 1] (i^2 - i) + \#(\mathcal{S}) i = [\#(\mathcal{S}) + 1] i^2 - i \end{aligned}$$

Calculemos $d' = \dim_K \Omega_1(R)$. De la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \Omega_1(R) \rightarrow P_{e \otimes 1} \rightarrow R \rightarrow 0$$

y el Corolario 4.3 se tiene que

$$d' = \dim_K P_{e \otimes 1} - \dim_K R = [\#(S) + 1]i^2 - i = d$$

como queríamos demostrar.

$$\begin{aligned} \text{Veamos ahora que } \Omega_2(R) &= (B \otimes R^{op}) \left(\sum_{k=1}^{i-1} (\alpha^{i-k-1} \otimes \alpha^k) \right). \text{ Es claro que } \Omega_2(R) = \ker d_0 \supseteq \\ &(B \otimes R^{op}) \left(\sum_{k=1}^{i-1} (\alpha^{i-k-1} \otimes \alpha^k) \right) \text{ pues } (e \otimes \alpha - \alpha \otimes 1) \cdot \left(\sum_{k=1}^{i-1} (\alpha^{i-k-1} \otimes \alpha^k) \right) = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \Omega_2(R) \rightarrow P_{e \otimes 1} \amalg P \rightarrow P_{e \otimes 1} \rightarrow R \rightarrow 0$$

resulta que

$$\begin{aligned} \dim_K \Omega_2(R) &= \dim_K P_{e \otimes 1} + \dim_K P - \dim_K P_{e \otimes 1} + \dim_K R = \\ &= \dim_K P + \dim_K R = [\#(S) + 1]i = \dim_K (B \otimes R^{op}) \left[\sum_{k=1}^{i-1} (\alpha^{i-k-1} \otimes \alpha^k) \right] \end{aligned}$$

Hemos probado entonces que $\Omega_2(R) = (B \otimes R^{op}) \left(\sum_{k=1}^{i-1} (\alpha^{i-k-1} \otimes \alpha^k) \right)$. El resto del teorema sigue del hecho que $\Omega_{2k+1}(R) = (B \otimes R^{op})(e \otimes \alpha - \alpha \otimes 1)$ y $\Omega_{2k}(R) = (B \otimes R^{op}) \left[\sum_{k=1}^{i-1} (\alpha^{i-k-1} \otimes \alpha^k) \right]$, $\forall k \geq 1$. \square

Damos a continuación un lema necesario para la demostración del teorema principal.

Lema 4.6. *Sea B una extensión local de A por M y sea X un $(B \otimes_K R^{op})$ -módulo. Entonces $S_{f \otimes 1}$ es factor de composición de $(B \otimes_K R^{op})X$ si y sólo si S_f es factor de composición de ${}_B X$, cualquiera sea el elemento idempotente f de B .*

Demostración. Supongamos que $S_{f \otimes 1}$ es factor de composición de ${}_B X_R$. Entonces existe un $(B \otimes_K R^{op})$ -morfismo no nulo $\theta : P_{f \otimes 1} = P_f \otimes_K R^{op} \rightarrow X$.

La estructura de B -módulo de $P_{f \otimes 1}$ es la inducida por el homomorfismo de anillos $\phi : B \rightarrow B \otimes_K R^{op}$, $\phi(b) = b \otimes 1$. Esto es, $b.x = \phi(b).x = (b \otimes 1).x$. Luego $\mu : P_f \rightarrow P_f \otimes_K R^{op} = P_{f \otimes 1}$ definido por $\mu(x) = x \otimes 1$ es un B -morfismo y $(\theta \mu)(f) = \theta(f \otimes 1) \neq 0$. De aquí, S_f es factor de composición de ${}_B X$.

Recíprocamente supongamos que S_f es factor de composición de ${}_B X$. Entonces existe un B -morfismo no nulo $\mu : P_f \longrightarrow {}_B X$ el cual induce un $B \otimes_K R^{op}$ -morfismo no nulo

$$\mu \otimes 1 : P_f \otimes R^{op} = P_{f \otimes 1} \longrightarrow X \otimes_K R^{op}.$$

Por otro lado, $\theta : X \otimes_K R^{op} \longrightarrow {}_B X_R$, $\theta(x \otimes r^\circ) = xr$ es un $(B \otimes_K R^{op})$ -morfismo y es fácil ver que la composición $\theta(\mu \otimes 1)$ es no nula, lo cual termina la demostración del lema. \square

Estamos en condiciones ahora de probar que con las hipótesis del Teorema 4.3., los grupos $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^j(R, M)$ son nulos para todo $j \geq 2$.

Lema 4.7. Sean B y $P = \prod_{j=1}^n P_{(e(\beta_j) \otimes 1)}$ como en el Teorema 4.3. Entonces

$$Ext_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, M) = Hom_{(B \otimes_K R^{op})}(P, M) = \prod_{j=1}^n e(\beta_j)M$$

$$Ext_{B \otimes_K R^{op}}^j(R, M) = 0, \forall j \geq 2$$

En particular, $dim_K Ext_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, M) = n \cdot dim_K R$.

Demostración. Aplicando el funtor $Hom_{B \otimes_K R^{op}}(\cdot, M)$ a la resolución del Teorema 4.3. obtenemos el complejo:

$$0 \rightarrow Hom_{B \otimes_K R^{op}}(R, M) \longrightarrow Hom_{B \otimes_K R^{op}}(P_{e \otimes 1}, M) \longrightarrow Hom_{B \otimes_K R^{op}}(P_{e \otimes 1} \prod P, M) \longrightarrow \\ \rightarrow Hom_{B \otimes_K R^{op}}(P_{e \otimes 1}, M) \longrightarrow \dots \longrightarrow Hom_{B \otimes_K R^{op}}(P_{e \otimes 1}, M) \longrightarrow \dots$$

Como ${}_B M = \tau_{\widehat{P}_e} P_e$, S_e no es factor de composición de M y de acuerdo al Lema anterior, $S_{e \otimes 1}$ no es factor de composición de $(B \otimes_K R^{op})M$. Luego $Hom_{(B \otimes_K R^{op})}(R, M) = Hom_{(B \otimes_K R^{op})}(P_{e \otimes 1}, M) = 0$ pues $S_{e \otimes 1} = top_{(B \otimes_K R^{op})} P_{e \otimes 1} = top_{(B \otimes_K R^{op})} R$.

De aquí resulta entonces que $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, M) = Hom_{(B \otimes_K R^{op})}(P, M)$ y $Ext_{B \otimes_K R^{op}}^j(R, M) = 0, \forall j \geq 2$. Claramente,

$$Hom_{(B \otimes_K R^{op})}(P, M) = \prod_{j=1}^n Hom_{(B \otimes_K R^{op})}(P_{(e(\beta_j) \otimes 1)}, M) \simeq \prod_{j=1}^n (e(\beta_j) \otimes 1)M = \prod_{j=1}^n e(\beta_j)M$$

\square

Estamos en condiciones ahora de probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.8. Sea B es una extensión local de una K - álgebra A por un $A - R$ - bimódulo M . Si B satisface las condiciones i) y ii) de arriba entonces existe una sucesión exacta de K - espacios vectoriales de la forma:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(B) \rightarrow H^0(A) \xrightarrow{\Delta_0} \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) \rightarrow H^1(B) \rightarrow H^1(A) \rightarrow H^2(R) \\ \rightarrow \dots \rightarrow H^j(R) \leq H^j(B) \rightarrow H^j(A) \rightarrow H^{j+1}(R) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

donde Δ_0 y los morfismos $H^j(B) \rightarrow H^j(A)$ son los que aparecen en la sucesión exacta del Teorema 3.10. Además, $\dim_K \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) = 1 + (n - 1) \dim_K R$.

Demostración. De acuerdo al Teorema 3.10 y teniendo en cuenta que con nuestras hipótesis $\text{Ann}(M_R) = 0$, tenemos la siguiente sucesión exacta de K - espacios vectoriales:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(B) \rightarrow H^0(A) \xrightarrow{\Delta_0} \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) \rightarrow H^1(B) \rightarrow H^1(A) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^2(R, P_e) \rightarrow \dots \rightarrow H^i(B) \rightarrow H^i(A) \rightarrow \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^{i+1}(R, P_e) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

De la sucesión exacta del Teorema 3.14 y el Lema 4.7. resulta que $\text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^{j+1}(R, P_e) \simeq H^{j+1}(R)$ para todo $j \geq 1$, lo cual prueba la primera parte del teorema. Los resultados mencionados prueban además que la siguiente es una sucesión exacta de K - espacios vectoriales:

$$0 \rightarrow H^0(R) \rightarrow \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, M) \rightarrow \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) \rightarrow H^1(R) \rightarrow 0$$

y que $\dim_K \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, M) = n \dim_K R$. Luego

$$\begin{aligned} \dim_K \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) &= \dim_K \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, M) - \dim_K H^0(R) + \dim_K H^1(R) = \\ &= n \dim_K R - \dim_K R + 1 = 1 + (n - 1) \dim_K R \end{aligned}$$

□

Corolario 4.9. Sea B es una extensión local de A por M satisfaciendo las condiciones i) y ii) del comienzo de la sección. Si $H^j(A) = 0$ para todo $j \geq 1$ entonces

$$H^j(B) \simeq \begin{cases} K [\dim_K Z(B) - \dim_K Z(A) + [1 + (n - 1) \dim_K R]] & \text{si } j = 1 \\ H^j(R) = K & \forall j \geq 2 \end{cases}$$

Demostración. Como vimos en la sección 3, antes del ejemplo 3.15, $H^j(R) = K$, $\forall j \geq 2$. Usando este hecho y el Teorema 4.8, resulta que si $H^j(A) = 0$ para todo $j \geq 1$ entonces $H^j(B) \simeq H^j(R) = K$ para todo $j \geq 2$ y tenemos además una sucesión exacta de K - espacios vectoriales de la forma:

$$0 \rightarrow H^0(B) \rightarrow H^0(A) \xrightarrow{\Delta_0} \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) \rightarrow H^1(B) \rightarrow 0$$

Luego, como $H^0(B) = Z(B)$, $H^0(A) = Z(A)$ y $\dim_K \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) = [1 + (n-1) \dim_K R]$ (por el Teorema 4.8), resulta que:

$$\begin{aligned} \dim_K H^1(B) &= \dim_K Z(B) - \dim_K Z(A) + \dim_K \text{Ext}_{B \otimes_K R^{op}}^1(R, P_e) = \\ &= \dim_K Z(B) - \dim_K Z(A) + [1 + (n-1) \dim_K R] \end{aligned}$$

□

REFERENCIAS

- [AR1] Auslander, M. and Reiten, I. *Representation theory of artin algebras I*, Comm. in Algebra 1, (1974).
- [AR2] Auslander, M. and Reiten, I. *Representation theory of artin algebras II*, Comm. in Algebra 2, (1974).
- [AR3] Auslander, M. and Reiten, I. *Representation theory of artin algebras III*, Comm. in Algebra 3, (1975), 239 - 294.
- [AR4] Auslander, M. and Reiten, I. *Representation theory of artin algebras IV*, Comm. in Algebra 5, (1977).
- [AR5] Auslander, M. and Reiten, I. *Representation theory of artin algebras V*, Comm. in Algebra 5, (1977).
- [AR6] Auslander, M. and Reiten, I. *Representation theory of artin algebras VI*, Comm. in Algebra 6, (1978), 257 - 300.
- [APT] Auslander, M., Reiten, I., Platzeck, M.I. and Todorov, G. *Homological theory of idempotent ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. 332, (1992), 667 - 692.
- [Bo] Bongartz, K. *A criterion for finite representation type*, Math. Ann. 269, (1984), 1-12.
- [BoG] Bongartz, K. and Gabriel, P. *Covering spaces in representation theory*, Invent. Math. vol 65, 3, (1981), 331 - 378.
- [BrG] Brestcher, O. and Gabriel, P. *The standard form of a representation - finite algebra*, Bull. Soc. Math. France 111, (1983), 21 - 40.
- [CE] Cartan, H. and Eilenberg, S. *Homological Algebra*. Priceton University Press (1956).
- [CLS] Cibils, C., Larrión, F. y Salmerón, L. *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones*. Monogr. del Inst. de Matem.(11), Univ. Nac. Autónoma de México, 1982.
- [CMaMP] Coelho, F., Marcos, E., Merklen, H. and Platzeck, M.I. *Modules of Infinite Projective Dimension over Algebras whose Idempotent Ideals are Projective*, Tsukuba, Journal of Math. To appear.
- [dIP] de la Peña, J.A. *Tame Algebras. Some Fundamental Notions*. Ergänzungsreihe 95 - 010. Universität Bielefeld.

- [dlPM] de la Peña, J.A and Martins, M. *On local extensions of algebras*. Preprints.
- [Ga] Gabriel, P. *The universal cover of a representation - finite algebra*, Proc. Puebla (1980), Representation theory I, Springer Lect. Notes Math. 903, (1981), 68 - 105.
- [G] Gerstenhaber, M. *On the deformation of rings and algebras*. Ann. Math. 79 (1964) 59-103.
- [Gr] Green, E.L. *Graphs with relations, coverings and group - graded algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 297, (1983), 297 - 310.
- [H] Happel, D. *Hochschild cohomology of finite dimensional algebras*. Séminaire M.-P. Malliavin (Paris, 1987-88), Lecture Notes in Mathematics 1404, Springer - Verlag (1989) 108-126.
- [HaV] Happel, D. and Vossiek, D. *Minimal algebra of infinite representation - type with preprojective component*, Manuscripta Math. 42, (1983), 221-243.
- [Ho] Hochschild, G. *On the cohomology groups of an associative algebra*. Ann. of Math. 46 (1945), 58-67.
- [Ma] Massey, W. *Algebraic Topology: An introduction*. Harcourt. Brace & World, New York, 1967.
- [Pl] Platzeck, M.I. *Artin rings with all idempotent ideals projectives*. Comm. in Algebra, 24(8), 2515 - 2533, (1996).
- [P2] Platzeck, M.I. *Relations and modules of finite projective dimension over algebras whose idempotent ideals are projective*. To appear in Proc. ICRA VIII, CMS-AMS Conf. Proc.
- [W] Weibel, C. *An introduction to homological algebra*. Cambridge studies in advanced mathematics 38, Editorial Board.