INTRODUCCION

El objetivo de estas notas es presentar una introducción a la teoría de inclinación. Introducida hace más de treinta años, la teoría de inclinación ha adquirido más y más importancia con el correr del tiempo, y se ha convertido en una de las partes principales de la teoría moderna de representaciones de álgebras de artin. El contexto general de la teoría de inclinación es el siguiente: comenzando con un álgebra de artin A y un módulo finitamente generado T_A, interesa comparar las categorías de módulos sobre A y sobre el álgebra de endomorfismos $B = \mathrm{End} T_A$. Éste es un problema muy amplio, si no se restringe la clase de módulos T_A a considerar. Así, cuando T_A es un progenerador, la teoría de Morita nos dice que estas categorías son equivalentes. A fin de que esta comparación sea fructífera, una posibilidad es elegir el módulo T_A “muy cercano.ªl progenerador A_A. Un módulo inclinante es un tal módulo y, en una primera aproximación, la teoría de inclinación puede entenderse como una generalización de la teoría de Morita. Sin embargo, con los años, ha mostrado tener muchas otras interpretaciones y aplicaciones en varias áreas de la matemática (para un panorama reciente, remitimos al lector a [R], Ringel, (2007)).

En estas notas suponemos que el lector tiene cierta familiaridad con el álgebra homológica como puede encontrarse, por ejemplo, en los libros de Cartan-Eilenberg (1956) o Rotman (1979), y con los elementos de teoría de representación de álgebras, que pueden encontrarse en el libro de Auslander, Reiten y Smalϕ (1995), ó en los cuatro primeros capítulos del de Assem, Simson y Skowroński (2006). De todas maneras, recordamos en el primer capítulo las nociones necesarias para la comprensión del texto. El segundo capítulo está dedicado a las propiedades de los módulos inclinantes, y culmina con el llamado teorema de inclinación (también llamado Teorema de Brenner y Butler). Finalmente, el tercero está dedicado al estudio de las álgebras inclinadas. Teniendo en cuenta al alumno graduado que se está iniciando en investigación en teoría de representación, nos hemos preocupado en incluir en el texto numerosos ejemplos.

En la actualidad está generalmente aceptado que los orígenes de la teoría de inclinación pueden remontarse a los funtores de reflexión, introducidos por Bernstein, Gelfand y Ponomarev en 1973 para probar el Teorema de Gabriel. Sin embargo, estos funtores fueron definidos considerando un carcaj acíclico, y por lo tanto su uso se restringe a las álgebras hereditarias de dimensión finita sobre un cuerpo. En 1979 Auslander, Platzeck y Reiten definieron los funtores de reflexión sin usar carcajes. Los módulos inclinantes que introdujeron se llaman ahora módulos inclinantes APR y son todavía muy útiles en el estudio de las álgebras de artin. Poco después, el paso decisivo fue tomado por Brenner y Butler (1980), quienes definieron módulos inclinantes por un conjunto de axiomas y probaron varios resultados fundamentales. Happel y Ringel (1982) debilitaron los axiomas dados por Brenner y Butler, y pusieron gran parte de la teoría en su forma actual. También introdujeron la noción de álgebras inclinadas. En estas notas seguimos fundamentalmente el enfoque de Happel y Ringel. Desde entonces, las condiciones que definen a los módulos inclinantes han sido generalizadas más aún, por Miyashita (1986), Happel (1987) y otros. En el mismo trabajo de 1987, Happel prueba uno de los resultados más importantes de la teoría: si B es un álgebra obtenida de A por medio del proceso de inclinación, entonces las categorías derivadas acotadas de A y B son equivalentes. Las conexiones de la teoría inclinante con la categoría derivada, o con la categoría de conglomerados, según es considerada por Buan, Marsh, Reineke, Reiten y Todorov (2006) están más allá del objetivo de estas notas.

Las álgebras inclinadas, introducidas por Happel y Ringel (1982) son las que se obtienen de las álgebras hereditarias por el proceso inclinante. Su importancia se manifiesta en el hecho que un módulo indescomponible sobre un álgebra de artin arbitraria, que no está en un ciclo en la categoría de módulos, es módulo sobre un álgebra inclinada. Como se conoce mucho sobre la categoría de módulos sobre un álgebra hereditaria, también conocemos mucho sobre la categoría de módulos sobre un álgebra inclinada. Claramente, es útil tener un criterio para decidir si un álgebra dada es inclinada o no. Happel y Ringel han observado que la categoría de módulos sobre un álgebra inclinada tiene una configuración combinatoria - llamada rodaja - que permite recuperar el álgebra original. Desde entonces, se han encontrado varias caracterizaciones en el mismo espíritu, por ejemplo, la que encontró Ringel en 1984 y la que es quizás la más eficiente, debida (independientemente) a Liu y Skowroński (1993).

El primer autor agradece apoyo de NSERC de Canadá, los otros tres autores de la Universidad Nacional del Sur y del CONICET. M.I. Platzeck es miembro de la Carrera de Investigador Científico del CONICET.