CAPITULO I

PRELIMINARES

1. ALGEBRAS DE ARTIN

En estas notas todas las álgebras son álgebras de artin, a menos que se indique lo contrario. Recordamos que un álgebra se dice *de artin* si es finitamente generada como módulo sobre su centro, y éste es un anillo artiniano. Para las nociones básicas sobre anillos y módulos, o álgebra homológica, remitimos al lector a [AF, Ro, A].

Nos interesa aquí el estudio de la teoría de representaciones de un álgebra de artin A, es decir, la categoría $\mathrm{mod}A$ de $A-$módulos a derecha finitamente generados. Para ello, podemos suponer sin pérdida de generalidad que A es conexa (es decir, indescomponible como anillo).

Designaremos $\mathrm{ind}A$ a una subcategoría plena de $\mathrm{mod}A$ cuyos objetos forman un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de $A-$módulos indescomponibles. Por el teorema de descomposión única de Krull-Schmidt, todo $A-$módulo a derecha finitamente generado se escribe como suma directa de un número finito de $A-$módulos indescomponibles, y esta descomposición es única a menos de isomorfismo. En virtud de este resultado, la categoría $\mathrm{ind}A$ juega un papel esencial en el estudio de $\mathrm{mod}A$.

Sea $\mathscr{C}$ una subcategoría aditiva de $\mathrm{mod}A$. Escribiremos $M \in \mathscr{C}$ para expresar que M es un objeto de $\mathscr{C}$, y notaremos $\mathrm{ind}\,\mathscr{C}$ la subcategoría plena de $\mathrm{ind}A$ que tiene por objetos un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de objetos de $\mathscr{C}$. Si M es un $A-$módulo, notaremos $\mathrm{add}M$ la subcategoría aditiva de $\mathrm{mod}A$ formada por las sumas directas de sumandos directos de M, y escribiremos $\mathrm{ind}M$ en lugar de $\mathrm{ind}(\mathrm{add}M)$.

Por último, consideraremos los $A-$módulos a izquierda como $A^{op}-$módulos (a derecha).

Una de las propiedades más importantes de las álgebras de artin es la existencia de una dualidad $D : \mathrm{mod}A \to \mathrm{mod}A^{op}$ (ver [AuRS], sección (II.3), p. 37). La utilizaremos de manera esencial en lo que sigue.

Sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de A, arbitrario, pero fijo. A cada i tal que $1 \le i \le n$, se asocia un $A-$módulo indescomponible proyectivo $P_i = e_iA$ y (en virtud de la dualidad) un $A-$módulo indescomponible inyectivo $I_i = D(Ae_i)$. Por otra parte, el cociente $S_i = P_i/\mathrm{rad}P_i$ es simple e isomorfo al zócalo $\mathrm{soc}I_i$ de I_i. De hecho, esta correspondencia entre P_i e I_i es funtorial: Definimos el *funtor de Nakayama*

$$\nu = D\,\mathrm{Hom}_A(-, A) : \mathrm{mod}A \to \mathrm{mod}A.$$

Observamos que hay un isomorfismo de funtores $\nu \cong - \otimes_A DA$.

Lema 1.1. *El funtor de Nakayama induce una equivalencia entre las subcategorías de* $\mathrm{mod}A$ *formadas respectivamente por los proyectivos y los inyectivos, tal que* $\nu(P_i) \cong I_i$*, para cada* i.

Demostración. Sea $\nu' = \mathrm{Hom}_A(DA, -) : \mathrm{mod}A \to \mathrm{mod}A$. Entonces se tienen los siguientes isomorfismos funtoriales:

$\nu(P_i) = D\,\mathrm{Hom}_A(e_iA, A) \cong D(Ae_i) = I_i$;

$\nu'(I_i) = \mathrm{Hom}_A(DA, D(Ae_i)) \cong \mathrm{Hom}_{A^{op}}(Ae_i, A) \cong e_iA = P_i$. $\square$

Lema 1.2. *Para todo $A-$módulo M y todo i tal que $1 \leq i \leq n$, se tiene que* $\mathrm{Hom}_A(P_i, M) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(M, I_i)$.

Demostración. $D\,\mathrm{Hom}_A(M, I_i) = D\,\mathrm{Hom}_A(M, D(Ae_i)) \cong D\,\mathrm{Hom}_{A^{op}}(Ae_i, DM)$
$\cong D(e_i DM) \cong (D^2M)e_i \cong Me_i \cong \mathrm{Hom}_A(e_iA, M) = \mathrm{Hom}_A(P_i, M)$. □

Sea P la suma directa de los proyectivos de $\mathrm{ind}A$, y sea $B = \mathrm{End}\,P_A$. Del teorema clásico de Morita resulta que las categorías $\mathrm{mod}A$ y $\mathrm{mod}B$ son equivalentes, y que dos $B-$módulos proyectivos indes-componibles correspondientes a dos idempotentes ortogonales primitivos distintos no son isomorfos (es decir, B es un álgebra *básica*). Por lo tanto, podemos suponer de partida, sin pérdida de genera-lidad, que A es básica. Salvo mención explícita de lo contrario, supondremos que todas nuestras álgebras son conexas y básicas.

Ahora definimos el grupo de Grothendieck del álgebra A. Sea $\mathscr{F}$ el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo $\widetilde{M}$ de los $A-$módulos finitamente generados M, y $\mathscr{F}'$ el subgrupo generado por todas las expresiones $\widetilde{L} + \widetilde{N} - \widetilde{M}$, tales que

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

es una sucesión exacta en $\mathrm{mod}A$. Entonces el *grupo de Grothendieck* $K_0(A)$ de A es por definición el grupo cociente $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$.

Notamos $[M]$ la imagen de $\widetilde{M}$ en $K_0(A)$.

Sea $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ el subconjunto de $\mathrm{ind}A$ de los módulos simples. Resulta inmediatamente del teorema de Jordan -Hölder que para cada $M \in \mathrm{mod}A$ el número $m_i(M)$ de factores de composición de M isomorfos a S_i depende sólo de M y de S_i (y no de la serie de composición de M). Llamamos *vector dimensión* de M al vector

$$\underline{\dim}(M) = [m_1(M), m_2(M), \ldots, m_n(M)] \in \mathbb{Z}^n.$$

Esto permite definir, para cada i, aplicaciones $m_i : \mathscr{F} \to \mathbb{Z}$ y $\underline{\dim} : \mathscr{F} \to \mathbb{Z}^n$, poniendo $m_i(\widetilde{M}) = m_i(M)$, $\underline{\dim}(\widetilde{M}) = \underline{\dim}(M)$.

Lema 1.3. *Las aplicaciones m_i y $\underline{\dim}$ inducen homomorfismos de grupos*

$$m_i : K_0(A) \to \mathbb{Z} \quad y \quad \underline{\dim} : K_0(A) \to \mathbb{Z}^n.$$

Demostración. Basta probar que, si $0 \to L \to M \to N \to 0$ es una sucesión exacta corta, entonces para cada i se tiene que $m_i(M) = m_i(L) + m_i(N)$.

Podemos suponer que $L \subseteq M$ y $N = M/L$. Si $0 = L_0 \subsetneqq L_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq L_s = L$ es una serie de composición de L, y $0 = M_0/L \subsetneqq M_1/L \subsetneqq \ldots \subsetneqq M_t/L = M/L = N$ una de N, se ve de inmediato que $0 = L_0 \subsetneqq L_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq L_s = L = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq M_t = M$ es una serie de composición de M. De aquí se deduce la igualdad deseada. □

Teorema 1.4. *El grupo $K_0(A)$ es abeliano libre con base $\{[S_1], [S_2], \ldots, [S_n]\}$ y la aplicación* $\underline{\dim}$: $K_0(A) \to \mathbb{Z}^n$ *es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Resulta de la existencia de series de composición de los $A-$módulos y de la definición de $K_0(A)$ que, para todo $A-$módulo M, tenemos:

$$[M] = \sum_{i=1}^{n} m_i(M)\,[S_i]\,.$$

Por lo tanto el conjunto $\{[S_1]\,,[S_2]\,,\ldots,[S_n]\}$ genera $K_0(A)$. En virtud de (1.3), la aplicación $\underline{\dim}\colon K_0(A) \to \mathbb{Z}^n$ es un homomorfismo de grupos. Como el conjunto $\{[S_1]\,,[S_2]\,,\ldots,[S_n]\}$ se aplica biyectivamente sobre la base canónica de $\mathbb{Z}^n$, es linealmente independiente y, luego, una base. Por lo tanto $\underline{\dim}\colon K_0(A) \to \mathbb{Z}^n$ es un isomorfismo. $\square$

Corolario 1.5. *Sea A un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Entonces, para todo i y todo $A-$módulo M, se tiene que:*

$$m_i(M) = \dim_k \mathrm{Hom}_A(P_i, A).$$

Demostración. Sabemos que m_i define un homomorfismo $K_0(A) \to \mathbb{Z}$ tal que

$$m_i(S_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j\,. \end{cases}$$

Por otra parte, $\dim_k \mathrm{Hom}_A(P_i, -)$ también define un homomorfismo $K_0(A) \to \mathbb{Z}$, ya que si $0 \to L \to M \to N \to 0$ es una sucesión exacta, entonces

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P_i, L) \to \mathrm{Hom}_A(P_i, M) \to \mathrm{Hom}_A(P_i, N) \to 0$$

también lo es.

Como k es algebraicamente cerrado, el anillo de endomorfismos de cada módulo simple tiene dimensión 1, y se tiene que

$$\dim_k \mathrm{Hom}_A(P_i, S_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j\,. \end{cases}$$

Como ambos homomorfismos coinciden en la base $\{[S_j]\}_{j=1}^{n}$, son iguales. $\square$

Los carcajes ligados forman una fuente inagotable de ejemplos. Un *carcaj* Q es una cuádrupla ordenada $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ formada por dos conjuntos, Q_0 (el conjunto de *puntos*) y Q_1 (el conjunto de *flechas*); y dos aplicaciones $s, t : Q_1 \to Q_0$ que asocian a cada flecha $\alpha \in Q_1$ su *inicio* $s(\alpha)$ y su *fin* $t(\alpha)$. De esta manera, un carcaj se puede considerar un grafo orientado (que puede tener lazos y flechas múltiples).

Sean Q un carcaj finito y $x, y \in Q_0$. Un *camino* de longitud l de x a y es una sucesión de flechas $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l$ tales que $x = s(\alpha_1)$, $y = t(\alpha_l)$, y $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para todo i tal que $1 \leq i < l$. Además asociamos a cada punto $x \in Q_0$ un camino de longitud nula ε_x llamado el *camino estacionario* en x. Sea k un cuerpo. El *álgebra de caminos* kQ de Q es la $k-$álgebra con base formada por los caminos de Q (incluidos los caminos estacionarios), dotada del producto dado por la composición de caminos:

$$(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l)(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m) = \begin{cases} \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l\beta_1\beta_2\ldots\beta_m & \text{si} \quad t(\alpha_l) = s(\beta_1) \\ 0 & \text{si} \quad t(\alpha_l) \neq s(\beta_1) \end{cases}$$

y prolongado por distributividad y asociatividad teniendo en cuenta que, si x e y son puntos y α es una flecha, entonces

$$\varepsilon_x\alpha = \begin{cases} \alpha & \text{si } s(\alpha) = x \\ 0 & \text{si } s(\alpha) \neq x \end{cases} \quad , \quad \alpha\varepsilon_x = \begin{cases} \alpha & \text{si } t(\alpha) = x \\ 0 & \text{si } t(\alpha) \neq x \end{cases} \quad \text{y} \quad \varepsilon_x\varepsilon_y = \begin{cases} \varepsilon_x & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \; . \end{cases}$$

Una *relación* sobre Q, de x a y, es un elemento de kQ de la forma $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\omega_i$ donde, para cada i, λ_i es un escalar no nulo y ω_i es un camino de longitud mayor o igual que dos de x a y. Un conjunto de relaciones sobre kQ genera un ideal I de kQ. Este ideal I se dice *admisible* si existe un entero p tal que todo camino de Q de longitud mayor o igual que p pertenece a I. Si I es admisible, entonces es fácil de probar que el álgebra cociente kQ/I es de $k-$dimensión finita.

Recíprocamente, si A es un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, entonces existen un carcaj conexo, finito Q y un ideal admisible I de kQ tales que $A \cong kQ/I$ (ver [AuRS] (III.1.10) p. 66 ó [ASS] (II 3.7) p. 64). En este caso, las clases módulo I de los caminos estacionarios, $e_x = \varepsilon_x + I$, forman un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de A (en particular, están en correspondencia biyectiva con los puntos de Q). A cada $x \in Q_0$ corresponde también un $A-$módulo proyectivo indescomponible $P_x = e_xA$. Las clases módulo I de los caminos de Q que comienzan en x forman una base de P_x considerado como k-espacio vectorial. Dualmente, asociado a x tenemos el $A-$módulo inyectivo $I_x = D(Ae_x)$, y la base dual de las clases módulo I de los caminos que terminan en x.

Ejemplo 1.6. Sea A dada por el carcaj Q

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\ 1 & & 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\ & 3 \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

ligado por la relación $\rho = \alpha\beta - \gamma\delta$ (es decir, A es el cociente del álgebra de caminos de Q por el ideal generado por ρ). Escribimos brevemente $\alpha\beta = \gamma\delta$, y la llamamos una *relación de conmutatividad*. Notamos $I = \langle\rho\rangle$. Aquí el proyectivo indescomponible P_1 tiene por base $\{e_1\}$, y es simple; $\{e_2, \beta + I\}$ es una base de P_2, y el proyectivo P_4 tiene por base $\{e_4, \alpha + I, \gamma + I, \alpha\beta + I = \gamma\delta + I\}$. Suele ser más útil representar los módulos por sus sucesiones de Loewy (ver [AuRS] p.12 ó [ASS] p. 160):

$$P_1 = 1,\ P_2 = {\scriptstyle\begin{matrix}2\\1\end{matrix}},\ P_3 = {\scriptstyle\begin{matrix}3\\1\end{matrix}}, P_4 = {\scriptstyle\begin{matrix} & 4 & \\ 2 & & 3 \\ & 1 & \end{matrix}}.$$

Análogamente,

$$I_1 = {}_{2}\overset{4}{\underset{1}{}}{}_{3},\ I_2 = \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix},\ I_3 = \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix},\ I_4 = 4.$$

2. Morfismos irreducibles y sucesiones que casi se parten.

Nuestra herramienta principal en estas notas es la teoría de Auslander-Reiten. A continuación resumimos sus principales resultados. Para una exposición detallada, remitimos al lector a [AuRS] o, para el caso de álgebras sobre cuerpos algebraicamente cerrados, a [ASS]. En toda esta sección, suponemos que A es un álgebra de artin básica y conexa.

Definiciones. (a) Sea $f : L \to M$ un morfismo de $A-$módulos. Entonces f se dice *minimal a izquierda* si $hf = f$ implica que h es un automorfismo; se dice que f *casi se parte a izquierda* si no es una sección y, para todo $u : L \to U$ que no es una sección, existe $u' : M \to U$ tal que $u' f = u$. Por último, se dice que f es un morfismo *minimal que casi se parte a izquierda* si es minimal a izquierda y casi se parte a izquierda.

(b) Sea $g : M \to N$ un morfismo de $A-$módulos. Entonces g se dice *minimal a derecha* si $gk = g$ implica que k es un automorfismo; se dice que g *casi se parte a derecha* si no es una retracción y, para todo $v : V \to N$ que no es una retracción, existe $v' : V \to M$ tal que $gv' = v$. Por último, g se dice *minimal que casi se parte a derecha* si es minimal a derecha y casi se parte a derecha.

Es claro que cada noción "a derecha" es dual de la correspondiente noción "a izquierda". A modo de ejemplo, enunciamos el siguiente lema, cuya sencilla demostración dejamos a cargo del lector.

Lema 2.1. (a) *Sea P un $A-$módulo indescomponible proyectivo. Entonces $f : L \to P$ es minimal que casi se parte a derecha si y sólo si f es un monomorfismo con imagen* $\mathrm{rad}P$.

(b) *Sea I un $A-$módulo indescomponible inyectivo. Entonces $g : I \to N$ es minimal que casi se parte a izquierda si y sólo si g es un epimorfismo con núcleo* $\mathrm{soc}I$. $\square$

Definición. Un morfismo de $A-$módulos $f : M \to N$ se dice *irreducible* si no es una sección ni una retracción y, para toda factorización $f = f_1 f_2$, con $f_1 : X \to N$ y $f_2 : M \to X$, se tiene que f_1 es una retracción o f_2 es una sección.

Es evidente que esta definición es autodual. Notemos que todo morfismo irreducible es un monomorfismo o un epimorfismo: En efecto, sea $f = jp$ la factorización canónica del morfismo irreducible f a través de su imagen. Si f no es un monomorfismo, entonces p tampoco lo es. Por tanto j es a la vez un monomorfismo y una retracción. De aquí sigue que j es un isomorfismo. Luego f es un epimorfismo, como queríamos. Este hecho (con el lema de Fitting) implica que, para todo módulo indescomponible M, no existen morfismos irreducibles de M en M.

El lector puede ver una demostración del siguiente teorema que relaciona los morfismos irreducibles y los morfismos minimales que casi se parten a izquierda (o a derecha) en [AuRS] (V.5.3) p. 167 ó [ASS] (IV, 1.10) p. 103.

Teorema 2.2. (a) *Sea L un módulo indescomponible. Un morfismo* $f : L \to M$ *es irreducible si y sólo si* $M \neq 0$ *y existe un morfismo* $f' : L \to M'$ *tal que* $\begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix} : L \to M \oplus M'$ *es minimal que casi se parte a izquierda.*

(b) *Sea N un módulo indescomponible. Un morfismo* $g : M \to N$ *es irreducible si y sólo si* $M \neq 0$ *y existe un morfismo* $g' : M' \to N$ *tal que* $\begin{bmatrix} g & g' \end{bmatrix} : M \oplus M' \to N$ *es minimal que casi se parte a derecha.* $\square$

Luego, si P es indescomponible proyectivo, un morfismo no nulo $f' : L' \to P$ es irreducible si, y sólo si, existe L'' tal que $L' \oplus L'' \cong \mathrm{rad}P$ y f' es la composición de las inclusiones $L' \hookrightarrow \mathrm{rad}P \hookrightarrow P$. Dualmente, si I es indescomponible inyectivo, un morfismo no nulo $g' : I \to N'$ es irreducible si, y sólo si, existe N'' tal que $N' \oplus N'' \cong I \ / \ \mathrm{soc}I$ y g' es la composición de las proyecciones $I \twoheadrightarrow I \ / \ \mathrm{soc}I \twoheadrightarrow N'$. Esto sigue directamente de (2.1) y (2.2).

Definición. Una sucesión exacta corta de $A-$módulos

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

se dice *que casi se parte* si f es minimal que casi se parte a izquierda y g es minimal que casi se parte a derecha.

Resulta directamente de la definición que una sucesión que casi se parte no se parte. El teorema siguiente (cuya demostración se encuentra en [AuRS] (V.1.4) p. 144 y (V.5.3) p. 167 ó [ASS] (IV 1.13) p.105) resume las propiedades y caracterizaciones de las sucesiones que casi se parten.

Teorema 2.3. *Sea* $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ *una sucesión exacta corta. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *La sucesión casi se parte.*
(b) L *es indescomponible y* g *es un morfismo que casi se parte a derecha.*
(c) N *es indescomponible y* f *es un morfismo que casi se parte a izquierda.*
(d) f *es un morfismo minimal que casi se parte a izquierda.*
(e) g *es un morfismo minimal que casi se parte a derecha.*
(f) L, N *son indescomponibles y* f, g *son irreducibles.*

Además, si estas condiciones se verifican, la sucesión está unívocamente determinada por N (o por L) salvo isomorfismo. $\square$

Para probar la existencia de sucesiones que casi se parten, se consideran las categorías proyectivamente e inyectivamente estables. Sean M y N dos $A-$módulos. Definimos $\mathscr{P}(M,N)$ (e $\mathscr{I}(M,N)$) como el conjunto de morfismos de M en N que se factorizan por $A-$módulos proyectivos (e inyectivos, respectivamente). Es fácil probar que $\mathscr{P}(M,N)$ e $\mathscr{I}(M,N)$ son subgrupos de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ y que, más aún, estos subgrupos definen ideales $\mathscr{P}$ e $\mathscr{J}$ de $\mathrm{mod}A$, respectivamente.

La *categoría proyectivamente estable* $\underline{\mathrm{mod}}A = (\mathrm{mod}A)/\mathscr{P}$ admite por objetos todos los $A-$módulos, y el conjunto de morfismos de M a N en esta categoría es $\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)/\mathscr{P}(M,N)$. De manera dual, los A-módulos son también los objetos de la *categoría inyectivamente estable* $\overline{\mathrm{mod}}A = (\mathrm{mod}A)/\mathscr{J}$, y el conjunto de morfismos de M a N en esta categoría es $\overline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)/\mathscr{J}(M,N)$.

Consideremos ahora un $A-$módulo M y una presentación proyectiva minimal

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to M \to 0.$$

Se define la *traspuesta* TrM de M como el conúcleo de $\mathrm{Hom}_A(f,A)$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,A) \to \mathrm{Hom}_A(P_0,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,A)} \mathrm{Hom}_A(P_1,A) \to TrM \to 0.$$

Usando que un morfismo $f : M \to N$ puede levantarse a un morfismo entre presentaciones proyectivas de M y N, puede definirse un morfismo, la traspuesta de f, de TrM en TrN. Si bien no es único se puede probar que esta operación induce un funtor (de hecho una dualidad) $Tr : \underline{\mathrm{mod}}A \to \underline{\mathrm{mod}}A^{op}$ (ver [AuRS] (IV.1.6) p. 104).

Esto nos permite definir las composiciones $\tau = DTr$ y $\tau^{-1} = TrD$, llamadas las *traslaciones de Auslander-Reiten*. Así, τ es una equivalencia de $\underline{\mathrm{mod}}A$ en $\overline{\mathrm{mod}}A$, de inversa $\tau^{-1} : \overline{\mathrm{mod}}A \to \underline{\mathrm{mod}}A$ (ver [AuRS] (IV.1.9) p. 106 ó [ASS] (IV 2.3) p. 112).

Recordemos que $\nu = D\mathrm{Hom}_A(-,A)$ y $\nu' = \mathrm{Hom}_A(DA,-)$ son los funtores considerados en la sección 1.

Lema 2.4. (a) *Si* $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to M \to 0$ *es una presentación proyectiva minimal, se tiene una sucesión exacta*

$$0 \to \tau M \to \nu P_1 \xrightarrow{\nu f} \nu P_0 \to \nu M \to 0.$$

(b) *Si* $0 \to N \to I^0 \xrightarrow{g} I^1$ *es una copresentación inyectiva minimal, se tiene una sucesión exacta*

$$0 \to \nu' N \to \nu' P_1 \xrightarrow{\nu g} \nu' P_0 \to \tau^{-1} N \to 0.$$

Demostración. Basta probar (a), ya que (b) es dual. La sucesión requerida resulta de aplicar la dualidad D a la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,A) \to \mathrm{Hom}_A(P_0,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,A)} \mathrm{Hom}_A(P_1,A) \to TrM \to 0.$$

□

En lo que sigue, $\mathrm{dp}M$ designará la dimensión proyectiva del A-módulo M, $\mathrm{di}M$ su dimensión inyectiva, y $\mathrm{dim.gl.}A$ la dimensión global del álgebra A.

Corolario 2.5. *Sea M un $A-$módulo.*

(a) $\mathrm{dp}M \leq 1$ *si y sólo si* $\mathrm{Hom}_A(DA, \tau M) = 0$.

(b) $\mathrm{di}M \leq 1$ *si y sólo si* $\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}M, A) = 0$.

Demostración. Basta probar (a), porque (b) es dual. En virtud de (2.4) y (1.1), se tiene un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \nu'\tau M \arrow[r] & \nu'\nu P_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \nu'\nu P_0 \arrow[d, equal] & & \\ & & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

porque $\nu' = \mathrm{Hom}_A(DA, -)$ es exacto a izquierda. Luego $\mathrm{dp}M \leq 1$ si y sólo si $\nu'\tau M = 0$, que es lo que queríamos. □

El siguiente teorema es esencial en la demostración de la existencia de sucesiones que casi se parten:

Teorema 2.6. *(Las fórmulas de Auslander-Reiten). Sean M y N dos A−módulos. Existen isomorfismos*

$$\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong D\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau^{-1}N, M) \cong D\overline{\mathrm{Hom}}_A(N, \tau M),$$

funtoriales en ambas variables.

Demostración. Indicamos las etapas principales de la prueba, dejando el detalle de los cálculos al lector. Necesitamos unas palabras de preparación. Dados dos $A-$módulos X, Y, consideremos el morfismo funtorial

$$\varphi_{X,Y} : Y \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,Y)$$

definido por: $y \otimes f \longmapsto (x \longmapsto yf(x))$ (para $x \in X$, $y \in Y$ y $f : X \to A$). Es claro que si X o Y es proyectivo, entonces $\varphi_{X,Y}$ es un isomorfismo. Por otra parte, Coker $\varphi_{X,Y} \cong \underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y)$: En efecto, una cubierta proyectiva $P \to Y$ induce un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} P \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{X,P}"', "\cong"] & Y \otimes_A \mathrm{Hom}_A(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{X,Y}"'] & 0 & \\ \mathrm{Hom}_A(X,P) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(X,Y) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

que implica nuestra afirmación.

Sean ahora M, N dos $A-$módulos. Evidentemente basta probar el primer isomorfismo del enunciado del teorema, y para ello podemos suponer que N no tiene sumandos directos inyectivos. Una presentación proyectiva minimal

$$P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} \tau^{-1}N \to 0$$

induce, en virtud de (2.4), una sucesión exacta

$$0 \to N \to \nu P_1 \xrightarrow{\nu f_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu f_0} \nu(\tau^{-1}N) \to 0.$$

De aquí se obtiene el complejo

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,\nu P_1) \to \mathrm{Hom}_A(M,\nu P_0) \to \mathrm{Hom}_A(M,\nu(\tau^{-1}N)).$$

Por otro lado, la presentación proyectiva minimal dada induce una sucesión exacta

$$D\,\mathrm{Hom}_A(P_1,M) \to D\,\mathrm{Hom}_A(P_0,M) \to D\,\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}N,M) \to 0.$$

Ahora, si componemos, para un A-módulo X, el dual de $\varphi_{M,X}$ con el isomorfismo de adjunción, obtenemos un morfismo

$$\psi_{M,X} : D\,\mathrm{Hom}_A(M,X) \xrightarrow{D\varphi_{M,X}} D(X \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,A)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_A(X,\nu M)\ ,$$

que es un isomorfismo cuando X es proyectivo. De esta manera tenemos un diagrama conmutativo donde la fila superior es exacta y la fila inferior es un complejo:

$$\begin{tikzcd}
 & D\,\mathrm{Hom}_A(P_1,M) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{M,P_1}"', "\cong"] & D\,\mathrm{Hom}_A(P_0,M) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{M,P_0}"', "\cong"] & D\,\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}N,M) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{M,\tau^{-1}N}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] \mathrm{Hom}_A(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,\nu P_1) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,\nu P_0) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,\nu(\tau^{-1}N)). &
\end{tikzcd}$$

Como νP_1 y νP_0 son inyectivos, deducimos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^1_A(M,N) &= \mathrm{Ker}\ \mathrm{Hom}_A(M,\nu f_0)\ /\ \mathrm{Im}\ \mathrm{Hom}_A(M,\nu f_1) \\
&\cong \mathrm{Ker}\ \psi_{M,\tau^{-1}N} \\
&\cong \mathrm{Ker}\ D\varphi_{M,\tau^{-1}N} \\
&\cong D\ \mathrm{Coker}\ \varphi_{M,\tau^{-1}N} \\
&\cong D\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau^{-1}N,M)
\end{aligned}$$

en virtud del enunciado probado más arriba. □

Corolario 2.7. (a) $\mathrm{dp}M \leq 1$ *implica* $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong D\ \mathrm{Hom}_A(N,\tau M)$.
(b) $\mathrm{di}M \leq 1$ *implica* $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}N,M)$.

Demostración. Basta probar (a), ya que (b) es dual. Si $\mathrm{dp}M \leq 1$, entonces, por (2.5), $\mathrm{Hom}_A(DA,\tau M) = 0$. Por consiguiente, ningún morfismo (no nulo) de N a τM se factoriza por inyectivos. Luego $\mathrm{Hom}_A(N,\tau M) = \overline{\mathrm{Hom}}_A(N,\tau M)$. □

Sea M un módulo indescomponible y no proyectivo. Empleando las fórmulas de Auslander-Reiten se puede probar que el bimódulo $\mathrm{Ext}^1_A(M,\tau M)$ tiene zócalo simple como $\mathrm{End}\,M$-módulo y como $(\mathrm{End}\,\tau M)^{op}$-módulo. Además estos dos zócalos coinciden y cada elemento no nulo del zócalo es una sucesión que casi se parte. Para la demostración de estos resultados, que implican el siguiente teorema de existencia, remitimos al lector a [AuRS] (V.2.1) p. 147, ó [ASS] (IV. 3.1) p 120.

Teorema 2.8. (a) *Para todo $A-$módulo indescomponible no proyectivo M, existe una sucesión que casi se parte*
$$0 \to \tau M \to E \to M \to 0.$$
(b) *Para todo $A-$módulo indescomponible no inyectivo N, existe una sucesión que casi se parte*
$$0 \to N \to F \to \tau^{-1} N \to 0.$$
□

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es que, para todo módulo indescomponible M, existe un morfismo minimal que casi se parte a derecha $f : L \to M$. En efecto, si M es proyectivo, tomamos la inclusión $\mathrm{rad} M \hookrightarrow M$, y si no lo es, existe una sucesión que casi se parte
$$0 \to \tau M \to L \xrightarrow{f} M \to 0.$$
En particular, $L = 0$ si y sólo si M es simple proyectivo. Dualmente, para todo módulo indescomponible M, existe un morfismo minimal que casi se parte a izquierda $g : M \to N$, y $N = 0$ si y sólo si M es simple inyectivo.

Corolario 2.9. (a) *Sea M un $A-$módulo indescomponible no proyectivo. Existe un morfismo irreducible $f : X \to M$ si y sólo si existe un morfismo irreducible $f' : \tau M \to X$.*
(b) *Sea N un $A-$módulo indescomponible no inyectivo. Existe un morfismo irreducible $g : N \to Y$ si y sólo si existe un morfismo irreducible $g' : Y \to \tau^{-1} N$.*

Demostración. Basta probar (a), porque (b) es dual. Sea $f : X \to M$ un morfismo irreducible. Por (2.2), existe $g : X' \to M$ tal que $\begin{bmatrix} f & g \end{bmatrix} : X \oplus X' \to M$ es minimal que casi se parte a derecha. Como M no es proyectivo, por (2.3) hay una sucesión que casi se parte
$$0 \to \tau M \xrightarrow{\begin{bmatrix} f' \\ g' \end{bmatrix}} X \oplus X' \xrightarrow{[f \ g]} M \to 0 ,$$
de la cual resulta el enunciado, usando nuevamente (2.2). □

Corolario 2.10. (a) *Sea S un $A-$módulo simple proyectivo y no inyectivo. Si $f : S \to M$ es irreducible, entonces M es proyectivo.*
(b) *Sea S un $A-$módulo simple inyectivo y no proyectivo. Si $g : N \to S$ es irreducible, entonces N es inyectivo.*

Demostración. Basta probar (a), porque (b) es dual. Podemos suponer que M es indescomponible. Si M no es proyectivo, existe, en virtud de (2.9), un morfismo irreducible $\tau M \to S$. Pero esto contradice la hipótesis de que S es simple proyectivo. □

Corolario 2.11. *Sea M un $A-$módulo indescomponible no proyectivo tal que* $\mathrm{End} M_A$ *es un anillo de división. Entonces cualquier elemento no nulo de* $\mathrm{Ext}^1_A(M, \tau M)$ *es una sucesión que casi se parte.*

Demostración. Por la fórmula de Auslander -Reiten sabemos que

$$\mathrm{Ext}^1_A(M,\tau M) \cong D\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,M) \cong D\,\mathrm{End}\,M_A,$$

de donde $\mathrm{Ext}^1_A(M,\tau M)$ es un espacio vectorial de dimensión 1 sobre $\mathrm{End}\,M_A$, de lo que resulta lo enunciado. $\square$

Ejemplo 2.12. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y A el álgebra dada por el carcaj Q

$$1 \circ \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \circ\, 2$$

ligado por la relación $\alpha\beta = 0$ (es decir, como hemos visto, A es el cociente del álgebra de caminos de Q por el ideal generado por $\alpha\beta$). Procediendo como en (1.6), vemos que los proyectivos e inyectivos indescomponibles son:

$$P_1 = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \qquad P_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$$

$$I_1 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \qquad I_2 = P_2\ .$$

Construiremos la sucesión que casi se parte que termina en 1. Para ello, comencemos por calcular $\tau 1$: Una resolución proyectiva minimal

$$\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \longrightarrow 1 \longrightarrow 0$$

induce, por aplicación de ν, una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow 2 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$$

donde $2 = \tau 1$ (esto se deduce de que $\dim_k \mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) = 1$). Como 1 es simple, $\mathrm{End}(1_A)$ es un anillo de división y (2.11) implica entonces que todo elemento no nulo de $\mathrm{Ext}^1_A(1,2) = \mathrm{Ext}^1_A(1,\tau 1)$ es una sucesión que casi se parte. Un tal elemento es la sucesión

$$0 \longrightarrow 2 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \longrightarrow 1 \longrightarrow 0.$$

De igual manera, para calcular la sucesión que casi se parte que termina en 2, consideramos la resolución proyectiva minimal

$$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \longrightarrow 2 \longrightarrow 0.$$

De aquí deducimos, por aplicación de ν, una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix},$$

porque ahora $\dim_k \mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}) = 1$. Por lo tanto $\tau 2 = 1$. Nuevamente, basta calcular una extensión que no se parte, como la siguiente:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \longrightarrow 2 \longrightarrow 0.$$

Es necesario alertar al lector: El cálculo de una sucesión que casi se parte (y en particular de su término medio) es en general muy difícil.

3. El carcaj de Auslander-Reiten.

El carcaj de Auslander-Reiten permite presentar importante información contenida en las sucesiones que casi se parten bajo forma de diagrama. Para definir este carcaj, necesitamos introducir la noción de *radical* de una categoría de módulos.

Sea A un álgebra de artin y M,N dos $A-$módulos. Se define $\mathrm{rad}_A(M,N)$ como el conjunto de los $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ tales que, para todo $X \in \mathrm{ind}A$ y para todo par de morfismos $g : X \to M$, $h : N \to X$, la composición hfg no es un isomorfismo.

Si M y N son indescomponibles, esta definición se simplifica.

Lema 3.1. *Sean M,N dos $A-$módulos indescomponibles. Entonces* $\mathrm{rad}_A(M,N) = \{f \in \mathrm{Hom}_A(M,N) \mid f$ *no es un isomorfismo*$\}$.

Demostración. Si $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ es un isomorfismo, entonces $M \xrightarrow{id} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{f^{-1}} M$ también lo es. Por consiguiente el miembro izquierdo está contenido en el miembro derecho. Recíprocamente, supongamos que $g : X \to M$, $h : N \to X$ son morfismos tales que $hfg = u$ es un isomorfismo. En particular, h es un epimorfismo y g un monomorfismo. Por otra parte, el morfismo compuesto

$$M \xrightarrow{f} N \overset{h}{\twoheadrightarrow} X \xrightarrow[\cong]{u^{-1}} X \overset{g}{\hookrightarrow} M$$

es un endomorfismo de M. Entonces

$$(gu^{-1}hf)(gu^{-1}hf) = (gu^{-1})(hfg)(u^{-1}hf) = (gu^{-1})u(u^{-1}hf) = gu^{-1}hf$$

es un idempotente. Como M es indescomponible, esto implica que $gu^{-1}hf = 0$ ó $gu^{-1}hf = id_M$. Pero $gu^{-1}hf = 0$ implica $hf = 0$, lo que es imposible, porque hfg es un isomorfismo. Por lo tanto $gu^{-1}hf = id_M$. Análogamente se prueba que el endomorfismo $fgu^{-1}h$ de N es un idempotente no nulo, de donde $fgu^{-1}h = id_N$. Por lo tanto f es inversible a izquierda y a derecha, o sea, es un isomorfismo. $\square$

Es fácil probar que para cada par de módulos M,N, el conjunto $\mathrm{rad}_A(M,N)$ es un subgrupo de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ y, más aún, que estos subgrupos definen un ideal rad_A de $\mathrm{mod}A$ (ver [AuRS] (V.7.1) p. 178).

Entonces podemos definir las potencias de este ideal de la manera usual. En particular, para dos $A-$módulos M,N, se define $\mathrm{rad}^2_A(M,N) = \{f \in \mathrm{Hom}_A(M,N) \mid$ existen $X \in \mathrm{mod}A$ y morfismos $g \in \mathrm{rad}_A(M,X), h \in \mathrm{rad}_A(X,N)$ tales que $f = hg\}$.

Ahora se puede probar que un morfismo $f : M \to N$ entre módulos indescomponibles es irreducible si y sólo si $f \in \mathrm{rad}_A(M,N) \setminus \mathrm{rad}^2_A(M,N)$ (ver [AuRS] (V.7.3) p. 179 ó [ASS] (IV.1.6) p. 100). Esta observación lleva a considerar el cociente

$$\mathrm{Irr}(M,N) = \mathrm{rad}_A(M,N)/\mathrm{rad}^2_A(M,N).$$

Es claro que $\mathrm{Irr}(M,N)$ está munido de una estructura de $\mathrm{End}M-(\mathrm{End}N)^{op}-$bimódulo. Pero nosotros queremos más. Supongamos que M,N son indescomponibles y pongamos:

$$K_M = \mathrm{End}M/\mathrm{rad}\ \mathrm{End}M,\ K_N = \mathrm{End}N/\mathrm{rad}\ \mathrm{End}N.$$

Como $\mathrm{End}M$ y $\mathrm{End}N$ son anillos locales, K_M y K_N son anillos de división. Por otro lado, el radical del anillo $\mathrm{End}M$ coincide con $\mathrm{rad}_A(M,M)$, de donde

$$\mathrm{rad}\ \mathrm{End}N.\ \mathrm{rad}_A(M,N) \subseteq \mathrm{rad}_A^2(M,N),\ \mathrm{rad}_A(M,N).\ \mathrm{rad}\ \mathrm{End}M \subseteq \mathrm{rad}_A^2(M,N).$$

Luego $\mathrm{Irr}(M,N)$ está dotado de una estructura de $K_M - K_N^{op}-$bimódulo, y lo llamamos *bimódulo de los morfismos irreducibles*.

Ahora podemos definir el carcaj de Auslander-Reiten de A.

Definición. Sea A un álgebra de artin. El *carcaj de Auslander-Reiten* $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ de A se define como sigue:

(a) Los puntos de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ son los objetos de $\mathrm{ind}A$.

(b) Hay una (y sólo una) flecha $M \to N$ si y sólo si existe un morfismo irreducible de M a N. Esta flecha está munida de un par de enteros (a,b), llamado su *valuación*, donde $a = \dim_{K_M}\mathrm{Irr}(M,N)$ y $b = \dim_{K_N}\mathrm{Irr}(M,N)$.

Observaciones 3.2. (a) Supongamos que N en $\mathrm{ind}A$ no es proyectivo, y que (a,b) es la valuación de la flecha $M \to N$. Por (2.9), existe una flecha $\tau N \to M$. Se prueba que esta flecha tiene valuación (b,a) (ver [AuRS] (VII.1.5) p. 231).

(b) Como no existen morfismos irreducibles de un indescomponible en sí mismo, el carcaj de Auslander-Reiten no tiene lazos.

(c) Resulta de la definición que $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ es un carcaj finito si y sólo si $\mathrm{ind}A$ tiene sólo un número finito de objetos, es decir, si y sólo si el álgebra A es de representación finita.

(d) Describimos ahora la estructura local del carcaj de Auslander-Reiten. Sea M un $A-$módulo indescomponible no proyectivo. Entonces existe una sucesión que casi se parte

$$0 \to \tau M \to \bigoplus_{i=1}^{n} E_i^{m_i} \to M \to 0,$$

donde los E_i son indescomponibles, y $E_i \ncong E_j$ si $i \neq j$. Tenemos una "malla"

$$\begin{tikzcd}
 & E_1 \arrow[dr, "{(a_1,b_1)}"] \arrow[dd, dotted, no head] & \\
\tau M \arrow[ur, "{(b_1,a_1)}"] \arrow[dr, "{(b_n,a_n)}"'] & & M \\
 & E_n \arrow[ur, "{(a_n,b_n)}"'] &
\end{tikzcd}$$

y el carcaj de Auslander-Reiten es la unión de estas mallas. Esto implica que cada componente conexa del carcaj de Auslander-Reiten es finita o numerable. Generalmente, un carcaj de Auslander-Reiten admite infinitas componentes conexas. Por otra parte, si una componente conexa Γ de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ es finita, entonces $\Gamma = \Gamma(\mathrm{mod}A)$ y en particular A es de representación finita. Este enunciado es conocido bajo el nombre de teorema de Auslander (ver [AuRS] (VII.2.1) p. 233 ó [ASS] (IV.5.4) p. 141).

Ahora analizamos la definición precedente en el siguiente caso particular de gran importancia. Sea A un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Entonces, para todo $A-$módulo indescomponible M, tenemos que

$$K_M = \operatorname{End} M/\operatorname{rad}(\operatorname{End} M) \cong k.$$

Así, para toda flecha $M \to N$ de $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ de valuación (a,b), los enteros a y b representan ambos la dimensión del $k-$espacio vectorial $\operatorname{Irr}(M,N)$. Por lo tanto, la información dada sobre $\operatorname{Irr}(M,N)$ por medio de un sola flecha munida de una valuación (a,a), puede darse también por medio de a flechas, todas de M a N y tenemos, en este caso particular, la siguiente definición.

Definición. Sea A un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. El *carcaj de Auslander-Reiten* $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ de A se define como sigue:

(a) Los puntos de $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ son los objetos de $\operatorname{ind} A$.

(b) Las flechas $M \to N$ están en correspondencia biyectiva con los vectores de una $k-$base de $\operatorname{Irr}(M,N)$.

Sigue de (3.2) (a) más arriba que si N no es proyectivo y hay n flechas de M a N, entonces también hay n flechas de τN a M.

Como en la mayoría de los ejemplos que veremos las álgebras son de representación finita, el siguiente resultado nos será útil. La prueba que damos aquí se debe a Bongartz.

Proposición 3.3. *Sea A un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Si A es de representación finita, entonces $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ no tiene flechas múltiples.*

Demostración. Supongamos que existen $M,N \in \operatorname{ind} A$ tales que $\dim_k \operatorname{Irr}(M,N) \geq 2$. Como todo morfismo irreducible es un monomorfismo o un epimorfismo, podemos suponer que $\dim_k M > \dim_k N$. En particular N no es proyectivo y existe una sucesión que casi se parte de la forma

$$0 \to \tau N \to M^2 \oplus E \to N \to 0.$$

Luego $\dim_k \tau N = 2\dim_k M + \dim_k E - \dim_k N > \dim_k M > \dim_k N$. Por otro lado, en virtud de la observación de más arriba, $\dim_k \operatorname{Irr}(\tau N, M) = \dim_k \operatorname{Irr}(M,N) \geq 2$. Entonces, por recurrencia, $\dim_k N < \dim_k \tau N < \dim_k \tau^2 N < \ldots$ y la componente conexa de $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ que contiene a N es infinita, lo que contradice la hipótesis. $\square$

De manera equivalente, (3.3) dice que si A verifica la hipótesis del enunciado, entonces cada flecha de $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ tiene valuación $(1,1)$.

La razón por la cual el carcaj de Auslander-Reiten es tan útil es que puede ser considerado como una primera aproximación de la categoría de módulos. En efecto, definimos por recurrencia el ideal

$$\operatorname{rad}_A^n = \operatorname{rad}_A^{n-1}.\ \operatorname{rad}_A$$

de mod$A$, para cada $n > 1$. Entonces, para A - módulos M y N,

$$\text{rad}_A^n(M,N) = \left\{ \sum_i g_i f_i : g_i \in \text{rad}_A^{n-1}(X_i,N),\ f_i \in \text{rad}_A(M,X_i), X_i \in \ \text{ind}A \right\}.$$

Definimos el *radical infinito* rad_A^∞ de mod$A$ como el ideal

$$\text{rad}_A^\infty = \bigcap_{n \geq 1} \text{rad}_A^n .$$

Tenemos el teorema siguiente (ver [AuRS] (V.7) p.178 ó [ASS] (IV.5.6) p. 143).

Teorema 3.4. *Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo. Si $\text{rad}_A^\infty(M,N) = 0$, entonces f es suma de composiciones de morfismos irreducibles.* $\square$

En particular, se puede probar que un álgebra A es de representación finita si y sólo si $\text{rad}_A^\infty = 0$. En este caso, cada morfismo es suma de composiciones de morfismos irreducibles (entonces, se puede describir a partir del carcaj de Auslander-Reiten).

En general, el carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra arbitraria A contiene esencialmente la información de la categoría cociente modA/rad_A^∞.

El lema siguiente será empleado en el capítulo III.

Lema 3.5. *Sean A un álgebra de artin y M, N dos A - módulos indescomponibles tales que $\text{rad}_A^\infty(M,N) \neq 0$. Entonces, para cada $i \geq 0$, existen*

(a) un camino

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \longrightarrow \ \ldots \ \xrightarrow{f_i} M_i$$

de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles y un morfismo $g \in \text{rad}_A^\infty(M_i,N)$ tales que $g f_i \ldots . f_1 \neq 0$, y

(b) un camino

$$N_i \xrightarrow{g_i} \ldots \longrightarrow N_1 \xrightarrow{g_1} N_0 = N$$

de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles y un morfismo $f \in \text{rad}_A^\infty(M,N_i)$ tales que $g_1 \ldots . g_i f \neq 0$.

Demostración.

Basta probar (a), porque (b) es dual. Consideremos el morfismo minimal que casi se parte a izquierda

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_t \end{bmatrix} : M \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^t E_i$$

donde los módulos E_i son indescomponibles. Como A es un álgebra de artin, su centro $Z(A)$ es un anillo artiniano, por lo que el $Z(A)$-módulo finitamente generado $\text{Hom}_A(E_i,N)$ es artiniano. Por lo tanto existe m_i tal que $\text{rad}_A^\infty(E_i,N) = \text{rad}_A^{m_i}(E_i,N)$ (ver [AuRS] (V.7.2)). Sea m el máximo de los m_i y sea $f \in \text{rad}_A^\infty(M,N)$ un morfismo no nulo. Entonces, en particular,

$f \in \operatorname{rad}_A^{m+1}(M,N)$, de donde $f = \sum\limits_i g_i f_i : f_i \in \operatorname{rad}_A(M,X_i)\,,\; g_i \in \operatorname{rad}_A^m(X_i,N)$, con los $g_i f_i \neq 0$ y X_i en ind$A$ (ver [AuRS] (V.7.4)).

Como f_1 no es un isomorfismo, existe

$$k = \left[\; k_1 \quad \cdots \quad k_t \;\right] : \bigoplus_{i=1}^{t} E_i \longrightarrow X_1$$

tal que $f_1 = kh = \sum\limits_{i=1}^{t} k_i h_i$. Como $g_1 f_1 \neq 0$, existe i tal que $g_1 k_i h_i \neq 0$, con $g_1 k_i : E_i \to N$ en $\operatorname{rad}^m(E_i,N) = \operatorname{rad}^\infty(E_i,N)$, y h_i irreducible. El enunciado sigue por recurrencia. □

Ahora pasamos a la construcción del carcaj de Auslander-Reiten. Esto es, en general, muy difícil, pues requiere información sobre todas las sucesiones que casi se parten de mod$A$. Existe sin embargo una técnica de construcción llamada "del tejido" que consiste en utilizar de manera sistemática ciertos hechos ya probados, a saber:

(1) Las fuentes de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$, esto es, los puntos que no son fin de ninguna flecha, son los módulos simples proyectivos.

(2) Toda flecha que sale de un simple proyectivo llega a un proyectivo.

(3) Toda flecha que llega a un proyectivo, sale de un sumando directo de su radical.

(4) Si un módulo indescomponible L no es inyectivo, y si conocemos el morfismo minimal que casi se parte a izquierda $f : L \to M$, entonces $\tau^{-1}L \cong \operatorname{Coker} f$, y para cada indescomponible X, existe una flecha $X \to \tau^{-1}L$ si y sólo si existe una flecha $L \to X$.

También tenemos a nuestra disposición los enunciados duales.

Ilustramos la técnica con ejemplos. La misma funciona a la perfección con los carcajes de Auslander-Reiten finitos y acíclicos.

Ejemplos 3.6. (a) Sea A el álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] 1\circ & & \\ & \underset{3}{\circ} \arrow[ul] \arrow[dl] & \underset{4}{\circ} \arrow[l] \\ 2\circ & & \end{tikzcd} \; .$$

Los módulos indescomponibles proyectivos son

$$P_1 = 1,\; P_2 = 2,\; P_3 = \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \;\text{ y }\; P_4 = \begin{smallmatrix} & 4 & \\ & 3 & \\ 2 & & 1 \end{smallmatrix}\;.$$

Aquí A es hereditaria, por ser un álgebra de caminos (ver [AuRS] (III.1.4) p. 54 ó [ASS] (VII.1.7) p. 248). Por lo tanto el radical de cada módulo indescomponible proyectivo es también proyectivo. En efecto, rad $P_3 = P_1 \oplus P_2$ y rad $P_4 = P_3$. Ahora se deduce de los pasos (1) y (3) de arriba que hay un subcarcaj pleno de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ de la forma

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & & \\
& \begin{smallmatrix}3\\1\;2\end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix}4\\3\\1\;2\end{smallmatrix} \quad . \\
2 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Como ya están presentes todos los proyectivos, veremos cómo utilizando la propiedad (2) y aplicando sistemáticamente la propiedad (4) podemos llegar a los inyectivos, con lo que completaremos el carcaj de Auslander-Reiten. Así , en virtud de (2), el morfismo minimal que casi se parte a izquierda que sale de 1 es la inclusión $1 \to \begin{smallmatrix}3\\1\;2\end{smallmatrix}$. Por lo tanto, $\tau^{-1}1$ es el conúcleo en la sucesión que casi se parte

$$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix}3\\1\;2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to 0\ .$$

Análogamente, $\tau^{-1}2$ es el conúcleo en la sucesión que casi se parte

$$0 \to 2 \to \begin{smallmatrix}3\\1\;2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \to 0\ .$$

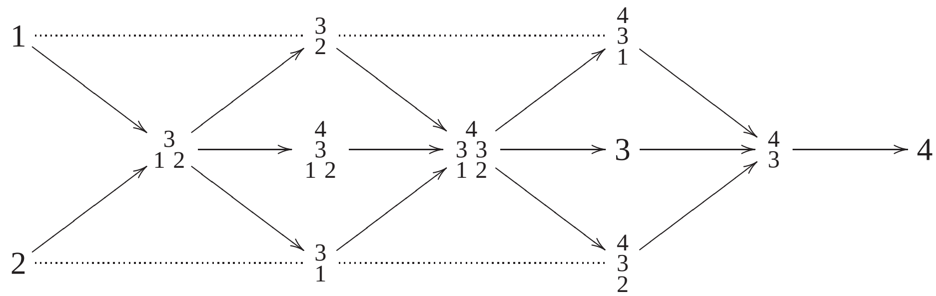
Así tenemos el subcarcaj de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \\
& \begin{smallmatrix}3\\1\;2\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{smallmatrix}4\\3\\1\;2\end{smallmatrix} \\
2 \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \quad .
\end{tikzcd}$$

Veamos que el morfismo $\begin{smallmatrix}3\\1\;2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\1\;2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$ es minimal que casi se parte a izquierda. Es claro que cada uno de los tres morfismos $\begin{smallmatrix}3\\12\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\1\;2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\3\\1\;2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\1\;2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$ es irreducible. Supongamos que X es indescomponible y que $\begin{smallmatrix}3\\1\;2\end{smallmatrix} \to X$ es irreducible. Si X es proyectivo, entonces $\begin{smallmatrix}3\\12\end{smallmatrix}$ es sumando directo de su radical (y por lo tanto $X = \begin{smallmatrix}4\\3\\1\;2\end{smallmatrix}$). Si X no es proyectivo, entonces existe un morfismo irreducible $\tau X \to \begin{smallmatrix}3\\12\end{smallmatrix}$ (de donde $\tau X = 1$ ó $\tau X = 2$, y luego $X = \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ ó $X = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$ respectivamente). Esto muestra lo que queríamos. Por consiguiente, $\tau^{-1}\begin{smallmatrix}3\\1\;2\end{smallmatrix}$ es el conúcleo en la sucesión exacta

$$0 \to \begin{smallmatrix}3\\1\;2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\1\;2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&4&\\3&&3\\1&&2\end{smallmatrix} \to 0.$$

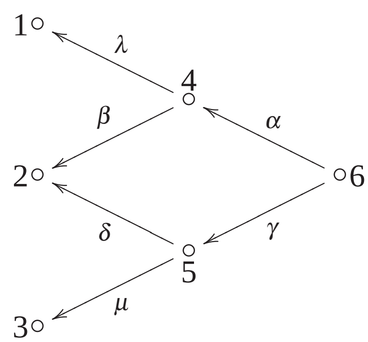
Repitiendo varias veces el procedimiento anterior, obtenemos



y aquí paramos, porque hemos llegado a los inyectivos indescomponibles.

Al graficar, una convención útil es ubicar los trasladados de Auslander-Reiten en la misma línea horizontal. Hemos ilustrado esto con líneas punteadas (cuando el dibujo lo permite).

(b) Sea A dada por el carcaj



ligado por $\alpha\beta = \gamma\delta$, $\alpha\lambda = 0$ y $\gamma\mu = 0$.

Los $A-$módulos indescomponibles proyectivos son:

$$P_1 = 1,\ P_2 = 2,\ P_3 = 3,\ P_4 = \begin{smallmatrix} & 4 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix},\ \ P_5 = \begin{smallmatrix} & 5 & \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix},\ P_6 = \begin{smallmatrix} & 6 & \\ 4 & & 5 \\ & 2 & \end{smallmatrix}.$$

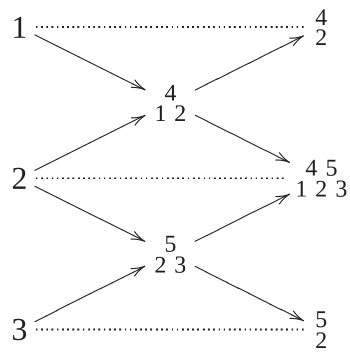
Un carcaj ligado acíclico siempre admite al menos un módulo simple proyectivo (en efecto, éstos corresponden a los pozos del carcaj, esto es, a los puntos que no son inicio de ninguna flecha). En este ejemplo tenemos tres: P_1, P_2 y P_3. Por (2), toda flecha que sale de un simple proyectivo llega a un proyectivo y, en virtud de (3), este último admite al simple proyectivo como sumando de su radical. Esto nos da los morfismos irreducibles

$$P_1 \to P_4 \leftarrow P_2 \to P_5 \leftarrow P_3 .$$

Como ninguno de los módulos de arriba es inyectivo, aplicamos (4). Así $\tau^{-1}1$ es el conúcleo en la sucesión que casi se parte

$$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix} & 4 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \to 0$$

y análogamente obtenemos $\tau^{-1}2$ y $\tau^{-1}3$:

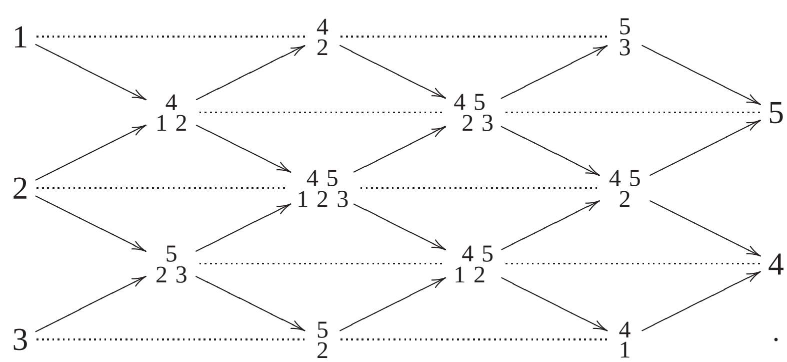


.

Afirmamos que $\begin{smallmatrix}4\\1\;2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\;5\\1\;2\;3\end{smallmatrix}$ es minimal que casi se parte a izquierda: supongamos en efecto que $\begin{smallmatrix}4\\1\;2\end{smallmatrix} \to X$ es irreducible con X indescomponible. Si X fuera proyectivo, entonces $\begin{smallmatrix}4\\1\;2\end{smallmatrix}$ sería un sumando directo de rad$X$. Pero esto es imposible, por lo tanto X no es proyectivo y existe un morfismo irreducible $\tau X \to \begin{smallmatrix}4\\1\;2\end{smallmatrix}$. Esto implica que $\tau X = 1$ ó $\tau X = 2$, y luego $X = \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$ ó $X = \begin{smallmatrix}4\;5\\1\;2\;3\end{smallmatrix}$. Por consiguiente $\tau^{-1}(\begin{smallmatrix}4\\1\;2\end{smallmatrix})$ es el conúcleo en la sucesión exacta

$$0 \to \begin{smallmatrix}4\\1\;2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\;5\\1\;2\;3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\;5\\2\;3\end{smallmatrix} \to 0\,.$$

Continuamos de esta manera, construyendo paso a paso los conúcleos hasta llegar a un inyectivo o a un sumando directo del radical de un proyectivo (en nuestro caso, éste debe ser $\begin{smallmatrix}4\;5\\2\end{smallmatrix}$ =radP_6, que es indescomponible).



.

Aquí, $\begin{smallmatrix}5\\3\end{smallmatrix}$ y $\begin{smallmatrix}4\\1\end{smallmatrix}$ son inyectivos, mientras que $\begin{smallmatrix}4\;5\\2\end{smallmatrix} = \mathrm{rad}P_6$. Luego tenemos un morfismo irreducible $\begin{smallmatrix}4\;5\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}6\\4\;5\\2\end{smallmatrix}$. Por otro lado, el mismo razonamiento de más arriba muestra que el morfismo $\begin{smallmatrix}4\;5\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}6\\4\;5\\2\end{smallmatrix} \oplus 5 \oplus 4$ es minimal que casi se parte a izquierda. Entonces podemos calcular el conúcleo y continuar hasta terminar en los inyectivos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
1 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix}5\\3\end{smallmatrix}} \arrow[dr] & & & & \\
& {\begin{smallmatrix}4\\1\,2\end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix}4\,5\\2\,3\end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 5 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix}6\\4\end{smallmatrix}} \arrow[dr] & \\
2 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix}4\,5\\1\,2\,3\end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix}4\,5\\2\end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r] & {\begin{smallmatrix}6\\4\,5\\2\end{smallmatrix}} \arrow[r] & {\begin{smallmatrix}6\\4\,5\end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 6 \\
& {\begin{smallmatrix}5\\2\,3\end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix}4\,5\\1\,2\end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 4 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix}6\\5\end{smallmatrix}} \arrow[ur] & \\
3 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix}5\\2\end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix}4\\1\end{smallmatrix}} \arrow[ur] & & & & .
\end{tikzcd}$$

Como vemos, en tanto no haya inyectivos ni proyectivos en el camino, la construcción se hace simplemente calculando los conúcleos (o los núcleos, si uno empieza por los inyectivos). Sabemos que un proyectivo va a aparecer cuando aparezca un sumando directo de su radical (dualmente, inmediatamente después de un inyectivo, aparecen los sumandos directos del cociente del inyectivo en cuestión sobre su zócalo).

(c) Sea A dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd}
& \circ 4 \arrow[d, "\gamma"] & \\
\underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\alpha"'] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

ligado por la relación $\beta\alpha = 0$. Aquí $P_1 = 1$, $P_2 = {\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}}$, $P_3 = {\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}}$ y $P_4 = {\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}}$.
Calculamos fácilmente $\Gamma(\mathrm{mod}A)$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
& & & {\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 4 \\
1 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 2 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& {\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & 3 \\
& & {\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}} \arrow[ur] & & & .
\end{tikzcd}$$

(d) Sea, como en el Ejemplo 2.12, A el álgebra dada por el carcaj

$$1 \circ \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \circ\, 2$$

ligado por la relación $\alpha\beta = 0$. Ya sabemos que $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ tiene ciclos orientados, por haber calculado en (2.12) las siguientes sucesiones que casi se parten:

$$0 \longrightarrow 2 \longrightarrow {\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}} \longrightarrow 1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow 2 \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto el método del tejido no se aplica aquí. Sin embargo $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} = P_1 = \mathrm{rad} P_2$. Entonces podemos ubicar los dos proyectivos:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
\vdots & & & & \vdots \\
2 \arrow[dr] & & 1 \arrow[dr] & & 2 \\
\vdots & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] & \vdots \\
& & \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix} & &
\end{tikzcd}$$

(donde identificamos las dos copias de 2). Ahora, se prueba como antes que el morfismo $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow 1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix}$ es minimal que casi se parte a izquierda. Por consiguiente, $\tau^{-1}(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix})$ es el conúcleo en la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow 1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \rightarrow 0.$$

En otros términos, el carcaj de Auslander-Reiten está dado por:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
\vdots & & & & \vdots \\
2 \arrow[dr] & & 1 \arrow[dr] & & 2 \\
\vdots & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] & \vdots \\
& & \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

(donde identificamos las dos copias de 2). Observemos que $\begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix} = I_2$ es inyectivo y que $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} = I_2$ / $\mathrm{soc} I_2$, lo cual confirma que el morfismo $\begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ es irreducible.