CAPITULO II

MODULOS INCLINANTES

1. ALGEBRAS DE ENDOMORFISMOS

La teoría de inclinación consiste en comparar las categorías de módulos sobre un álgebra de artin dada A y sobre el álgebra de endomorfismos B de un A-módulo T, que se elige "suficientemente próximo" del generador A_A.

Sean A un álgebra de artin y T_A un A-módulo a derecha (por el momento, arbitrario). Escribimos $B = \operatorname{End} T_A$. La acción natural de B en T hace de este último un $B-A$-bimódulo, dado que la linealidad de cada elemento $f \in B$ implica

$$f(ta) = f(t)a = (ft)a$$

para todo $t \in T$ y $a \in A$.

Por lo tanto, para todo A-módulo a derecha M, el grupo abeliano $\operatorname{Hom}_A(T,M)$ tiene una estructura de B-módulo a derecha dada por

$$(fb)(t) = f(bt)$$

para $f \in \operatorname{Hom}_A(T,M)$, $b \in B$ y $t \in T$. De la misma manera, para todo B-módulo a derecha X, el grupo $X \otimes_B T$ tiene una estructura de A-módulo a derecha dada por

$$(x \otimes t)a = x \otimes (ta)$$

para $x \in X$, $t \in T$ y $a \in A$. Tenemos así dos funtores aditivos

$$\operatorname{Hom}_A(T,-) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B$$

y

$$- \otimes_B T : \operatorname{mod} B \to \operatorname{mod} A\,.$$

Es bien conocido que estos dos funtores son adjuntos y que la counidad y la unidad de esta adjunción son respectivamente los morfismos

$$\varepsilon_M : \operatorname{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \to M$$

$$f \otimes t \mapsto f(t)$$

(para $f \in \operatorname{Hom}_A(T,M)$ y $t \in T$) y

$$\delta_X : X \to \operatorname{Hom}_A(T, X \otimes_B T)$$

$$x \mapsto (t \mapsto x \otimes t)$$

(para $x \in X$ y $t \in T$).

Lema 1.1. (a) *Sea $T_0 \in \operatorname{add} T$. Entonces ε_{T_0} es un isomorfismo.*

(b) *Sea $P \in \operatorname{add} B$. Entonces δ_P es un isomorfismo.*

Demostración. Probaremos sólo (a), pues la demostración de (b) es similar. Resulta de la aditividad de los funtores involucrados que es suficiente verificar el enunciado cuando $T_0 = T$. En este caso $\varepsilon_T : \mathrm{Hom}_A(T,T) \otimes_B T = B \otimes_B T \to T$ define la estructura de B-módulo de T y entonces es un isomorfismo de A-módulos. □

El resultado principal de esta sección es que el funtor $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ aplica los objetos de $\mathrm{add}T$ sobre los de $\mathrm{add}B$, es decir, sobre los B-módulos proyectivos. Por otro lado, la restricción a $\mathrm{add}T$ de este funtor induce una equivalencia entre $\mathrm{add}T$ y $\mathrm{add}B$ de cuasi$-$inversa $-\otimes_B T$. Por esta razón, la proposición siguiente es frecuentemente llamada “Lema de proyectivización” (ver [AuRS] (II.2.1) p.33 ó [ASS] (VI.3.1) p. 202).

Proposición 1.2. (a) *Sean* $T_0 \in \mathrm{add}T$ *y* M *un* A*-módulo. La aplicación* $f \mapsto \mathrm{Hom}_A(T,f)$ *induce un isomorfismo funtorial*

$$\mathrm{Hom}_A(T_0,M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,T_0),\mathrm{Hom}_A(T,M)).$$

(b) *Los funtores* $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ *y* $-\otimes_B T$ *inducen equivalencias cuasi inversas entre* $\mathrm{add}T$ *y* $\mathrm{add}B$*.*

Demostración. (a) Nuevamente, basta verificar la validez del enunciado cuando $T_0 = T$. En tal caso, los isomorfismos funtoriales

$$\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,T),\mathrm{Hom}_A(T,M)) \cong \mathrm{Hom}_B(B,\mathrm{Hom}_A(T,M)) \cong \mathrm{Hom}_A(T,M)$$

aplican $\mathrm{Hom}_A(T,f)$ sobre $\mathrm{Hom}_A(T,f)(id_T) = f\, id_T = f$.

(b) Sea $T_0 \in \mathrm{add}T$. Entonces $\mathrm{Hom}_A(T,T_0) \in \mathrm{add}\,\mathrm{Hom}_A(T,T) = \mathrm{add}B$. Luego $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ aplica $\mathrm{add}T$ en $\mathrm{add}B$. Asimismo, $-\otimes_B T$ aplica $\mathrm{add}B$ en $\mathrm{add}T$. Resulta de (1.1) que estos funtores (restringidos a $\mathrm{add}\,T$ y $\mathrm{add}\,B$, respectivamente) son cuasi–inversos. □

Nota 1.3. (a) Una consecuencia inmediata de (1.2)(b) es que $B = \mathrm{End}\,T_A$ es básica si y solamente si en la descomposición $T = \bigoplus_{i=1}^{n} T_i$ de T en sumandos directos indescomponibles, se tiene $T_i \ncong T_j$ para $i \neq j$.

(b) En analogía con (1.2)(a) tenemos que, para P en $\mathrm{add}\,B$ y $X \in \mathrm{mod}\,B$, la aplicación $g \mapsto g \otimes T$ induce un isomorfismo $\mathrm{Hom}_B(X,P) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_A(X \otimes_B T, P \otimes_B T)$.

Probamos, a modo de corolario, una versión del famoso Teorema de Gabriel-Mitchell (que nos será útil en la sección (III.6)). Recordamos que un A-módulo M se dice *generado por* T si existe un epimorfismo $T^m \to M$, para algún entero $m > 0$. Se designa por $\mathrm{Gen}T$ a la subcategoría plena de $\mathrm{mod}A$ formada por los A-módulos generados por T.

Ejemplo 1.4. Para todo A-módulo M, se tiene que $\mathrm{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \in \mathrm{Gen}T$. En efecto, siendo $\mathrm{Hom}_A(T,M)$ un B- módulo finitamente generado, resulta que existe un epimorfismo $B^m \to \mathrm{Hom}_A(T,M)$, con $m > 0$. De aquí obtenemos un epimorfismo $T^m \cong B^m \otimes_B T \to \mathrm{Hom}_A(T,M) \otimes T$.

Corolario 1.5. *Sean* $\mathscr{A}$ *una subcategoría abeliana plena de* $\mathrm{mod}A$ *y* $T \in \mathscr{A}$ *un objeto proyectivo tal que* $\mathscr{A} = \mathrm{Gen}T$*. Sea* $B = \mathrm{End}\,T_A$*. Entonces el funtor* $\mathrm{Hom}_A(T,-) : \mathscr{A} \to \mathrm{mod}\,B$ *es una equivalencia de categorías.*

Demostración. Probaremos primero que el funtor $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ es denso. Sea X un B-módulo, y sean P_0, $P_1 \in \mathrm{add}\, B$ tales que hay una sucesión exacta

$$P_1 \xrightarrow{g} P_0 \to X \to 0.$$

Sabemos por (1.2)(b) que existen T_0, $T_1 \in \mathrm{add}\, T$ y un morfismo $f : T_1 \to T_0$ tales que $g = \mathrm{Hom}_A(T, f)$. Sea $M = \mathrm{Coker}\, f$. Aplicando $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ a la sucesión exacta

$$T_1 \to T_0 \to M \to 0$$

obtenemos, dada la proyectividad de T en $\mathscr{A}$, un diagrama conmutativo con filas exactas,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(T,T_1) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_A(T,T_0) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_A(T,M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

del cual resulta lo enunciado.

Basta ahora demostrar que $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ es fielmente pleno, esto es, que para todo M, $N \in \mathscr{A}$ se tiene un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,M), \mathrm{Hom}_A(T,N))$$

dado por $f \mapsto \mathrm{Hom}_A(T, f)$.

En virtud de (1.2)(a) sabemos que lo enunciado es válido si $M \in \mathrm{add}\, T$. Sea M arbitrario. Como $\mathscr{A} = \mathrm{Gen}\, T$, existe un epimorfismo $p : T^m \to M$, con $m > 0$. Como $\mathscr{A}$ es abeliana, $L = \mathrm{Ker}\, p$ pertenece a $\mathscr{A}$, por lo que es a su vez generado por T. Se tiene así una sucesión exacta

$$T_1 \to T_0 \to M \to 0$$

con $T_0, T_1 \in \mathrm{add}\, T$. Se deduce un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(T_0,N) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_A(T_1,N) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,M),\mathrm{Hom}_A(T,N)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,T_0),\mathrm{Hom}_A(T,N)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,T_1),\mathrm{Hom}_A(T,N))
\end{tikzcd}$$

lo que termina la demostración. □

La hipótesis hecha en (1.5) es bastante restrictiva, y es claro que en general la subcategoría $\mathrm{Gen}T$ de $\mathrm{mod}A$ no es equivalente a $\mathrm{mod}\,B$. Entonces es razonable preguntarse qué subcategorías de $\mathrm{mod}\,B$ son equivalentes a la subcategoría $\mathrm{Gen}T$ de $\mathrm{mod}A$. Como uno desea que los funtores $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ y $- \otimes_B T$ sean equivalencias cuasi inversas entre estas dos subcategorías, un punto de partida posible sería tratar de determinar cuándo el morfismo funtorial ε_M es un isomorfismo.

Para esto necesitamos una definición. Sea M un A-módulo. Elegimos un conjunto de generadores $\{f_1, \ldots, f_d\}$ del B-módulo finitamente generado $\mathrm{Hom}_A(T,M)$ y consideramos el morfismo

$$f = [f_1, \ldots, f_d] : T^d \to M.$$

Se dice que f es una $\operatorname{add} T$ *-aproximación a derecha de* M.

Lema 1.6. *Sea M un A-módulo y $f : T_0 \to M$ una* $\operatorname{add} T$*-aproximación a derecha de M (con $T_0 \in \operatorname{add} T$). Entonces*

(a) $\operatorname{Hom}_A(T, f) : \operatorname{Hom}_A(T, T_0) \to \operatorname{Hom}_A(T, M)$*es un epimorfismo.*

(b) $f : T_0 \to M$ *es un epimorfismo si y sólo si M está en* $\operatorname{Gen} T$.

Demostración. (a) Resulta de la definición.

(b) Como la necesidad es evidente, probemos la suficiencia. Sea $M \in \operatorname{Gen} T$. Entonces existe un epimorfismo $g : T^m \to M$, con $m > 0$. Por la definición de f (ver (a)), existe $h : T^m \to T_0$ tal que $g = fh$. Como g es sobreyectiva, también lo es f. $\square$

Es útil enunciar explícitamente el dual. Sea M un A-módulo. Se elige un conjunto de generadores $\{f_1, \ldots, f_d\}$ del B^{op}-módulo finitamente generado $\operatorname{Hom}_A(M, T)$ y se considera el morfismo

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{bmatrix} : M \to T^d.$$

Diremos que f es una $\operatorname{add} T$*-aproximación a izquierda de* M.

Recordamos ahora que un A-módulo M se dice *cogenerado por T* si existe un monomorfismo $M \to T^m$, con $m > 0$. Designamos por $\operatorname{Cogen} T$ a la subcategoría plena de $\operatorname{mod} A$ formada por los A-módulos cogenerados por T. El lema siguiente es dual de 1.6.

Lema 1.7. *Sean M un A-módulo y $f : M \to T_0$ una* $\operatorname{add} T$*–aproximación a izquierda de M (con $T_0 \in \operatorname{add} T$). Entonces*

(a) $\operatorname{Hom}_A(f, T) : \operatorname{Hom}_A(T_0, T) \to \operatorname{Hom}_A(M, T)$ *es un epimorfismo.*

(b) $f : M \to T_0$ *es un monomorfismo si y sólo si M está en* $\operatorname{Cogen} T$. $\square$

Proposición 1.8. *Sea M un A-módulo. Entonces $\varepsilon_M : \operatorname{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \to M$ es un epimorfismo si y solamente si $M \in$* $\operatorname{Gen} T$.

Demostración. Supongamos que ε_M es un epimorfismo. Sabemos por (1.4) que $\operatorname{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \in \operatorname{Gen} T$. Luego $M \in \operatorname{Gen} T$. Recíprocamente, supongamos que $M \in \operatorname{Gen} T$ y sea $f : T_0 \to M$, con $T_0 \in \operatorname{add} T$ una $\operatorname{add} T$ -aproximación a derecha de M. En virtud de (1.6)(b), f es sobreyectivo, por lo que hay una sucesión exacta corta

$$0 \to L \to T_0 \xrightarrow{f} M \to 0.$$

Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ y (1.6)(a), se obtiene otra sucesión exacta corta

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T, L) \to \operatorname{Hom}_A(T, T_0) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(T, f)} \operatorname{Hom}_A(T, M) \to 0.$$

Aplicando a continuación el funtor $- \otimes_B T$ se obtiene un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Hom}_A(T,L) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_L"] & \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{T_0}"] & \operatorname{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & T_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Resulta de (1.1) que ε_{T_0} es un isomorfismo, de donde ε_M es un epimorfismo. $\square$

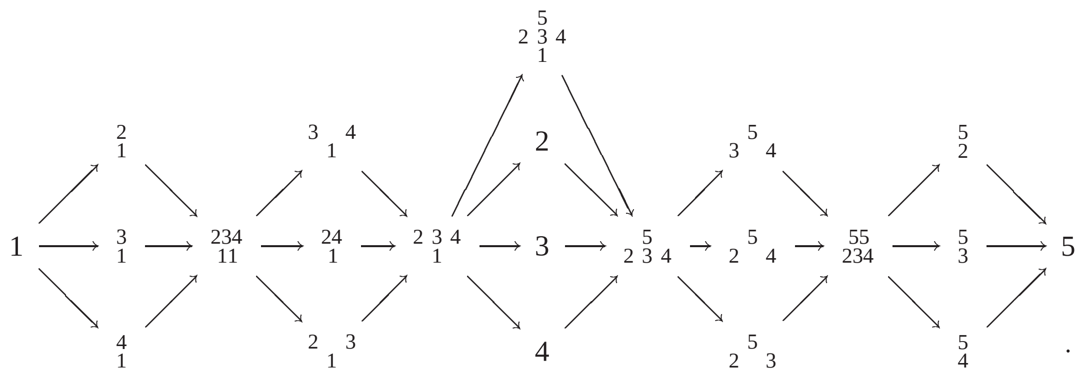
Nota 1.9. (a) Supongamos que en la demostración precedente tuviéramos $L \in \operatorname{add} T$. Entonces, en el diagrama, ε_L es un isomorfismo y por lo tanto ε_M también lo es. Tenemos así que es condición suficiente para que ε_M sea un isomorfismo para todo $M \in \operatorname{Gen} T$, que el núcleo L de una $\operatorname{add} T$-aproximación a derecha esté en $\operatorname{add} T$.

(b) El enunciado dual de 1.8 dice que el morfismo funtorial $M_A \to \operatorname{Hom}_{B^{op}}(\operatorname{Hom}_A(M,T),T)$ definido por $x \mapsto (g \mapsto g(x))$ es inyectivo si y sólo si $M \in \operatorname{Cogen} T$. Nosotros no lo necesitaremos, por lo que no lo demostramos aquí.

Ejemplo 1.10. En toda esta sección no hacemos ninguna hipótesis sobre el A-módulo T. En estas condiciones es difícil esperar una buena relación entre las categorías $\operatorname{mod} A$ y $\operatorname{mod} B$. Así, sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, y A el álgebra dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl] & \\
1 & 3 \arrow[l] & 5 \arrow[ul] \arrow[l] \arrow[dl] \\
 & 4 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

con todas las relaciones de conmutatividad posibles. Entonces el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ de A está dado por



Tomemos $T_1 = \begin{smallmatrix}234\\11\end{smallmatrix}$ y $T_2 = \begin{smallmatrix}234\\1\end{smallmatrix}$. Entonces $T = T_1 \oplus T_2$ tiene exactamente dos sumandos directos indescomponibles no isomorfos. Entonces, por (1.2)(b), el carcaj de $B = \operatorname{End} T_A$ tiene exactamente dos puntos. Veamos que $\dim_k \operatorname{Hom}_A(T_1, T_2) = 2$. Como A es de representación finita, todo no isomorfismo entre módulos indescomponibles es suma de composiciones de morfismos irreducibles (ver (I.3.5) ó [AuRS] (2.7.8) p.183). Como en el carcaj hay tres caminos de T_1 a T_2, la dimensión de $\mathrm{Hom}_A(T_1, T_2)$ es menor o igual que 3. Ahora bien, como existe una sucesión exacta (que casi se parte)

$$0 \to T_1 \to {}^{34}_{\ 1} \oplus {}^{24}_{\ 1} \oplus {}^{23}_{\ 1} \to T_2 \to 0$$

entonces la suma de los tres caminos es cero, y además dos cualesquiera de ellos son linealmente independientes porque sus imágenes tienen distintos factores de composición.

Esto prueba lo deseado.

De la misma manera resulta $\mathrm{rad}\,\mathrm{End}\,T_1 = 0$, $\mathrm{rad}\,\mathrm{End}\,T_2 = 0$ y $\mathrm{Hom}_A(T_2, T_1) = 0$. Entonces, tanto $\mathrm{End}\,T_1$ como $\mathrm{End}\,T_2$ son anillos de división. Como k es algebraicamente cerrado, tenemos que $\mathrm{End}\,T_1 = k$ y $\mathrm{End}\,T_2 = k$. Por consiguiente, B es el álgebra de caminos del carcaj

$$\circ \leftleftarrows \circ\,.$$

Ésta es el álgebra de Kronecker, que es hereditaria y de representación infinita (ver [AuRS] (VIII.7) p. 302). El álgebra de Kronecker es lo que se denomina un álgebra mansa, es decir que es posible parametrizar sus módulos indescomponibles de una dimensión dada. Por el contrario, si $T' = {}^{234}_{\ \ 1} \oplus {}^{\ \ 5}_{234}$, se ve fácilmente que el carcaj de $B' = \mathrm{End}\,T'_A$ es

$$\circ \;\substack{\longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow}\; \circ\,.$$

Este álgebra es lo que se llama un álgebra salvaje: su categoría de módulos contiene la categoría de módulos sobre cualquier álgebra arbitraria. No podemos entonces esperar obtener una descripción completa de $\mathrm{mod}\,B'$. Como A es de representación finita, las categorías de módulos sobre A, B y B' son muy diferentes.

2. Pares de torsión y módulos inclinantes parciales

En la sección precedente estudiamos la subcategoría $\mathrm{Gen}\,T$ de $\mathrm{mod}\,A$. Resulta directamente de la definición de esta subcategoría, que la misma es cerrada por cocientes (imágenes epimórficas). Es útil ver cuándo $\mathrm{Gen}\,T$ es también cerrada por extensiones. En efecto, en este caso, determina un par de torsión.

Definición (Dickson) Un par $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ de subcategorías aditivas plenas de $\mathrm{mod}\,A$ es un *par de torsión* si:

(a) $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$ para todo $M \in \mathscr{T}$ y $N \in \mathscr{F}$

(b) Si $\mathrm{Hom}_A(M, F) = 0$ para todo $F \in \mathscr{F}$, entonces $M \in \mathscr{T}$

(c) Si $\mathrm{Hom}_A(T, N) = 0$ para todo $T \in \mathscr{T}$, entonces $N \in \mathscr{F}$.

En otras palabras, es un par de subcategorías aditivas tales que no hay ningún morfismo no nulo de la primera en la segunda, y son maximales con esta propiedad. Calcular un par de torsión en $\mathrm{mod}\,A$ nos da información sobre la dirección de los morfismos en $\mathrm{mod}\,A$. Las subcategorías $\mathscr{T}$ y $\mathscr{F}$, llamadas respectivamente *clase de torsión* y *clase sin torsión*, tienen caracterizaciones intrínsecas.

Proposición 2.1. (a) *Sea* $\mathscr{T}$ *una subcategoría aditiva plena de* $\mathrm{mod}\,A$*. Existe una subcategoría* $\mathscr{F}$ *tal que* $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ *es un par de torsión si y solamente si* $\mathscr{T}$ *es cerrada por cocientes y extensiones.*

(b) *Sea* $\mathscr{F}$ *una subcategoría aditiva plena de* mod$A$*. Existe una subcategoría* $\mathscr{T}$ *tal que* $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ *es un par de torsión si y solamente si* $\mathscr{F}$ *es cerrada por submódulos y extensiones.*
(c) *Si* $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ *es un par de torsión de* mod$A$*, entonces para todo módulo* M *existe una sucesión exacta corta*

$$0 \to tM \to M \to M/tM \to 0$$

con $tM \in \mathscr{T}$ *y* $M/tM \in \mathscr{F}$*, única en el sentido que toda sucesión exacta corta*

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

con $L \in \mathscr{T}$ *y* $N \in \mathscr{F}$ *es isomorfa a la precedente.*

Demostración. (a) Supongamos que $\mathscr{T}$ es la clase de torsión de un par de torsión $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ y conside-remos una sucesión exacta corta

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

de mod$A$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(-,F)$, con $F \in \mathscr{F}$, se tiene una sucesión exacta a izquierda

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'',F) \to \mathrm{Hom}_A(M,F) \to \mathrm{Hom}_A(M',F).$$

Ahora, $M \in \mathscr{T}$ implica $\mathrm{Hom}_A(M,F) = 0$ para todo $F \in \mathscr{F}$, de donde $\mathrm{Hom}_A(M'',F) = 0$ para todo $F \in \mathscr{F}$ y por lo tanto $M'' \in \mathscr{T}$. Luego $\mathscr{T}$ es cerrada por cocientes. De la misma manera, $M',M'' \in \mathscr{T}$ implica $M \in \mathscr{T}$.

Recíprocamente, sea $\mathscr{T}$ una subcategoría cerrada por cocientes y extensiones. Para todo módulo M, sea tM la *traza* de $\mathscr{T}$ en M, esto es, la suma de las imágenes de todos los morfismos de objetos de $\mathscr{T}$ en M:

$$tM = \sum\{\mathrm{Im}\phi \mid \phi : T \to M, T \in \mathscr{T}\}.$$

Resulta de la hipótesis que $tM \in \mathscr{T}$ y, más aún, que tM es el mayor submódulo de M que está en $\mathscr{T}$. En particular, se tiene que $M \in \mathscr{T}$ si y solamente si $M = tM$. Se tiene así una sucesión exacta corta

$$0 \to tM \to M \to M/tM \to 0. \qquad (*)$$

Afirmamos que $t(M/tM) = 0$. En efecto, pongamos $t(M/tM) = M'/tM$, donde M' es un submódulo de M que contiene a tM. La hipótesis que $\mathscr{T}$ es cerrada por extensiones y la sucesión exacta corta

$$0 \to tM \to M' \to M'/tM \to 0$$

implican que $M' \in \mathscr{T}$. Pero entonces $M' \subseteq tM$ y $t(M/tM) = M'/tM = 0$, lo que prueba lo afirmado.

Escribamos ahora $\mathscr{F} = \{M \in \mathrm{mod}A \,|\, tM = 0\}$. En particular, para todo A-módulo M se tiene $M/tM \in \mathscr{F}$. Veamos que $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ es un par de torsión. Sean $M \in \mathscr{T}$, $N \in \mathscr{F}$. Si un morfismo $f : M \to N$ es no nulo, también lo es la aplicación inducida $M = tM \to \mathrm{Im} f$, de donde $tN \neq 0$, lo que es una contradicción. Entonces $\mathrm{Hom}_A(M,N) = 0$. Supongamos ahora que $\mathrm{Hom}(M,F) = 0$ para todo $F \in \mathscr{F}$. Entonces de la sucesión $(*)$ arriba obtenida resulta que $M/tM = 0$ y por lo tanto $M = tM \in \mathscr{T}$. De manera análoga se demuestra la última condición.

(b) Resulta de (a) por dualidad.

(c) Hemos probado la existencia de la sucesión $(*)$. Falta probar la unicidad. Sea

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

una sucesión exacta con $L \in \mathscr{T}$ y $N \in \mathscr{F}$. Como tM es el mayor submódulo de M perteneciente a $\mathscr{T}$, se tiene una inyección $j : L \to tM$ y por lo tanto un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "j"] & M \arrow[r] \arrow[d, "id"] & N \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & tM \arrow[r] & M \arrow[r] & M/tM \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

Del lema de la serpiente se tiene que $\operatorname{Ker} g \cong tM/L \in \mathscr{T}$. Como $N \in \mathscr{F}$ y $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ es un par de torsión, se tiene que $\operatorname{Ker} g = 0$. Luego $tM \cong L$ y por consiguiente $N \cong M/tM$.

□

La sucesión exacta de (c) se dice *canónica*. Una consecuencia inmediata de la existencia de sucesiones canónicas es que un A-módulo simple está o bien en $\mathscr{T}$, o bien en $\mathscr{F}$.

Es claro que, si T es arbitrario, no hay razón para que $\operatorname{Gen} T$ sea una clase de torsión, es decir, sea cerrada por extensiones (por ejemplo, si A está dada por un carcaj que contiene una flecha $x \to y$, entonces $\operatorname{Gen}(S_x \oplus S_y)$ no es cerrado por extensiones). Daremos una condición suficiente para que éste sea el caso.

Lema 2.2. *Sea T un A-módulo tal que $\operatorname{Ext}^1_A(T, M) = 0$ para todo $M \in \operatorname{Gen} T$. Entonces $\operatorname{Gen} T$ es una clase de torsión. Además, la clase sin torsión correspondiente es $\{M \in \operatorname{mod} A \mid \operatorname{Hom}_A(T, M) = 0\}$.*

Demostración. Para demostrar la primera afirmación basta probar que $\operatorname{Gen} T$ es cerrado por extensiones. Sea $0 \to L \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta corta con $L, N \in \operatorname{Gen} T$. Como $\operatorname{Ext}^1_A(T, L) = 0$, el funtor $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ induce una sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T, L) \to \operatorname{Hom}_A(T, M) \to \operatorname{Hom}_A(T, N) \to 0$$

y obtenemos un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Hom}_A(T,L) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_L"] & \operatorname{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & \operatorname{Hom}_A(T,N) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Sabemos por (II, 1.8) que ε_L y ε_N son epimorfismos. Entonces ε_M también lo es, o sea $M \in \operatorname{Gen} T$.

Sea M sin torsión. Como $T \in \operatorname{Gen} T$, se tiene que $\operatorname{Hom}_A(T, M) = 0$. Recíprocamente, sea M tal que $\operatorname{Hom}_A(T, M) = 0$, y sea $L \in \operatorname{Gen} T$. Entonces existe un epimorfismo $T^m \to L$, con $m > 0$. Por lo tanto $\operatorname{Hom}_A(L, M) = 0$, de donde M es sin torsión. □

Como mencionamos anteriormente, buscamos módulos "próximos" a los generadores.

Definición. Un módulo T se dice *inclinante parcial* si satisface las dos condiciones siguientes:
(T_1) $\mathrm{dp}T \leq 1$
(T_2) $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$.

Por ejemplo, todo módulo proyectivo es inclinante parcial.

La noción dual es la de *módulo coinclinante parcial*. Así, un A-módulo T se dice coinclinante parcial si $\mathrm{di}T \leq 1$ y $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$. Es evidente que T es un A-módulo inclinante parcial si y sólo si DT es un A^{op}-módulo coinclinante parcial. Estas dos nociones (inclinante y coinclinante parcial) coinciden evidentemente si A es un álgebra hereditaria.

Lema 2.3. *Sea T un A-módulo tal que* $\mathrm{dp}T \leq 1$. *Entonces T es inclinante parcial si y sólo si* $\mathrm{Ext}^1_A(T,M) = 0$ *para todo $M \in$* $\mathrm{Gen}\,T$.

Demostración. Supongamos que T es inclinante parcial y sea $M \in \mathrm{Gen}\,T$. Entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \to L \to T^m \to M \to 0,$$

con $m > 0$. Como $\mathrm{dp}T \leq 1$ se obtiene un epimorfismo

$$\mathrm{Ext}^1_A(T,T^m) \to \mathrm{Ext}^1_A(T,M) \to 0.$$

Luego $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$ implica $\mathrm{Ext}^1_A(T,M) = 0$ para $M \in \mathrm{Gen}\,T$. La recíproca es inmediata. $\square$

Una consecuencia directa del lema es que todo módulo inclinante parcial induce un par de torsión $(\mathscr{T}_0(T), \mathscr{F}_0(T))$, con $\mathscr{T}_0(T) = \mathrm{Gen}\,T$ y $\mathscr{F}_0(T) = \{M \in \mathrm{mod}A \mid \mathrm{Hom}_A(T,M) = 0\}$.

Existe una terminología para esto, debida a Auslander y Smalϕ.

Definición. Sea $\mathscr{C}$ una subcategoría aditiva plena de $\mathrm{mod}A$, cerrada por extensiones. Entonces un objeto M de $\mathscr{C}$ se dice
(a) Ext-*proyectivo en* $\mathscr{C}$ si $\mathrm{Ext}^1_A(M,C) = 0$ para todo $C \in \mathscr{C}$.
(b) Ext-*inyectivo en* $\mathscr{C}$ si $\mathrm{Ext}^1_A(C,M) = 0$ para todo $C \in \mathscr{C}$.

El Lema 2.3 se reformula diciendo que si T es un módulo inclinante parcial, entonces es Ext-proyectivo en $\mathrm{Gen}\,T$ (que es cerrado por extensiones, por (2.2)). En consecuencia, todo objeto no nulo $T_0 \in \mathrm{add}\,T$ es también Ext-proyectivo en $\mathrm{Gen}\,T$.

El lema siguiente, debido también a Auslander y Smalϕ, facilita el cálculo de los Ext-proyectivos y de los Ext-inyectivos.

Lema 2.4. *Sea $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ un par de torsión.*
(a) *Si $L \in \mathscr{T}$ es indescomponible, entonces L es* Ext-*proyectivo en $\mathscr{T}$ si y sólo si $\tau L \in \mathscr{F}$.*
(b) *Si $N \in \mathscr{F}$ es indescomponible, entonces N es* Ext-*inyectivo en $\mathscr{F}$ si y sólo si $\tau^{-1}N \in \mathscr{T}$.*

Demostración. Probaremos sólo (a), pues (b) es dual.

Supongamos $\tau L \in \mathscr{F}$ y $M \in \mathscr{T}$. La fórmula de Auslander-Reiten da:

$$\mathrm{Ext}^1_A(L,M) \cong D\,\overline{\mathrm{Hom}}_A(M,\tau L) \subseteq D\,\mathrm{Hom}_A(M,\tau L) = 0.$$

Recíprocamente, sea $L \in \mathscr{T}$ un indescomponible Ext-proyectivo en $\mathscr{T}$ y consideremos la sucesión canónica para τL en el par de torsión $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$

$$0 \to t(\tau L) \xrightarrow{i} \tau L \xrightarrow{p} \tau L / t(\tau L) \to 0.$$

Si $\tau L \notin \mathscr{F}$ entonces p no es un isomorfismo y por lo tanto no es una sección. Pero entonces la sucesión que casi se parte $0 \to \tau L \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} L \to 0$ induce un diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & t(\tau L) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i"] & F \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h"] & L \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d] & L \arrow[r] & 0 \\
 & \tau L / t(\tau L) \arrow[r, "="] \arrow[d] & \tau L / t(\tau L) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & . &
\end{tikzcd}$$

Como $t(\tau L) \in \mathscr{T}$ y L es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}$, la sucesión de arriba se parte. Entonces existe $g'' : L \to F$ tal que $g'g'' = id_L$. Por lo tanto, $g(hg'') = (gh)g'' = g'g'' = id_L$ y la sucesión que casi se parte, se parte, lo que es absurdo. $\square$

En particular, si T es inclinante parcial, entonces $\tau T \in \mathscr{F}_0(T)$.

Volviendo al Lema 2.3, vemos que resulta de su demostración que, si T es un módulo inclinante parcial, entonces $\operatorname{Gen} T \subseteq \{M \mid \operatorname{Ext}^1_A(T, M) = 0\}$. Probaremos ahora que este último conjunto es también una clase de torsión que contiene a $\mathscr{T}_0(T)$.

Lema 2.5. *Sea T un módulo inclinante parcial. Entonces la clase $\mathscr{T}_1(T) = \{M \in \operatorname{mod} A \mid \operatorname{Ext}^1_A(T, M) = 0\}$ es una clase de torsión que contiene a $\mathscr{T}_0(T)$.*

Demostración. Basta demostrar que $\mathscr{T}_1(T)$ es cerrada por cocientes y extensiones. Sea entonces $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una sucesión exacta corta. Como $\operatorname{dp} T \leq 1$ se obtiene una sucesión exacta

$$\operatorname{Ext}^1_A(T, M') \to \operatorname{Ext}^1_A(T, M) \to \operatorname{Ext}^1_A(T, M'') \to 0.$$

Por lo tanto, $M \in \mathscr{T}_1(T)$ implica $M'' \in \mathscr{T}_1(T)$. De la misma manera, $M', M'' \in \mathscr{T}_1(T)$ implican $M \in \mathscr{T}_1(T)$. Por 2.3 tenemos que $\mathscr{T}_0(T) \subseteq \mathscr{T}_1(T)$. $\square$

Como T es evidentemente Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_1(T)$, resulta de (2.4) que τT pertenece a la clase sin torsión correspondiente $\mathscr{F}_1(T)$. En realidad, se puede demostrar que $\mathscr{F}_1(T)$ es la clase $\mathrm{Cogen}(\tau T)$ de todos los módulos cogenerados por τT: la demostración es dual de la de (2.2), utilizando la observación (II.1.9)(b). Nosotros no las necesitaremos aquí.

Antes de pasar a los ejemplos necesitaremos algunas observaciones sobre los módulos inclinantes parciales que son fieles. La razón es que, si bien un A-módulo inyectivo I está in $\mathscr{T}_1(T)$, no siempre sucede que I esté también en $\mathscr{T}_0(T)$. Veremos que éste es el caso cuando T es fiel. Recordamos que un A-módulo M se dice *fiel* si su anulador $\mathrm{Ann} M = \{a \in A \mid Ma = 0\}$ es nulo.

Lema 2.6. *Sea M un A-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) M_A *es fiel.*

(b) *Toda* $\mathrm{add} M$*-aproximación a izquierda* $A_A \to M^d$ *es inyectiva.*

(c) $A_A \in \mathrm{Cogen} M$.

(d) $DA_A \in \mathrm{Gen} M$.

Demostración. (a) implica (b). Sea M un A-módulo fiel. Elijamos un conjunto $\{f_1, \ldots, f_d\}$ de generadores del $\mathrm{End} M_A{}^{op}$-módulo $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ y sea $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{bmatrix} : A \to M^d$ una $\mathrm{add} M$-aproximación a izquierda. Supongamos que $a \in \mathrm{Ker} f$ y $x \in M$. El isomorfismo canónico $M \cong \mathrm{Hom}_A(A, M)$ da un morfismo $h_x : A \to M$ tal que $x = h_x(1)$. La definición de f implica que h_x se factoriza por f. Entonces $f(a) = 0$ implica $h_x(a) = 0$, es decir $xa = 0$. Como x es arbitrario se tiene que $Ma = 0$, de donde $a = 0$.

(b) implica (c). Es trivial.

(c) implica (a). Sean $g : A \to M^d$ un monomorfismo y $a \in A$ tal que $Ma = 0$. Entonces $g(a) = g(1)a = 0$ implica $a = 0$.

(d) es equivalente a (c). En efecto, para $a \in A$, se tiene que $Ma = 0$ si y solamente si $aDM = 0$. Luego M_A es fiel si y solamente si ${}_AA \in \mathrm{Cogen}({}_ADM)$, ó equivalentemente, $DA_A \in \mathrm{Gen} M_A$. $\square$

Supongamos que T es un módulo inclinante parcial. Entonces, como $\mathrm{dp} T \leq 1$, por (I.2.7) se tiene que $\mathrm{Hom}_A(T, \tau T) \cong D\mathrm{Ext}_A^1(T, T) = 0$. Si T es fiel la recíproca también vale:

Lema 2.7. *Sea T un A-módulo. Si T es inclinante parcial entonces* $\mathrm{Hom}_A(T, \tau T) = 0$. *Si T es fiel, la recíproca también vale .*

Demostración. Si T es fiel existe, por (2.6), un epimorfismo $T^m \to DA$, con $m > 0$. Aplicando $\mathrm{Hom}_A(-, \tau T)$ se obtiene un monomorfismo

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(DA, \tau T) \to \mathrm{Hom}_A(T^m, \tau T).$$

Como $\mathrm{Hom}_A(T, \tau T) = 0$, se deduce que $\mathrm{Hom}_A(DA, \tau T) = 0$, de donde $\mathrm{dp} T \leq 1$. Finalmente, $\mathrm{Ext}_A^1(T, T) \cong D\mathrm{Hom}_A(T, \tau T) = 0$. $\square$

En particular, un módulo inclinante parcial fiel T induce un par de torsión $(\mathscr{T}_0(T), \mathscr{F}_0(T))$ con $\mathscr{T}_0(T) = \mathrm{Gen} T$ y $\mathscr{F}_0(T) = \{M \mid \mathrm{Hom}_A(T, M) = 0\}$. Resulta entonces de la fidelidad de T que $DA \in \mathscr{T}_0(T)$.

Una consecuencia es que todo proyectivo-inyectivo pertenece a $\operatorname{add} T$: en efecto, si hubiera un módulo proyectivo $P \in \operatorname{Gen} T$, existiría un epimorfismo $T^m \to P$ con $m > 0$, que debe partirse, pues P es proyectivo, y por lo tanto $P \in \operatorname{add} T$.

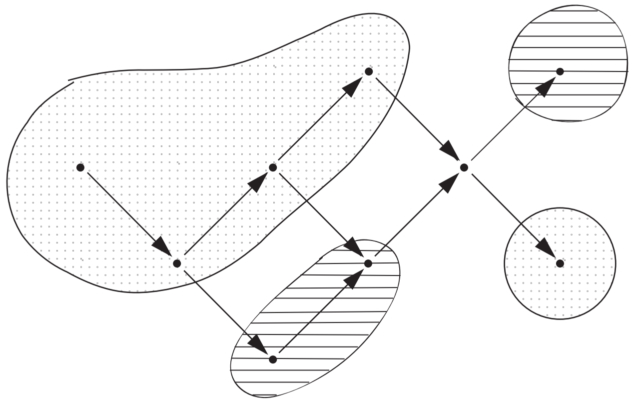
Ejemplo 2.8. Sea A dada por el carcaj

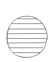
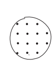
$$\begin{tikzcd} & \overset{4}{\circ} \arrow[d, "\gamma"] & \\ \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\beta"'] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

con relación $\alpha\beta = 0$. Entonces el carcaj de Auslander-Reiten de A está dado por

$$\begin{tikzcd} & & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & 4 \\ 1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & 3 \\ & & \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & & . \end{tikzcd}$$

El módulo $T = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$ es inclinante parcial (por ser proyectivo). Es fácil calcular los indescomponibles generados por T: son $\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$ y 4. Por lo tanto, $\mathscr{T}_0(T) = \operatorname{add}\{\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, 4\}$. La clase sin torsión $\mathscr{F}_0(T)$ es igualmente fácil de calcular, pues contiene solamente a los módulos M tales que $Me_4 = 0$. Esto da $\mathscr{F}_0(T) = \operatorname{add}\{1, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, 2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, 3\}$. Ilustramos esto así:

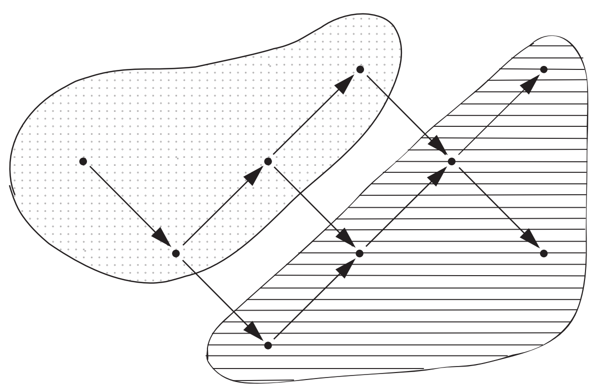


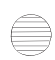
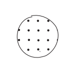
donde $\mathscr{T}_0(T)$ se describe por  y $\mathscr{F}_0(T)$ por  . El único módulo indescomponible que no es ni de torsión ni sin torsión es $\begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}$, y su sucesión canónica es $0 \to \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix} \to 3 \to 0$, dado que $\begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix} \in \mathscr{T}_0(T)$ y $3 \in \mathscr{F}_0(T)$.

Observamos que los Ext-proyectivos en $\mathscr{T}_0(T)$ indescomponibles son $\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$ y 4, puesto que todos están en $\mathscr{T}_0(T)$ y $\tau\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} = 0$, $\tau\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, \tau 4 = \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ están en $\mathscr{F}_0(T)$. Calculamos ahora $(\mathscr{T}_1(T), \mathscr{F}_1(T))$. Como $M \in \mathscr{T}_1(T)$ si y sólo si $\mathrm{Ext}^1_A(T,M) = 0$, se tiene que $\mathscr{T}_1(T) = \mathrm{mod}A$, en tanto que $\mathscr{F}_1(T) = \{0\}$.

Sea $T' = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}$. Entonces T' es fiel. En efecto, para probar que $A_A \in \mathrm{Cogen}T'$, basta probar que para todo A-módulo proyectivo indescomponible P_x existe un monomorfismo $P_x \to T'_0$, con $T'_0 \in \mathrm{add}\,T$, lo que vale pues hay monomorfismos $1 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}$, y $\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix} \in \mathrm{add}\,T'$. Por otro lado, se tiene que $\mathrm{Hom}_A(T', \tau T') \cong \mathrm{Hom}_A(T', 2) = 0$ de donde resulta, en virtud de (2.7), que T' es un módulo inclinante parcial.

Los indescomponibles generados por T' son $\{\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}, 4, 3\}$. Por lo tanto, $\mathscr{T}_0(T') = \mathrm{add}\{\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}, 4, 3\}$. En cuanto a $\mathscr{F}_0(T') = \{M \mid \mathrm{Hom}_A(T', M) = 0\}$, como en un álgebra de representación finita todo morfismo es suma de composiciones de morfismos irreducibles, tenemos que todo módulo indescomponible M tal que no existe ningún camino (de un sumando directo) de T' en M en $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ pertenece a $\mathscr{F}_0(T')$. Luego $\mathrm{add}\{1, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, 2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\} \subseteq \mathscr{F}_0(T')$. Como los otros indescomponibles están en $\mathscr{T}_0(T')$, se tiene que $\mathscr{F}_0(T') = \mathrm{add}\{1, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, 2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\}$. Representamos esto en la figura siguiente

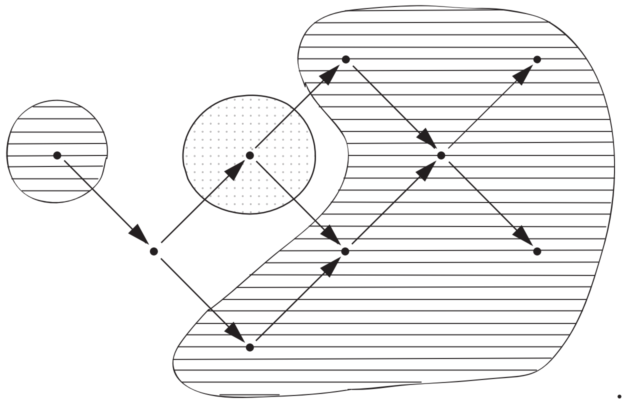


donde, una vez más, la clase de torsión se designa  y la clase sin torsión . En este ejemplo todo indescomponible es, o bien de torsión, o bien sin torsión. Se dice entonces que *el par de torsión es escindido*. Daremos abajo una caracterización de pares de torsión escindidos.

Aquí, los Ext-proyectivos indescomponibles de $\mathscr{T}_0(T')$ son $\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}$ y 4.

Calculemos ahora $(\mathscr{T}_1(T'), \mathscr{F}_1(T'))$. Tenemos que $M \in \mathscr{T}_1(T')$ si y sólo si $\mathrm{Hom}_A(M, 2) = \mathrm{Hom}_A(M, \tau T') \cong D\mathrm{Ext}^1_A(T', M) = 0$, es decir si y sólo si 2 no es un sumando directo de $M/\mathrm{rad}M$. Por consiguiente, $\mathscr{T}_1(T') = \mathrm{add}\{1, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}, 3, 4\}$. En cuanto a $\mathscr{F}_1(T') = \{M \in \mathrm{mod}A \mid \mathrm{Hom}_A(L, M) = 0 \text{ para todo} L \in \mathscr{T}_1(T')\}$, se ve enseguida que $\mathscr{F}_1(T') = \mathrm{add}\{2\}$

(en efecto, se tiene un morfismo $1 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ con $1 \in \mathscr{T}_1(T')$). Representamos esto en la figura siguiente



La sucesión canónica correspondiente al módulo indescomponible $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$, el único que no está en $\mathscr{T}_1(T')$ ni en $\mathscr{F}_1(T')$, es

$$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to 2 \to 0$$

porque $1 \in \mathscr{T}_1(T')$ y $2 \in \mathscr{F}_1(T')$.

Finalmente, los Ext-proyectivos indescomponibles de torsión son 1, $\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}$ y $\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ (pero no $\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$: en efecto, $\tau \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \notin \mathscr{F}_1(T')$).

Según lo prometido, terminaremos con algunos comentarios sobre los pares de torsión escindidos.

Definición. Un par de torsión $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ se dice *escindido* si cada A-módulo indescomponible pertenece, o bien a $\mathscr{T}$, o bien a $\mathscr{F}$.

Éste es el caso, por ejemplo, del par $(\mathscr{T}_0(T'), \mathscr{F}_0(T'))$ en el ejemplo arriba. La siguiente caracterización nos será de utilidad.

Proposición 2.9. *Sea* $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ *un par de torsión de* $\operatorname{mod} A$. *Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ *es escindido.*

(b) *Para todo A-módulo M, la sucesión canónica se parte.*

(c) $\tau^{-1}M \in \mathscr{T}$, *para todo* $M \in \mathscr{T}$.

(d) $\tau N \in \mathscr{F}$, *para todo* $N \in \mathscr{F}$.

Demostración. (a) implica (c). Sea

$$0 \to M \to E \to \tau^{-1}M \to 0$$

la sucesión que casi se parte que comienza en M. Como para todo sumando directo indescomponible E' de E se tiene que $\operatorname{Hom}_A(M, E') \neq 0$, entonces $M \in \mathscr{T}$ implica $E' \notin \mathscr{F}$. Luego $E' \in \mathscr{T}$, por hipótesis. Por consiguiente, $E \in \mathscr{T}$ y entonces $\tau^{-1}M \in \mathscr{T}$.

(c) implica (b). Sea

$$0 \to tM \to M \to M/tM \to 0$$

la sucesión canónica para M. Entonces $\mathrm{Ext}_A^1(M/tM, tM) \cong D\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau^{-1}(tM), M/tM) \subseteq D\,\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}(tM), M/tM) = 0$, pues $\tau^{-1}(tM) \in \mathscr{T}$. Luego la sucesión se parte.

(b) implica (a). Sea M un A-módulo indescomponible. La hipótesis implica que $M = tM \oplus M/tM$. Pero entonces, o bien $M \cong tM \in \mathscr{T}$, o bien $M \cong M/tM \in \mathscr{F}$.

De manera análoga se demuestra la equivalencia de estas condiciones con (d). $\square$

Es fácil ver que la condición (b) equivale a la siguiente:

(b') $\mathrm{Ext}_A^1(M,N) = 0$ para todo $M \in \mathscr{F}$, $N \in \mathscr{T}$.

Esto resulta de la unicidad de la sucesión canónica (ver (2.1)).

Los pares de torsión escindidos serán particularmente útiles en el capítulo siguiente.

3. Módulos inclinantes

Definición. Un A-módulo inclinante parcial T se dice *inclinante* si satisface la propiedad adicional

(T_3) Existe una sucesión exacta corta

$$0 \to A_A \to T'_A \to T''_A \to 0$$

con $T', T'' \in \operatorname{add} T$.

Recordamos que T es inclinante parcial si $\mathrm{dp}T \leq 1$ y $\mathrm{Ext}_A^1(T,T) = 0$. Por ejemplo, todo progenerador es un módulo inclinante.

La noción dual es la de *módulo coinclinante*. Así, un A-módulo T es coinclinante si $\mathrm{di}T \leq 1$, $\mathrm{Ext}_A^1(T,T) = 0$ y existe una sucesión exacta

$$0 \to T''_A \to T''_A \to DA_A \to 0$$

con T'_A, $T''_A \in \operatorname{add} T$. Es claro que un A-módulo T es inclinante si y sólo si DT es coinclinante. Finalmente, si A es hereditaria, todo módulo inclinante es coinclinante y recíprocamente.

Puede interpretarse que los axiomas de módulo inclinante significan que un módulo inclinante es "bastante próximo" al módulo A_A. Una condición suficiente para que (T_3) sea verificada es que, para todo A-módulo proyectivo indescomponible P, exista una sucesión exacta corta

$$0 \to P \to T' \to T'' \to 0$$

con $T', T'' \in \operatorname{add} T$. No es inmediatamente evidente que esta condición sea igualmente necesaria. Probaremos esto más adelante en (3.8).

Una consecuencia directa del axioma (T_3) y de (II.2.6) es que todo módulo inclinante es fiel. Se deduce una primera caracterización de los módulos inclinantes.

Lema 3.1. *Un A-módulo T es inclinante si y sólo si* $\mathrm{Hom}_A(T, \tau T) = 0$ *y T satisface* (T_3).

Demostración. En efecto, si T es inclinante, $\mathrm{dp}T \leq 1$ y luego $\mathrm{Hom}_A(T, \tau T) \cong D\,\mathrm{Ext}_A^1(T,T) = 0$. Recíprocamente, si T satisface (T_3) entonces es fiel. Luego, por (II.2.7), es inclinante parcial y, por lo tanto, inclinante. $\square$

Por otra parte, no es válido en general que un módulo inclinante parcial fiel es inclinante. Así, el módulo fiel T' del Ejemplo (2.8) no es inclinante, como veremos más adelante.

Necesitamos el lema siguiente.

Lema 3.2. *Sean* $M, T \in \operatorname{mod} A$. *Entonces existe una sucesión exacta corta*

$$(*) \qquad 0 \to M \to E \to T_0 \to 0$$

con $T_0 \in \operatorname{add} T$*, tal que el morfismo de conexión* $\delta : \operatorname{Hom}_A(T, T_0) \to \operatorname{Ext}^1_A(T, M)$ *inducido por el funtor* $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ *es sobreyectivo.*

Demostración. Si $\operatorname{Ext}^1_A(T, M) = 0$ el lema es trivial. Supongamos entonces que $\operatorname{Ext}^1_A(T, M) \neq 0$ y sea $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_d\}$ un conjunto de generadores del $\operatorname{End} T_A$-módulo $\operatorname{Ext}^1_A(T, M)$.

Representamos a cada $\underline{e}_i$ por una sucesión exacta:

$$0 \to M \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{g_i} T \to 0.$$

El morfismo codiagonal $k = [id_M, \ldots, id_M] : M^d \to M$ induce un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u'_i"] & E_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "u_i"] & T \arrow[r] \arrow[d, "u''_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M^d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"] & \bigoplus_{i=1}^d E_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & T^d \arrow[r] \arrow[d, "id_{T^d}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f'"] & E \arrow[r, "g'"] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde u_i, u'_i, u''_i son las inclusiones respectivas en la coordenada i-ésima y f, g son las aplicaciones inducidas en la suma directa. Como $ku'_i = id_M$, del precedente se deduce otro diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, equal] & E_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "vu_i"] & T \arrow[r] \arrow[d, "u''_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f'"] & E \arrow[r, "g'"] & T^d \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

Si $\underline{e}$ designa al elemento de $\operatorname{Ext}^1_A(T^d, M)$ representado por la sucesión $(*)$ de abajo, este último diagrama se expresa diciendo que $\underline{e}_i = \operatorname{Ext}^1_A(u''_i, M)\,\underline{e} = \delta(u''_i)$ para cada i. Luego δ es sobreyectiva y la sucesión $(*)$ satisface lo pedido. □

Una consecuencia inmediata de (3.2) es el llema siguiente, llamado Lema de Bongartz, que dice que todo módulo inclinante parcial puede ser completado a un módulo inclinante.

Lema 3.3. (Bongartz) *Sea* T *un módulo inclinante parcial. Entonces existe un módulo* E *tal que* $T \oplus E$ *es inclinante.*

Demostración. Aplicando (3.2), existe una sucesión exacta

$$(*) \qquad 0 \to A \to E \to T_0 \to 0$$

tal que $T_0 \in \operatorname{add}T$ y el morfismo de conexión $\delta : \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \to \operatorname{Ext}^1_A(T,A)$ inducido por el funtor $\operatorname{Hom}_A(T,-)$ es sobreyectivo. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(T,-)$ a $(*)$ se obtiene una sucesión exacta

$$\dots\operatorname{Hom}_A(T,T_0) \xrightarrow{\delta} \operatorname{Ext}^1_A(T,A) \to \operatorname{Ext}^1_A(T,E) \to \operatorname{Ext}^1_A(T,T_0) = 0.$$

Como δ es sobreyectivo, resulta que $\operatorname{Ext}^1_A(T,E) = 0$.

Si se aplican sucesivamente los funtores $\operatorname{Hom}_A(-,T)$ y $\operatorname{Hom}_A(-,E)$ a la sucesión $(*)$ se obtienen análogamente sucesiones exactas

$$0 = \operatorname{Ext}^1_A(T_0,T) \to \operatorname{Ext}^1_A(E,T) \to \operatorname{Ext}^1_A(A,T) = 0$$

y

$$0 = \operatorname{Ext}^1_A(T_0,E) \to \operatorname{Ext}^1_A(E,E) \to \operatorname{Ext}^1_A(A,E) = 0.$$

Luego $\operatorname{Ext}^1_A(T\oplus E, T\oplus E) = 0$. Como $\operatorname{dp}T \leq 1$, la sucesión exacta $(*)$ da también $\operatorname{dp}E \leq 1$. Finalmente, la sucesión $(*)$ es la sucesión de (T_3). Esto prueba que $T\oplus E$ es un módulo inclinante, como queríamos. □

Es importante observar que hemos probado que, para toda sucesión exacta

$$0 \to A \to E \to T_0 \to 0$$

con $T_0 \in \operatorname{add}T$ tal que el morfismo de conexión $\delta : \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \to \operatorname{Ext}^1_A(T,A)$ es sobreyectivo, el módulo $T\oplus E$ es inclinante. Cada tal sucesión se dice una *sucesión de Bongartz* para T, y el módulo E se dice un *complemento de Bongartz* de T.

La consecuencia más notable del Lema de Bongartz es que un módulo inclinante parcial es inclinante si y sólo si el número de clases de isomorfismo de sumandos indescomponibles de T es igual al rango del grupo de Grothendieck $K_0(A)$ de A, es decir al número de clases de isomorfismo de A-módulos simples (en virtud de I.1.4). Probaremos este resultado en (II.5.6).

Corolario 3.4. *Sea E un complemento de Bongartz del módulo inclinante parcial T. Entonces $\mathscr{T}_1(T) = \mathscr{T}_1(T\oplus E)$.*

Demostración. Es claro que, para un A-módulo M, la condición $\operatorname{Ext}^1_A(T\oplus E,M) = 0$ implica $\operatorname{Ext}^1_A(T,M) = 0$. Luego $\mathscr{T}_1(T\oplus E) \subseteq \mathscr{T}_1(T)$.

Recíprocamente, sean $M \in \mathscr{T}_1(T)$ y

$$0 \to A \to E \to T^d \to 0$$

una sucesión de Bongartz para T. Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_A(-,M)$ resulta una sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Ext}^1_A(T^d,M) \to \operatorname{Ext}^1_A(E,M) \to \operatorname{Ext}^1_A(A,M) = 0.$$

Luego $\operatorname{Ext}^1_A(E,M) = 0$ y por lo tanto $\operatorname{Ext}^1_A(T\oplus E,M) = 0$. Esto muestra que $\mathscr{T}_1(T) = \mathscr{T}_1(T\oplus E)$. □

El teorema siguiente da varias caracterizaciones equivalentes de los módulos inclinantes.

Teorema 3.5. *Sea T un A-módulo inclinante parcial. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) *T es un módulo inclinante.*

(b) $\mathscr{T}_0(T) = \mathscr{T}_1(T)$.

(c) *Para todo $M \in \mathscr{T}_1(T)$ existe una sucesión exacta*

$$\ldots \to T_2 \to T_1 \to T_0 \to M \to 0$$

con $T_i \in \operatorname{add} T$ para todo i.

(d) *L es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_1(T)$ si y sólo si $L \in \operatorname{add} T$.*

Demostración. (a) implica (b). Sabemos ya, por (II. 2.5), que $\mathscr{T}_0(T) \subseteq \mathscr{T}_1(T)$. Recíprocamente, sean $M \in \mathscr{T}_1(T)$ y

$$0 \to tM \to M \to M/tM \to 0$$

la sucesión canónica de M en el par de torsión $(\mathscr{T}_0(T), \mathscr{F}_0(T))$. Como $M/tM \in \mathscr{F}_0(T)$, se tiene que $\operatorname{Hom}_A(T, M/tM) = 0$. Por otro lado, el funtor $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ da una sucesión exacta

$$\operatorname{Ext}^1_A(T,M) \to \operatorname{Ext}^1_A(T,M/tM) \to 0$$

puesto que $\operatorname{dp} T \leq 1$. Luego $\operatorname{Ext}^1_A(T,M) = 0$ implica $\operatorname{Ext}^1_A(T,M/tM) = 0$. Apliquemos ahora el funtor $\operatorname{Hom}_A(-, M/tM)$ a la sucesión exacta del axioma (T_3)

$$0 \to A_A \to T'_A \to T''_A \to 0$$

con $T', T'' \in \operatorname{add} T$. Esto da una sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Hom}_A(T', M/tM) \to \operatorname{Hom}_A(A, M/tM) \to \operatorname{Ext}^1_A(T'', M/tM) = 0.$$

Por lo tanto, $M/tM \cong \operatorname{Hom}_A(A, M/tM) = 0$. Luego $M = tM \in \mathscr{T}_0(T)$.

(b) implica (c). Sea $M \in \mathscr{T}_1(T) = \mathscr{T}_0(T)$. Comenzamos probando la existencia de una sucesión exacta

$$0 \to L \to T_0 \to M \to 0$$

con $T_0 \in \operatorname{add} T$ y $L \in \mathscr{T}_1(T)$. Como $M \in \operatorname{Gen} T$, resulta de (II.1.6) que una $\operatorname{add} T$-aproximación $f : T_0 \to M$, con $T_0 \in \operatorname{add} T$, es sobreyectiva. Pongamos $L = \operatorname{Ker} f$ y apliquemos el funtor $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ a la sucesión exacta corta

$$0 \to L \to T_0 \xrightarrow{f} M \to 0.$$

Obtenemos una sucesión exacta

$$\ldots \operatorname{Hom}_A(T, T_0) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(T,f)} \operatorname{Hom}_A(T, M) \to \operatorname{Ext}^1_A(T, L) \to \operatorname{Ext}^1_A(T, T_0) = 0.$$

Dado que f es una $\operatorname{add} T$-aproximación, el morfismo $\operatorname{Hom}_A(T, f)$ es sobreyectivo. Luego $\operatorname{Ext}^1_A(T, L) = 0$. Esto prueba entonces que $L \in \mathscr{T}_1(T) = \mathscr{T}_0(T)$. El enunciado de (c) se obtiene entonces por recurrencia.

(c) implica (d). Supongamos que $L \in \operatorname{add} T$. Entonces es claro que L es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_1(T) = \{M \mid \operatorname{Ext}^1_A(T, M) = 0\}$. Recíprocamente, supongamos que L es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_1(T)$. Por (c) sabemos que existe una sucesión exacta

$$0 \to L' \to T_0 \to L \to 0$$

con $T_0 \in \operatorname{add} T$ y $L' \in \mathscr{T}_1(T)$. Como L es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_1(T)$, se tiene $\operatorname{Ext}^1_A(L,L') = 0$. Luego esta sucesión se parte y $L \in \operatorname{add} T$.

(d) implica (a). Sea $0 \to A \to E \to T_0 \to 0$ una sucesión de Bongartz para T. Para probar que T es inclinante basta probar que $E \in \operatorname{add} T$. En virtud de (d), esto se reduce a probar que E es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_1(T)$. En efecto, como $T \oplus E$ es inclinante, se tiene que $\operatorname{Ext}^1_A(T,E) = 0$, de donde $E \in \mathscr{T}_1(T)$. Sea $M \in \mathscr{T}_1(T)$. Aplicando $\operatorname{Hom}_A(-,M)$ a la sucesión de Bongartz encontramos una sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Ext}^1_A(T_0,M) \to \operatorname{Ext}^1_A(E,M) \to \operatorname{Ext}^1_A(A,M) = 0,$$

de donde $\operatorname{Ext}^1_A(E,M) = 0$, probando lo deseado. $\square$

Por lo tanto, si T es un A-módulo inclinante, las clases de torsión $\mathscr{T}_0(T)$ y $\mathscr{T}_1(T)$ coinciden. Notaremos $\mathscr{T}(T) = \mathscr{T}_0(T) = \mathscr{T}_1(T)$ y $\mathscr{F}(T) = \mathscr{F}_0(T) = \mathscr{F}_1(T)$. Así, el par de torsión inducido es $(\mathscr{T}(T), \mathscr{F}(T))$.

Extraeremos ahora algunas consecuencias de 3.5.

Corolario 3.6. *Sean T un A-módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. Entonces:*

(a) *El funtor* $\operatorname{Hom}_A(T,-)|_{\mathscr{T}(T)}$ *preserva sucesiones exactas cortas.*

(b) *El funtor* $\operatorname{Ext}^1_A(T,-)|_{\mathscr{F}(T)}$ *preserva sucesiones exactas cortas.*

Demostración. (a) Sea $0 \to L \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta de $\mathscr{T}(T)$. Como $\operatorname{Ext}^1_A(T,L) = 0$ se tiene una sucesión exacta en $\operatorname{mod} B$

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T,L) \to \operatorname{Hom}_A(T,M) \to \operatorname{Hom}_A(T,N) \to 0.$$

(b) es similar, teniendo en cuenta el hecho que $\operatorname{Ext}^2_A(T,-) = 0$. $\square$

Corolario 3.7. *Sean T un A-módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. Entonces $M \in \mathscr{T}(T)$ si y sólo si $\varepsilon_M : \operatorname{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \to M$ es un isomorfismo.*

Demostración. La suficiencia resulta de (II.1.8). Probemos la necesidad. Sea $M \in \mathscr{T}(T)$. Existe, por (3.5)(c), una sucesión exacta

$$0 \to K \to T_1 \to T_0 \to M \to 0$$

con $T_1, T_0 \in \operatorname{add} T$ y $K \in \mathscr{T}(T)$. Utilizando (3.6), obtenemos una sucesión exacta

$$\operatorname{Hom}_A(T,T_1) \to \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \to \operatorname{Hom}_A(T,M) \to 0.$$

Aplicando el funtor exacto a derecha $- \otimes_B T$ tenemos un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
\operatorname{Hom}_A(T,T_1) \otimes_B T & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \otimes_B T & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(T,M) \otimes_B T & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle \varepsilon_{T_0}} \big\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon_{T_1}} \big\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon_M} \big\downarrow & & \\
T_1 & \longrightarrow & T_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Sabemos por (II.1.1) que $\varepsilon_{T_0}, \varepsilon_{T_1}$ son isomorfismos y, por lo tanto, ε_M también lo es. $\square$

Corolario 3.8. *Un módulo inclinante parcial T es inclinante si y sólo si para todo A-módulo proyectivo indescomponible P existe una sucesión exacta*

$$0 \to P \to T_0' \to T_0'' \to 0$$

con $T_0', T_0'' \in \operatorname{add} T$.

Demostración. Siendo la suficiencia evidente, probemos la necesidad. Si T es inclinante, existe una sucesión exacta $0 \to A \to T' \to T'' \to 0$ con $T', T'' \in \operatorname{add} T$. Entonces una retracción $p : A_A \to P$ induce un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & T'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle p}\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\| & & \\ 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & F & \longrightarrow & T'' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Basta demostrar que $F \in \operatorname{add} T$. Como p es sobreyectivo entonces f también lo es, de donde $F \in \mathscr{T}(T)$. Sea $M \in \mathscr{T}(T)$. Entonces $\operatorname{Hom}_A(-, M)$ aplicado a la sucesión de abajo induce una sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Ext}_A^1(T'', M) \to \operatorname{Ext}_A^1(F, M) \to \operatorname{Ext}_A^1(P, M) = 0.$$

Luego $\operatorname{Ext}_A^1(F, M) = 0$. Del teorema resulta que $F \in \operatorname{add} T$. $\square$

Corolario 3.9. *Sea T un A-módulo inclinante. Entonces $L \in \operatorname{add} T$ si y sólo si $L \in \mathscr{T}(T)$ y $\tau L \in \mathscr{F}(T)$.*

Demostración. El resultado es consecuencia del teorema y de (II.2.4). $\square$

Nota 3.10. Sea T un A-módulo inclinante. Se sabe que los Ext-proyectivos de $\mathscr{T}(T)$ son los objetos de $\operatorname{add} T$. Por otro lado, los Ext-inyectivos de $\mathscr{T}(T)$ coinciden con los A-módulos inyectivos. En efecto, es claro que, como todos los A-módulos inyectivos indescomponibles están en $\mathscr{T}(T)$, entonces son Ext-inyectivos en esta subcategoría. Recíprocamente, si M es un A-módulo Ext-inyectivo de $\mathscr{T}(T)$, sea $j : M \to I$ una cápsula inyectiva y consideremos la sucesión exacta

$$0 \to M \to I \to I/M \to 0.$$

Como $I \in \mathscr{T}(T)$, también $I/M \in \mathscr{T}(T)$, Por lo tanto $\operatorname{Ext}_A^1(I/M, M) = 0$ y la sucesión precedente se parte. Luego M es inyectivo.

A continuación probaremos que un módulo inclinante es un módulo inclinante parcial que tiene un número maximal de sumandos indescomponibles no isomorfos.

Corolario 3.11. *Un A-módulo T es inclinante si y sólo si es un módulo inclinante parcial tal que, para cada módulo E tal que $T \oplus E$ es inclinante parcial, tenemos $E \in \operatorname{add} T$.*

Demostración. La suficiencia es fácil: sean T un módulo inclinante parcial que verifica la condición del enunciado, y E un complemento de Bongartz para T. Entonces $T \oplus E$ es inclinante y, en particular, es inclinante parcial. Por hipótesis tenemos que $E \in \operatorname{add} T$. Luego T es inclinante.

Recíprocamente, sean T un A-módulo inclinante y E tales que $T \oplus E$ es inclinante parcial. En particular, $\mathrm{Ext}_A^1(T,E) = 0$ implica $E \in \mathscr{T}(T)$. Sea $M \in \mathscr{T}(T)$. Como T es inclinante, existe un epimorfismo $f : T_0 \to M$, con $T_0 \in \operatorname{add} T$. Como $\mathrm{dp} E \leq 1$, tenemos un epimorfismo $\mathrm{Ext}_A^1(E,f) : \mathrm{Ext}_A^1(E,T_0) \to \mathrm{Ext}_A^1(E,M)$. Entonces $\mathrm{Ext}_A^1(E,T) = 0$ implica $\mathrm{Ext}_A^1(E,M) = 0$. Por lo tanto E es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}(T)$ y, por (II.3.5)(d), tenemos $E \in \operatorname{add} T$. $\square$

Ejemplo 3.12. (a) El módulo fiel $T' = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}$ del Ejemplo (II.2.8) no es inclinante. En efecto, el conúcleo $\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$ de la inclusión $1 \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$ no pertenece a $\operatorname{add} T'$.

Mostremos que, por el contrario, $U = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix} \oplus 4$ es un módulo inclinante.

(T_1) $\mathrm{dp} U \leq 1$ resulta de las resoluciones proyectivas

$$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \to 0 \ , \ 0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix} \to 0 \ , \ 0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to {\scriptstyle 4} \to 0$$

y de que el módulo $\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$ es proyectivo.

(T_2) Puesto que el módulo $\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$ es proyectivo e inyectivo, y como $\begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix} \oplus 4$ es inyectivo, tenemos que $\mathrm{Ext}_A^1(U,U) = \mathrm{Ext}_A^1(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix} \oplus 4 \, , \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix})$. Entonces, como $\mathrm{dp} U \leq 1$, obtenemos

$$\mathrm{Ext}_A^1(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} , \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} , \tau(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix})) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} , \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}) = 0 \, ,$$

$$\mathrm{Ext}_A^1(\begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix} , \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} , \tau(\begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix})) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} , {\scriptstyle 2}) = 0 \ , \text{ y}$$

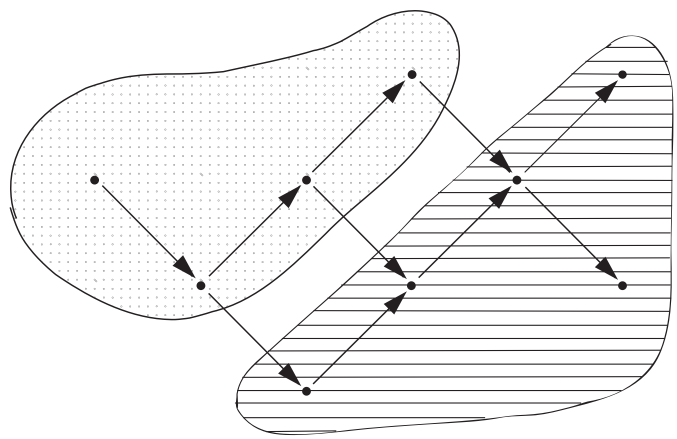
$$\mathrm{Ext}_A^1({\scriptstyle 4} , \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} , \tau({\scriptstyle 4})) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} , \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = 0 \, .$$

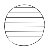
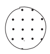
(T_3) Esto resulta de las sucesiones exactas cortas

$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \to 0 \ ; \quad 0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to {\scriptstyle 4} \to 0$ y

$0 \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix} \to {\scriptstyle 4} \to 0.$

Entonces se tiene $\mathscr{T}(U) = \mathrm{Gen}(U) = \operatorname{add}\{\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}, 3, 4\}$ y $\mathscr{F}(U)$ $= \{M \mid \mathrm{Hom}_A(U,M) = 0\} = \operatorname{add}\{1, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, 2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\}$. Se tiene así



donde $\mathscr{T}(U)$ se designa por  y $\mathscr{F}(U)$ por  . Se reencuentra así uno de los pares de torsión del Ejemplo (II.2.8).

Consideramos ahora el módulo $V = 1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix} \oplus 4$. Verificamos a continuación que éste es también un módulo inclinante.

(T_1) Para probar que $\mathrm{dp}V \leq 1$ consideramos las resoluciones proyectivas

$0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix} \to 0 \qquad \text{y} \qquad 0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to 4 \to 0$

y recordamos que $1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$ es proyectivo.

(T_2) Para demostrar que $\mathrm{Ext}^1_A(V,V) \cong \mathrm{Ext}^1_A(\begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix} \oplus 4, 1) = 0$ basta considerar

$$\mathrm{Ext}^1_A(\begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}, 1) \cong D\mathrm{Hom}_A(1, \tau(\begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix})) \cong D\mathrm{Hom}_A(1,2) = 0 \ \text{y}$$

$$\mathrm{Ext}^1_A(4,1) \cong D\mathrm{Hom}_A(1,\tau(4)) \cong D\mathrm{Hom}_A(1, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = 0$$

donde se ha utilizado que $\mathrm{dp}V \leq 1$.

(T_3) Como 1 y $\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$ son proyectivos, basta considerar las sucesiones exactas cortas

$0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to 4 \to 0 \qquad \text{y} \qquad 0 \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix} \to 4 \to 0$.

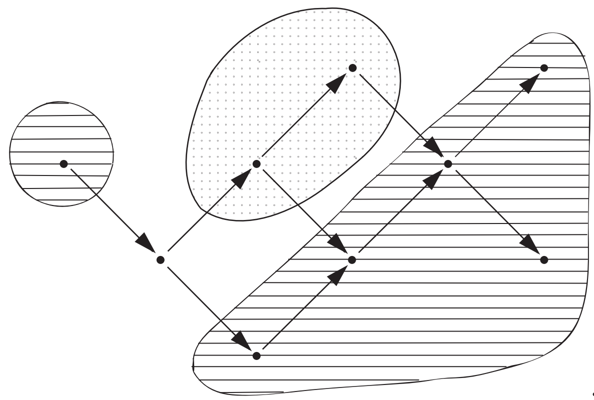
Calculamos ahora el par de torsión correspondiente

$$\mathscr{T}(V) = \mathrm{Gen}(V) = \mathrm{add}\{1, \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}, 3, 4\},$$

en tanto que

$$\mathscr{F}(V) = \{M \mid \mathrm{Hom}_A(V,M) = 0\} = \mathrm{add}\,\{2, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\}.$$

Se tiene así



.

Notamos que el módulo indescomponible $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ no pertenece ni a $\mathscr{T}(V)$ ni a $\mathscr{F}(V)$. En efecto, $\mathrm{Hom}_A(V, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}) \neq 0$, y la sucesión $0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to 4 \to 0$ muestra que $\mathrm{Ext}^1_A(V, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}) \neq 0$. La sucesión canónica correspondiente a $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ está dada por

$$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to 2 \to 0.$$

(b) Sea A el álgebra de caminos del carcaj

$$\begin{tikzcd} & & \circ 3 \arrow[dl] \\ \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l] & \\ & & \circ 4 \arrow[ul] \end{tikzcd}.$$

El carcaj de Auslander-Reiten de A está dado por

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}3\,4\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \\
& \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix}3\,4\\2\,2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix} \arrow[r] \arrow[dr] & 3 \\
& & \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & 4
\end{tikzcd}.$$

Veremos que $T = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\,4\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \oplus 4$ es un módulo inclinante.

(T_1) Resulta del hecho que A es hereditaria.

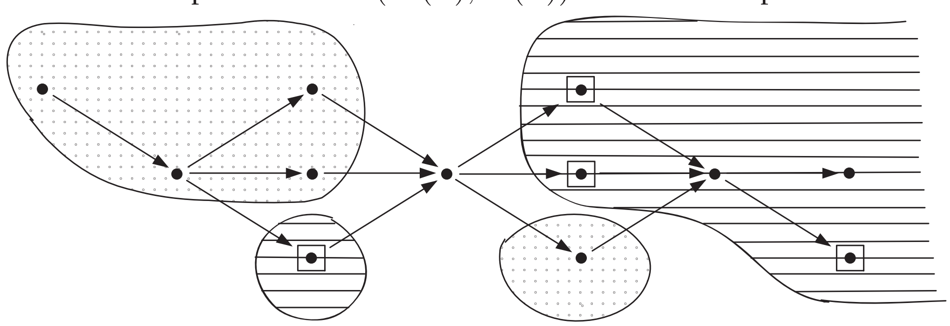
(T_2) Para probar que $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) \cong \mathrm{Ext}^1_A(\begin{smallmatrix}34\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \oplus 4\,,\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}) = 0$, se usan los isomorfismos

$$\mathrm{Ext}^1_A(\begin{smallmatrix}34\\2\\1\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix},\tau(\begin{smallmatrix}34\\2\\1\end{smallmatrix})) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix},2) = 0$$
$$\mathrm{Ext}^1_A(\begin{smallmatrix}34\\2\\1\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix},\tau(\begin{smallmatrix}34\\2\\1\end{smallmatrix})) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix},2) = 0$$
$$\mathrm{Ext}^1_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix},\tau(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix})) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}) = 0$$
$$\mathrm{Ext}^1_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix},\tau(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix})) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}) = 0$$
$$\mathrm{Ext}^1_A(4,\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix},\tau(4)) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = 0$$
$$\mathrm{Ext}^1_A(4,\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix},\tau(4)) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = 0.$$

(T_3) Como $\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$ es sumando directo de T, basta considerar las sucesiones exactas

$$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \to 0\ ,\ 0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to 4 \to 0\ ,\ 0 \to \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}34\\2\\1\end{smallmatrix} \to 4 \to 0.$$

Calculamos ahora el par de torsión $(\mathscr{T}(T),\mathscr{F}(T))$. Un cálculo rápido nos da



donde los sumandos directos indescomponibles de T se indican con los cuadrados $\boxed{\bullet}$.

El módulo indescomponible $\begin{smallmatrix}&3\,4\\2&2\\&1\end{smallmatrix}$ no es ni de torsión ni sin torsión. Su sucesión canónica en el par $(\mathscr{T}(T),\mathscr{F}(T))$ es

$$0 \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&3\,4\\2&2\\&1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \to 0\,.$$

(c) Un ejemplo de interés más teórico es el siguiente. Un módulo inclinante construido como lo haremos ahora se llama *módulo inclinante APR* (por Auslander, Platzeck, Reiten).

Sea S_x un módulo simple proyectivo no inyectivo. Entonces el módulo $T_x = \tau^{-1}(S_x) \oplus (\bigoplus_{y\neq x} P_y)$ es un módulo inclinante.

En efecto, consideremos la sucesión exacta que casi se parte

$$0 \to S_x \to P \to \tau^{-1}(S_x) \to 0.$$

Por (I.2.10) sabemos que P es proyectivo. Esta sucesión prueba (T_1) y (T_3), porque ningún sumando indescomponible de P es isomorfo a S_x.

Finalmente, como $\mathrm{dp}T \leq 1$, se tiene

$$\mathrm{Ext}^1_A(T_x, T_x) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(T_x, \tau T_x) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(T_x, S_x) = 0$$

dado que S_x es simple proyectivo.

Probamos ahora que el par de torsión $(\mathscr{T}(T_x), \mathscr{F}(T_x))$ se escinde. En efecto, $M \in \mathscr{T}(T_x)$ si y sólo si $0 = \mathrm{Ext}^1_A(T_x, M) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(M, \tau T_x) \cong D\,\mathrm{Hom}_A(M, S_x)$. Éste es el caso si y sólo si ningún sumando directo indescomponible de M es isomorfo a S_x. Como $S_x \cong \tau T_x \in \mathscr{F}(T_x)$, se deduce que $\mathscr{F}(T_x) = \mathrm{add}\,S_x$, mientras que $\mathscr{T}(T_x) = \mathrm{add}(\mathrm{ind}A \setminus \{S_x\})$.

4. El teorema de inclinación.

Sean A un álgebra de artin básica y conexa y T_A un A-módulo inclinante. El teorema de inclinación, debido a Brenner y Butler, compara las categorías de módulos sobre A y sobre $B = \mathrm{End}\,T_A$. Ya sabemos, por (II.1.2), que el funtor $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ proyectiviza a T. Comenzaremos por probar que la restricción de este funtor a la subcategoría $\mathscr{T}(T) = \mathrm{Gen}(T) = \{M \mid \mathrm{Ext}^1_A(T, M) = 0\}$ es un funtor pleno, fiel y preserva extensiones.

Lema 4.1. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B = \mathrm{End}\,T_A$. Para $M, N \in \mathscr{T}(T)$ hay isomorfismos funtoriales:*

(a) $\mathrm{Hom}_A(M, N) \cong \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T, M), \mathrm{Hom}_A(T, N))$.

(b) $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) \cong \mathrm{Ext}^1_B(\mathrm{Hom}_A(T, M), \mathrm{Hom}_A(T, N))$.

Demostración. En virtud de (II.3.5) sabemos que existe una sucesión exacta

$$\ldots \to T_2 \xrightarrow{d_2} T_1 \xrightarrow{d_1} T_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

con $T_i \in \mathrm{add}\,T$ para todo i.

(a) Como la sucesión precedente se encuentra enteramente en $\mathscr{T}(T)$, que es cerrada por cocientes, resulta de (II.3.6) que hay una sucesión exacta

$$\ldots \to \mathrm{Hom}_A(T, T_1) \to \mathrm{Hom}_A(T, T_0) \to \mathrm{Hom}_A(T, M) \to 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_B(-, \mathrm{Hom}_A(T, N))$ obtenemos la fila superior del siguiente diagrama conmutativo, cuyas filas son exactas,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,M),\mathrm{Hom}_A(T,N)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,T_0),\mathrm{Hom}_A(T,N)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,T_1),\mathrm{Hom}_A(T,N)) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T_0,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T_1,N)
\end{tikzcd}$$

donde los isomorfismos verticales resultan de (II.1.2)(a). El diagrama prueba lo enunciado.

(b) Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ al complejo

$$\ldots \to T_2 \xrightarrow{d_2} T_1 \xrightarrow{d_1} T_0 \to 0 \qquad (T_*)$$

se obtiene, por (II.1.2(a)) y (II.3.6), una resolución proyectiva de $\mathrm{Hom}_A(T,M)$ en mod$B$. Por definición, $\mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{Hom}_A(T,M),\mathrm{Hom}_A(T,N))$ es el primer grupo de cohomología del complejo

$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(T,T_*),\mathrm{Hom}_A(T,N)) \cong \mathrm{Hom}_A(T_*,N)$$

(donde el isomorfismo resulta de (a)), o sea coincide con $H^1(\mathrm{Hom}_A(T_*,N))$.

Sea $L = \mathrm{Im}d_1$ y sea $d_1 = jp$ la factorización canónica de d_1. Se tiene una sucesión exacta

$$0 \to L \xrightarrow{j} T_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

que induce, como $\mathrm{Ext}^1_A(T_0,N) = 0$, una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(T_0,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(j,N)} \mathrm{Hom}_A(L,N) \to \mathrm{Ext}^1_A(M,N) \to 0.$$

Probaremos que $H^1(\mathrm{Hom}_A(T_*,N)) \cong \mathrm{Ext}^1_A(M,N)$.

Consideramos así el complejo $\mathrm{Hom}_A(T_*,N)$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T_0,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(d_1,N)} \mathrm{Hom}_A(T_1,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(d_2,N)} \mathrm{Hom}_A(T_2,N) \to \cdots$$

La exactitud a izquierda de $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ implica que $\mathrm{Hom}_A(L,N) \cong \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(d_2,N)$, de modo que $H^1(\mathrm{Hom}_A(T_*,N)) \cong \mathrm{Hom}_A(L,N)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N)$. Sea $\mathrm{Hom}_A(d_1,N) = \xi\pi$ la factorización canónica de $\mathrm{Hom}_A(d_1,N)$ a través de su imagen. Entonces $\mathrm{Hom}_A(d_2,N)\xi\pi = \mathrm{Hom}_A(d_2,N)\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N) = 0$ implica $\mathrm{Hom}_A(d_2,N)\xi = 0$, dado que π es un epimorfismo. Luego ξ se factoriza por $\mathrm{Hom}_A(L,N) \cong \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(d_2,N)$, o sea, existe $\varphi : \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N) \to \mathrm{Hom}_A(L,N)$ tal que $\mathrm{Hom}_A(p,N)\varphi = \xi$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(T_0,N) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_A(d_1,N)"] \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[dd, equal] & & \mathrm{Hom}_A(T_1,N) \\
& \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N) \arrow[ur, hook, "\xi"'] \arrow[dr, dashed, "\varphi"'] & \\
\mathrm{Hom}_A(T_0,N) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_A(j,n)"] & & \mathrm{Hom}_A(L,N) \arrow[uu, hook, "\mathrm{Hom}_A(p,N)"']
\end{tikzcd}$$

Por otra parte, φ es un monomorfismo, porque ξ lo es. Se tiene así:

$$\mathrm{Hom}_A(p,N)\varphi\pi = \xi\pi = \mathrm{Hom}_A(d_1,N) = \mathrm{Hom}_A(jp,N) = \mathrm{Hom}_A(p,N)\,\mathrm{Hom}_A(j,N),$$

de donde $\varphi\pi = \mathrm{Hom}_A(j,N)$. Como φ es un monomorfismo, mientras que π es un epimorfismo, se tiene que $\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N) \cong \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(j,N)$, de donde

$$H^1(\mathrm{Hom}_A(T_*,N)) \cong \mathrm{Hom}_A(L,N)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(j,N) \cong \mathrm{Coker}\,\mathrm{Hom}_A(j,N) \cong \mathrm{Ext}^1_A(M,N).$$

$\square$

La observación base de la teoría de inclinación es que, si T_A es un A-módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$, entonces ${}_BT$ es un B^{op}-módulo inclinante. Esto hace simétricos los papeles de A y B.

Lema 4.2. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. Entonces ${}_BT$ es un B^{op}-módulo inclinante y la aplicación $a \mapsto (t \mapsto ta)$ es un isomorfismo $A \xrightarrow{\cong} (\operatorname{End} {}_BT)^{op}$.*

Demostración. A fin de probar que ${}_BT$ es inclinante, verificamos los axiomas.

(T_1) Como T_A es inclinante, existe una sucesión exacta corta $0 \to A_A \to T' \to T'' \to 0$ con $T', T'' \in \operatorname{add} T$. Entonces $\operatorname{Hom}_A(-, {}_BT_A)$ induce una sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T'', {}_BT_A) \to \operatorname{Hom}_A(T', {}_BT_A) \to \operatorname{Hom}_A(A, {}_BT_A) \to 0.$$

Como $\operatorname{Hom}_A(A, {}_BT_A) \cong {}_BT$ y $\operatorname{Hom}_A(T, {}_BT_A) \cong {}_BB$, se obtiene que $\operatorname{dp}_B T \leq 1$.

(T_2) Observemos que $D({}_BT) \cong D({}_BT \otimes_A A) \cong \operatorname{Hom}_A(T, DA)$, donde el último isomorfismo resulta de la adjunción. Como $DA \in \mathscr{T}(T)$ se tiene, en virtud de (4.1)(b)

$$\operatorname{Ext}^1_B(DT, DT) \cong \operatorname{Ext}^1_B(\operatorname{Hom}_A(T, DA), \operatorname{Hom}_A(T, DA)) \cong \operatorname{Ext}^1_A(DA, DA) = 0.$$

Por lo tanto $\operatorname{Ext}^1_{B^{op}}(T, T) = 0$.

(T_3) Dado que $\operatorname{dp} T_A \leq 1$, se tiene una resolución proyectiva de la forma $0 \to P_1 \to P_0 \to T \to 0$. Entonces $\operatorname{Hom}_A(-, {}_BT_A)$ induce una sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T, {}_BT_A) \to \operatorname{Hom}_A(P_0, {}_BT_A) \to \operatorname{Hom}_A(P_1, {}_BT_A) \to 0$$

dado que $\operatorname{Ext}^1_A(T, T) = 0$. La conclusión resulta de los isomorfismos $\operatorname{Hom}_A(T, {}_BT) \cong {}_BB$ y $\operatorname{Hom}_A(A, {}_BT_A) \cong {}_BT$.

Esto establece que ${}_BT$ es inclinante.

Para $a \in A$, la aplicación $\rho_a : t \mapsto ta$ es un endomorfismo de ${}_BT$. Por otro lado, la aplicación $\varphi : a \mapsto \rho_a$ es un morfismo de álgebras $A \xrightarrow{\cong} (\operatorname{End} {}_BT)^{op}$. Si $a \in \operatorname{Ker} \varphi$, entonces $Ta = 0$, de donde $a = 0$, pues todo módulo inclinante es fiel. Así, φ es inyectivo. Como, además, $DA \in \mathscr{T}$ y $DT \cong \operatorname{Hom}_A(T, DA)$, resulta de (4.1)(a) que hay isomorfismos de grupos abelianos $A \cong \operatorname{End} DA \cong \operatorname{End} \operatorname{Hom}_A(T, DA) \cong \operatorname{End} DT \cong \operatorname{End} T$. Luego φ es un isomorfismo. □

Corolario 4.3. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. Entonces los centros $\mathscr{Z}(A)$ y $\mathscr{Z}(B)$ son isomorfos. En particular, B es un álgebra conexa.*

Demostración. Se define $\varphi : \mathscr{Z}(A) \to \mathscr{Z}(B)$ por $a \mapsto (\rho_a : t \mapsto ta)$. En efecto, si $a \in \mathscr{Z}(A)$, entonces $\rho_a \in \operatorname{End} T_A = B$ dado que, para todo $t \in T$ y $c \in A$, se tiene que

$$\rho_a(tc) = (tc)a = (ta)c = \rho_a(t)c.$$

Por otro lado, ρ_a es central, pues si $f \in \operatorname{End} T_A$ entonces se tiene, para todo $t \in T$,

$$(\rho_a f)(t) = f(t)a = f(ta) = (f\rho_a)(t).$$

Para construir la inversa, identificamos A con $(\operatorname{End} {}_BT)^{op}$ por el morfismo $a \mapsto \rho_a$ de (4.2) y definimos $\psi : \mathscr{Z}(B) \to \mathscr{Z}(A)$ por $b \mapsto (\lambda_b : t \mapsto bt)$. Es claro que ψ es un morfismo de álgebras. Sea $a \in \mathscr{Z}(A)$. Entonces $\psi\varphi(a) = \lambda_{\rho_a}$ está definido por $t \mapsto \rho_a(t) = ta$, es decir por el elemento $a \in A$ identificado a $\rho_a \in (\operatorname{End} {}_BT)^{op}$. Así, $\psi\varphi(a) = a$ para todo $a \in \mathscr{Z}(A)$. De la misma manera se prueba que $\varphi\psi = id_{\mathscr{Z}(B)}$. □

Corolario 4.4. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. Entonces T_A induce un par de torsión $(\mathscr{X}(T_A), \mathscr{Y}(T_A))$ en mod B, donde $\mathscr{X}(T_A) = D\mathscr{F}({}_BT) = \{X_B \mid X \otimes_B T = 0\}$ e $\mathscr{Y}(T_A) = D\mathscr{T}({}_BT) = \{Y_B \mid \operatorname{Tor}_1^B(Y,T) = 0\}$.*

Demostración. Por (4.2) y (II.3.5), el módulo inclinante ${}_BT$ induce un par de torsión $(\mathscr{T}({}_BT), \mathscr{F}({}_BT))$ en modB^{op}, donde

$$\mathscr{T}({}_BT) = \{{}_BU \mid \operatorname{Ext}^1_{B^{op}}(T,U) = 0\} \text{ y } \mathscr{F}({}_BT) = \{{}_BV \mid \operatorname{Hom}_{B^{op}}(T,V) = 0\}.$$

Definimos entonces el par de torsión $(\mathscr{X}(T_A), \mathscr{Y}(T_A))$ en mod B por $\mathscr{X}(T_A) = D\mathscr{F}({}_BT)$ e $\mathscr{Y}(T_A) = D\mathscr{T}({}_BT)$. Así, $X_B \in \mathscr{X}(T_A)$ si y solamente si $DX \in \mathscr{F}({}_BT)$, es decir,

$$X \otimes_B T \cong D\operatorname{Hom}_B(X, DT) \cong D\operatorname{Hom}_{B^{op}}(T, DX) = 0.$$

Asimismo, $Y_B \in \mathscr{Y}(T_A)$ si y solamente si $DY \in \mathscr{T}({}_BT)$, es decir,

$$\operatorname{Tor}_1^B(Y,T) \cong D\operatorname{Ext}^1_B(Y, DT) \cong D\operatorname{Ext}^1_{B^{op}}(T, DY) = 0.$$

Los isomorfismos funtoriales utilizados resultan de [CE] p. 120, [Ro] (9.51) p. 257 ó [A] (IX.4.2) p. 259. $\square$

Un $B-A$-bimódulo T determina el par de funtores adjuntos $\operatorname{Hom}_A(T,-) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B$ y $-\otimes_B T : \operatorname{mod} B \to \operatorname{mod} A$. Ahora bien, T puede considerarse también como $A^{op} - B^{op}$-bimódulo, determinando el par de funtores adjuntos $\operatorname{Hom}_{B^{op}}(T,-) : \operatorname{mod} B^{op} \to \operatorname{mod} B$ y $-\otimes_{A^{op}} T = T \otimes_A : \operatorname{mod} A^{op} \to \operatorname{mod} B^{op}$. Nos será de gran utilidad el hecho que la counidad δ de la adjunción asociada al primer par y la unidad ε de la adjunción asociada al segundo par son duales, en el sentido que para cada $X \in \operatorname{mod} B$ existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta_X"] \arrow[d, "\gamma_X"'] & \operatorname{Hom}_A(T, X \otimes_B T) \arrow[d, "\theta_X"] \\ D^2X \arrow[r, "D\varepsilon_{DX}"] & D(T \otimes_A \operatorname{Hom}_{B^{op}}(T, DX)) \end{tikzcd}$$

donde θ_X es un isomorfismo funtorial, y $\gamma_X : X \to D^2X$ es el isomorfismo dado por la evaluación: $\gamma_X(x)(f) = f(x)$, para $x \in X$, $f \in DX$.

Para definir θ_X comenzamos recordando que, como T es un $B-A$-bimódulo, hay un isomorfismo de funtores $\eta : -\otimes_B T \to D\operatorname{Hom}_{B^{op}}(T, D-)$ definido por $\eta_X(x \otimes t)(f) = f(t)(x)$, para X en mod$B$, $x \in X$, $t \in T$ y $f \in \operatorname{Hom}_{B^{op}}(T, DX)$ (ver [CE] (VI.5.3) p.120, [Ro] (9.51) p.257 ó [A] (IX.4.12) p. 259).

Considerando a T como $A^{op} - B^{op}-$bimódulo, notamos $\mu : T \otimes_A - \to D\operatorname{Hom}_A(T, D-)$ al isomorfismo definido de la misma manera.

Definimos el morfismo funtorial $\theta : \operatorname{Hom}_A(T, -\otimes_B T) \to D(T \otimes_A \operatorname{Hom}_{B^{op}}(T, D-))$ como la composición $\theta = D\mu.\gamma.\operatorname{Hom}_A(T,\eta)$. Así, para cada $X \in \operatorname{mod} B$, θ_X es la composición

$$\operatorname{Hom}_A(T, X \otimes_B T) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(T,\eta_X)} \operatorname{Hom}_A(T, D\operatorname{Hom}_{B^{op}}(T, DX))$$

$$\xrightarrow{\gamma_{\operatorname{Hom}_A(T, D\operatorname{Hom}_{B^{op}}(T,DX))}} D^2\operatorname{Hom}_A(T, D\operatorname{Hom}_{B^{op}}(T, DX))$$

$$\xrightarrow{D\mu_{\mathrm{Hom}_{B^{op}}(T,DX)}} D(T\otimes_A \mathrm{Hom}_{B^{op}}(T,DX)).$$

Lema 4.5. *Con las notaciones anteriores, θ_X es un isomorfismo tal que el diagrama anterior conmuta, es decir $\theta_X\delta_X = D(\varepsilon_{DX})\gamma_X$. En particular, δ_X es un isomorfismo si y sólo si ε_{DX} lo es.*

Demostración. Sabemos que μ, γ y η son isomorfismos funtoriales. Por lo tanto θ también lo es. Probaremos ahora que $\theta_X\delta_X = D(\varepsilon_{DX})\gamma_X$.

Sea $x\in X$, $t\in T$ y $f\in \mathrm{Hom}_B(T,X)$. Comenzamos evaluando el miembro de la derecha:

$$\begin{aligned}(D\varepsilon_{DX}\gamma_X(x))(t\otimes f) &= \gamma_X(x)(\varepsilon_{DX}(t\otimes f))\\ &= \varepsilon_{DX}(t\otimes f)(x) = f(t)(x).\end{aligned}$$

Ahora evaluamos el miembro de la izquierda

$$\begin{aligned}(\theta_X\delta_X)(x)(t\otimes f) &= (D\mu_{\mathrm{Hom}_{B^{op}}(T,DX)}\gamma_{\mathrm{Hom}_A(T,D\,\mathrm{Hom}_{B^{op}}(T,DX))}\mathrm{Hom}_A(T,\eta_X)\delta_X(x))(t\otimes f)\\ &= \gamma_{\mathrm{Hom}_A(T,D\,\mathrm{Hom}_{B^{op}}(T,DX))}(\eta_X\delta_X(x))\mu_{\mathrm{Hom}_B(T,X)}(t\otimes f)\\ &= \mu_{\mathrm{Hom}_B(T,X)}(t\otimes f)(\eta_X\delta_X(x))\\ &= \eta_X\delta_X(x)(t)(f)\\ &= \eta_X(t\otimes x)(f)\\ &= f(t)(x).\end{aligned}$$

Luego, los dos miembros coinciden, probando lo deseado. $\square$

En lo que sigue será de gran utilidad el hecho que, si T_A es un A-módulo inclinante y $B=\mathrm{End}\,T_A$, entonces ${}_BT$ es un B^{op}-módulo inclinante, probado en (4.2).

Lema 4.6. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B=\mathrm{End}\,T_A$. Entonces $Y\in\mathscr{Y}(T_A)$, si y sólo si el morfismo funtorial $\delta_Y : Y\to \mathrm{Hom}_A(T,Y\otimes_B T)$ definido por $y\mapsto (t\mapsto y\otimes t)$ es un isomorfismo.*

Demostración. El resultado se obtiene por dualidad utilizando (3.7). En efecto, $Y_B\in\mathscr{Y}(T_A)$ si y sólo si $DY\in\mathscr{T}({}_BT)$. Como ${}_BT$ es inclinante, resulta de (3.7) que esto equivale a decir que $\varepsilon_{DY} : \mathrm{Hom}_{B^{op}}(T,DY)\otimes_{A^{op}} T\to DY$ es biyectiva, y sabemos por lo arriba demostrado que esto vale si y sólo si $\delta_Y : Y\to\mathrm{Hom}_A(T,Y\otimes_B T)$ es un isomorfismo. $\square$

Estamos ahora en condiciones de probar el teorema principal de esta sección (y de este capítulo), el teorema de inclinación.

Teorema 4.7. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B=\mathrm{End}\,T_A$. Entonces:*

(a) *Los funtores $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ y $-\otimes_B T$ inducen equivalencias cuasi-inversas entre $\mathscr{T}(T)$ e $\mathscr{Y}(T)$.*

(b) *Los funtores $\mathrm{Ext}^1_A(T,-)$ y $\mathrm{Tor}^B_1(-,T)$ inducen equivalencias cuasi-inversas entre $\mathscr{F}(T)$ y $\mathscr{X}(T)$.*

Demostración. (a) Comenzamos probando que si $Y\in\mathscr{Y}(T_A)$ entonces $Y\otimes_B T\in\mathscr{T}(T_A)$. Sea $Y\in\mathscr{Y}(T)$. Sabemos que existe un epimorfismo $B^m\to Y$, con $m>0$, y por lo tanto un epimorfismo $T_A^m\cong B^m\otimes_B T_A\to Y\otimes_B T$. Por lo tanto $Y\otimes_B T\in\mathrm{Gen}\,T_A=\mathscr{T}(T_A)$.

Sea $M\in\mathscr{T}(T_A)$. Probaremos que $\mathrm{Hom}_A(T,M)\in\mathscr{Y}(T_A)$ por dualidad, teniendo en cuenta que ${}_BT$ es un módulo inclinante y que $A\cong(\mathrm{End}\,{}_BT)^{op}$ por (4.2). Como $M\in\mathscr{T}(T_A)$, entonces

$DM \in \mathscr{Y}({}_BT)$, de donde $T \otimes_A DM \in \mathscr{T}({}_BT)$, por lo que acabamos de demostrar. Luego $\mathrm{Hom}_A(T,M) \cong D(T \otimes_A DM) \in \mathscr{Y}(T_A)$, lo que prueba lo deseado.

Ya sabemos que $\mathrm{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \cong M$, para $M \in \mathscr{T}(T_A)$, por (3.7). Por otro lado, usando (4.6) tenemos que $Y \cong \mathrm{Hom}_A(T, Y \otimes_B T)$, para $Y \in \mathscr{Y}(T_A)$, lo que termina la demostración de (a).

(b) Sea $N \in \mathscr{F}(T_A)$. Existe una sucesión exacta corta

$$0 \to N \to I \to M \to 0$$

con I inyectivo. Entonces $I, M \in \mathscr{T}(T_A)$. Como $\mathrm{Hom}_A(T,N) = 0$ y $\mathrm{Ext}^1_A(T,I) = 0$ se deduce una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T,I) \to \mathrm{Hom}_A(T,M) \to \mathrm{Ext}^1_A(T,N) \to 0.$$

En virtud de (a), $M \in \mathscr{T}(T_A)$ implica $\mathrm{Hom}_A(T,M) \in \mathscr{Y}(T_A)$. Esto quiere decir que $\mathrm{Tor}^B_1(\mathrm{Hom}_A(T,M),T)) = 0$ y tenemos entonces un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}^B_1(\mathrm{Ext}^1_A(T,N),T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T,I) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{T_0}"] & \mathrm{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & \mathrm{Ext}^1_A(T,N) \otimes_B T \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & I \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde ε_{T_0}, ε_M son isomorfismos. Se deduce enseguida que $\mathrm{Ext}^1_A(T,N) \otimes_B T = 0$ (de donde $\mathrm{Ext}^1_A(T,N) \in \mathscr{X}(T_A)$), y que $\mathrm{Tor}^B_1(\mathrm{Ext}^1_A(T,N),T) \cong N$.

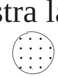
La recíproca resulta nuevamente por dualidad. Sea $X \in \mathscr{X}(T_A)$. Entonces $DX \in \mathscr{F}({}_BT)$, de donde $\mathrm{Tor}^A_1(\mathrm{Ext}^1_{B^{op}}(T,DX),T) \cong DX$ por lo recién probado. Esto es,

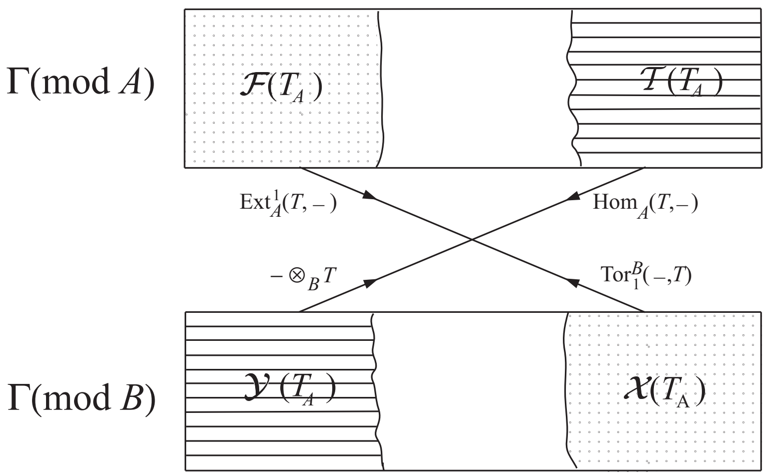
$$X \cong D\mathrm{Tor}^A_1(\mathrm{Ext}^1_{B^{op}}(T,DX),T) \cong \mathrm{Ext}^1_{A^{op}}(\mathrm{Ext}^1_{B^{op}}(T,DX),DT)$$

$$\cong \mathrm{Ext}^1_{A^{op}}(D\mathrm{Tor}^{B^{op}}_1(T,DX),DT) \cong \mathrm{Ext}^1_A(T,\mathrm{Tor}^B_1(X,T)),$$

usando los isomorfismos funtoriales de ([CE] p. 120, [Ro] (9.51) p. 257 ó [A] (IX.4.2) p. 259.). Además, como $DX \in \mathscr{F}({}_BT)$, tenemos que $D\mathrm{Tor}^{B^{op}}_1(T,X) \cong \mathrm{Ext}^1_{B^{op}}(T,DX)$ pertenece a $\mathscr{X}({}_BT)$ por lo recién probado. Entonces $\mathrm{Tor}^{B^{op}}_1(T,X) \in D\mathscr{X}({}_BT) = \mathscr{F}(T_A)$.

$\square$

Es posible visualizar las equivalencias inversas de inclinación en los carcajes de Auslander-Reiten de A y de B. En efecto, en un carcaj de Auslander-Reiten, diseñado de manera tal que los morfismos vayan de izquierda a derecha, una clase de torsión se encuentra siempre "hacia la derecha" del carcaj mientras que la clase sin torsión correspondiente se encuentra "hacia la izquierda". Se obtiene así la figura siguiente, que muestra las clases $\mathscr{T}$ e $\mathscr{Y}$ (representadas por ) y las clases $\mathscr{F}$ y $\mathscr{X}$ (representadas por ) así como las equivalencias inversas.

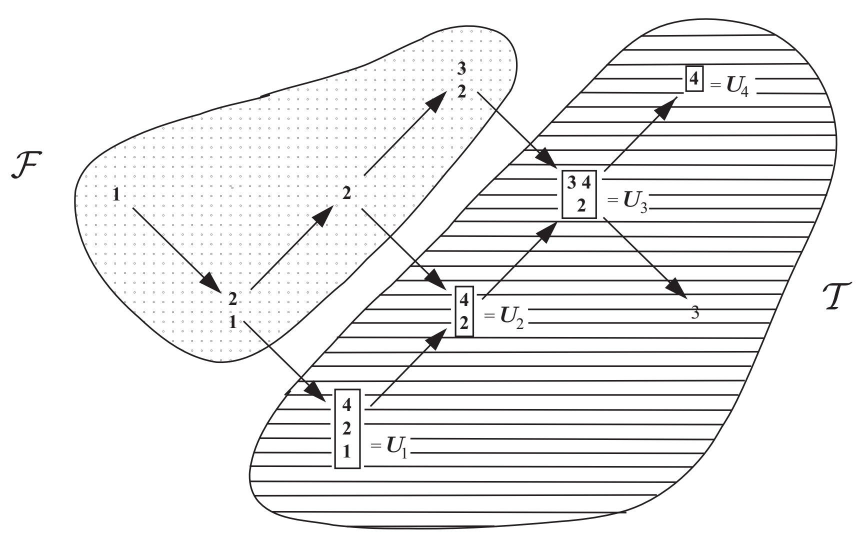


Ejemplo 4.8. (a) Sea, como en (II.3.12)(a), el álgebra A dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} & \circ 4 \arrow[d, "\gamma"] & \\ \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\beta"'] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

ligado por $\alpha\beta = 0$.

(i) Sea $U = \bigoplus_{i=1}^{4} U_i$, donde $U_1 = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$, $U_2 = \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$, $U_3 = \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}$ y $U_4 = 4$. En (II.3.12)(a) verificamos que U es inclinante y calculamos el par de torsión $(\mathscr{T}(U_A), \mathscr{F}(U_A))$

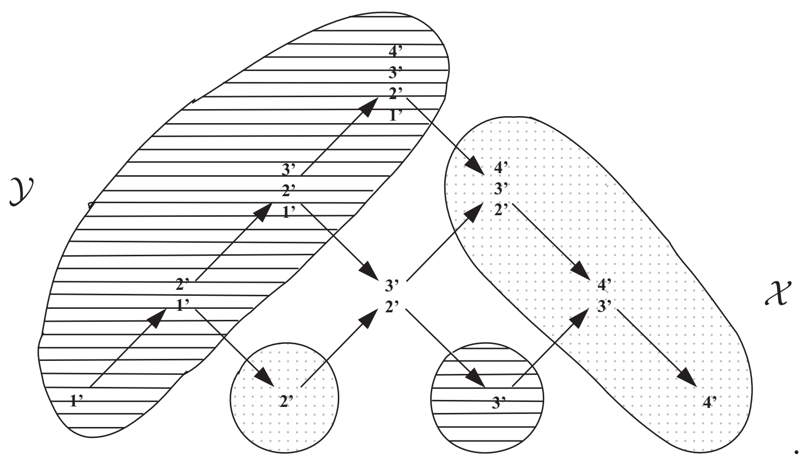


.

Entonces, $B = \operatorname{End} U_A$ está dada por el carcaj

$$\underset{1'}{\circ} \longleftarrow \underset{2'}{\circ} \longleftarrow \underset{3'}{\circ} \longleftarrow \underset{4'}{\circ}$$

sin relaciones. Hemos designado por i' al punto cuyo proyectivo indescomponible correspondiente es $Q_{i'} = \operatorname{Hom}_A(U, U_i)$. Entonces $\Gamma(\operatorname{mod} B)$ está dado por



La acción de los funtores $\operatorname{Hom}_A(U,-)$ y $\operatorname{Ext}^1_A(U,-)$ sobre los A-módulos indescomponibles se calcula directamente. En efecto:

$\operatorname{Hom}_A(U, \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}) = 1'$; $\operatorname{Hom}_A(U, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}2'\\1'\end{smallmatrix}$; $\operatorname{Hom}_A(U, \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}3'\\2'\\1'\end{smallmatrix}$; $\operatorname{Hom}_A(U, 4) = \begin{smallmatrix}4'\\3'\\2'\\1'\end{smallmatrix}$

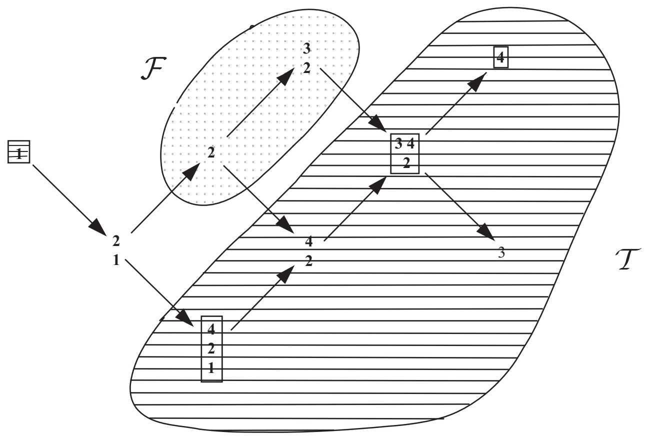
y $\operatorname{Hom}_A(U, 3) = 3'$

en tanto que, como $\operatorname{dp} U \leq 1$,

$\operatorname{Ext}^1_A(U, 1) \cong D\operatorname{Hom}_A(1, \tau U) = 2'$; $\operatorname{Ext}^1_A(U, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}) \cong D\operatorname{Hom}_A(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, \tau U) = \begin{smallmatrix}4'\\3'\\2'\end{smallmatrix}$; $\operatorname{Ext}^1_A(U, 2)$

$\cong D\operatorname{Hom}_A(2, \tau U) = \begin{smallmatrix}4'\\3'\end{smallmatrix}$ y $\operatorname{Ext}^1_A(U, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \cong D\operatorname{Hom}_A(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, \tau U) = 4'$.

(ii) Sea $V = \bigoplus_{i=1}^4 V_i$, donde $V_1 = 1$, $V_2 = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$, $V_3 = \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}$ y $V_4 = 4$. En (3.12) verificamos que V es un A-módulo inclinante y calculamos $(\mathscr{T}(V), \mathscr{F}(V))$.



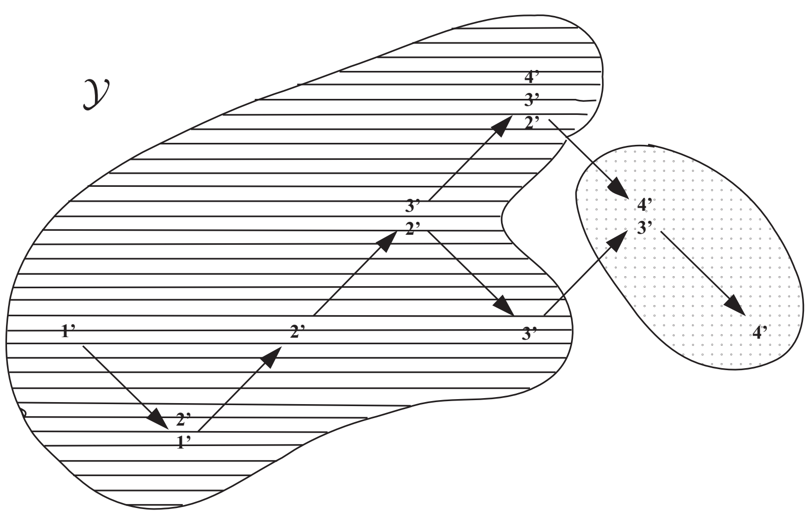
Aquí, B está dada por el carcaj

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \xleftarrow{\nu} & \circ & \xleftarrow{\mu} & \circ & \xleftarrow{\lambda} & \circ \\ 1' & & 2' & & 3' & & 4' \end{array}$$

ligado por la relación $\mu\nu = 0$, donde, para $i \in \{1,2,3,4\}$, se ha designado por i' al punto cuyo proyectivo correspondiente es $Q_{i'} = \mathrm{Hom}_A(V, V_i)$. Así, la relación $\mu\nu = 0$ proviene del hecho que

$$\mathrm{Hom}_A(V_1, V_3) = \mathrm{Hom}_A(1, \begin{smallmatrix} 34 \\ 2 \end{smallmatrix}) = 0.$$

El carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathrm{mod}\,B)$ de B es



Aquí,

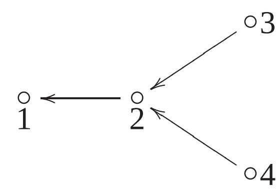
$\mathrm{Hom}_A(V, 1) = 1'$; $\mathrm{Hom}_A(V, \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}) = 2'$; $\mathrm{Hom}_A(V, 4) = \begin{smallmatrix} 4' \\ 3' \\ 2' \end{smallmatrix}$;

$\mathrm{Hom}_A(V, \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix} 2' \\ 1' \end{smallmatrix}$; $\mathrm{Hom}_A(V, \begin{smallmatrix} 34 \\ 2 \end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix} 3' \\ 2' \end{smallmatrix}$; $\mathrm{Hom}_A(V, 3) = 3'$;

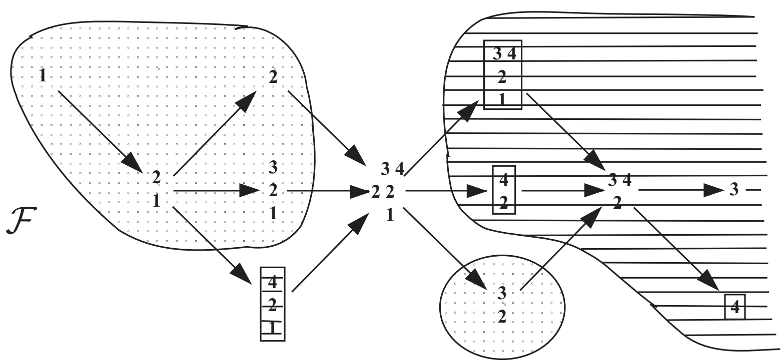
en tanto que, como dp$V \leq 1$,

$$\mathrm{Ext}^1_A(V, {\scriptstyle 2}) \cong D\mathrm{Hom}_A({\scriptstyle 2}, \tau U) = \begin{smallmatrix}4'\\3'\end{smallmatrix};\ \mathrm{Ext}^1_A(V, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) \cong D\mathrm{Hom}_A(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, \tau U) = {\scriptstyle 4'}.$$

(b) Sea A, como en el Ejemplo (II.3.12)(b), el álgebra de caminos del carcaj

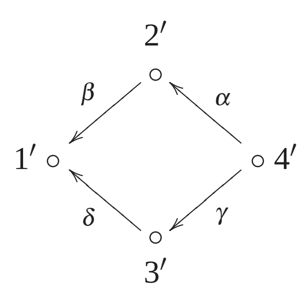


y sea $T = \bigoplus_{i=1}^4 T_i$, donde $T_1 = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$, $T_2 = \begin{smallmatrix}34\\2\\1\end{smallmatrix}$, $T_3 = \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$ y $T_4 = {\scriptstyle 4}$. Hemos verificado que T es un módulo inclinante y hemos calculado el par de torsión $(\mathscr{T}(T_A), \mathscr{F}(T_A))$

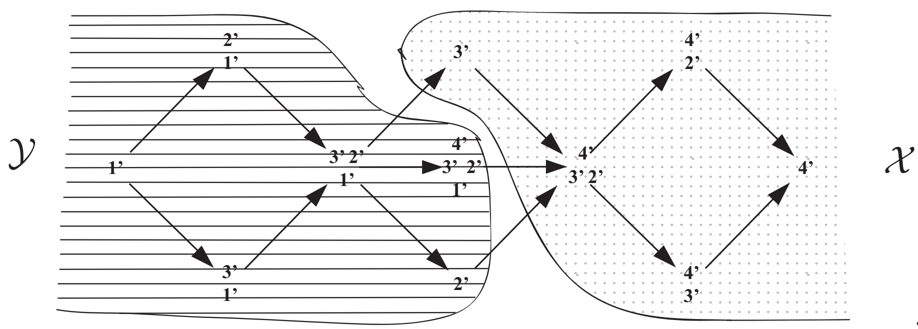


.

Aquí, B está dada por el carcaj



ligado por la relación $\alpha\beta = \gamma\delta$. Una vez más, hemos notado por i' al punto tal que $Q_{i'} = \mathrm{Hom}_A(T, T_i)$. La relación $\alpha\beta = \gamma\delta$ corresponde al hecho que las composiciones $\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}34\\2\\1\end{smallmatrix} \to 4$ y $\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \to {\scriptstyle 4}$ son iguales (a menos de escalares). El carcaj de Auslander-Reiten de B está dado por



Aquí se tiene

$\mathrm{Hom}_A(T, \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}) = 1'$; $\mathrm{Hom}_A(T, \begin{smallmatrix}34\\2\\1\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}2'\\1'\end{smallmatrix}$; $\mathrm{Hom}_A(T, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}3'\\1'\end{smallmatrix}$;

$\mathrm{Hom}_A(T, \begin{smallmatrix}34\\2\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}3'2'\\1'\end{smallmatrix}$; $\mathrm{Hom}_A(T, 4) = \begin{smallmatrix}4'\\3'2'\\1'\end{smallmatrix}$; $\mathrm{Hom}_A(T, 3) = 2'$, y

$\mathrm{Ext}^1_A(T,1) = 3'$; $\mathrm{Ext}^1_A(T, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}4'\\3'2'\end{smallmatrix}$; $\mathrm{Ext}^1_A(T, 2) = \begin{smallmatrix}4'\\2'\end{smallmatrix}$; $\mathrm{Ext}^1_A(T, \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}4'\\3'\end{smallmatrix}$; $\mathrm{Ext}^1_A(T, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = 4'$.

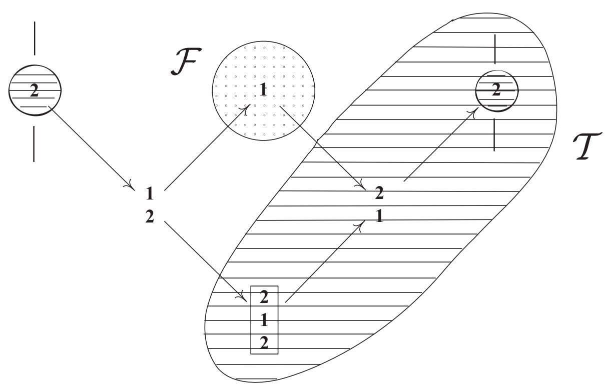
(c) Sea A dada por el carcaj

$$1 \circ \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \circ\, 2$$

ligado por $\alpha\beta = 0$. Consideramos $T_A = \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus 2$. Entonces $\mathrm{dp} T_A \leq 1$ pues $\begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix}$ es proyectivo y hay una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}2\\1\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow 2 \longrightarrow 0$$

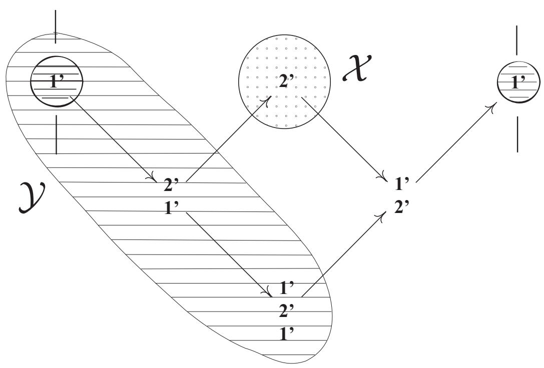
con $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ proyectivo. La misma sucesión da (T_3) (por (II.3.8)). Finalmente $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) \cong D\mathrm{Hom}_A(T, \tau_A T) \cong D\mathrm{Hom}_A(T, 1) = 0$. Así, T es un A-módulo inclinante. El carcaj de Auslander-Reiten de A está dado por



donde se identifican las dos copias de 2, y hemos calculado el par de torsión $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$. Aquí, B está dada por el carcaj

$$1' \circ \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \circ 2'$$

donde $1'$ es tal que $Q_{1'} = \mathrm{Hom}_A(T, \begin{smallmatrix} 2\\1\\2 \end{smallmatrix})$ y $2'$ es tal que $Q_{2'} = \mathrm{Hom}_A(T,2)$. Como la composición $2 \to \begin{smallmatrix} 2\\1\\2 \end{smallmatrix} \to 2$ es nula, se tiene la relación $\mu\lambda = 0$. El carcaj de Auslander-Reiten de B está dado por



donde se identifican las dos copias de $1'$.

Aquí se tiene

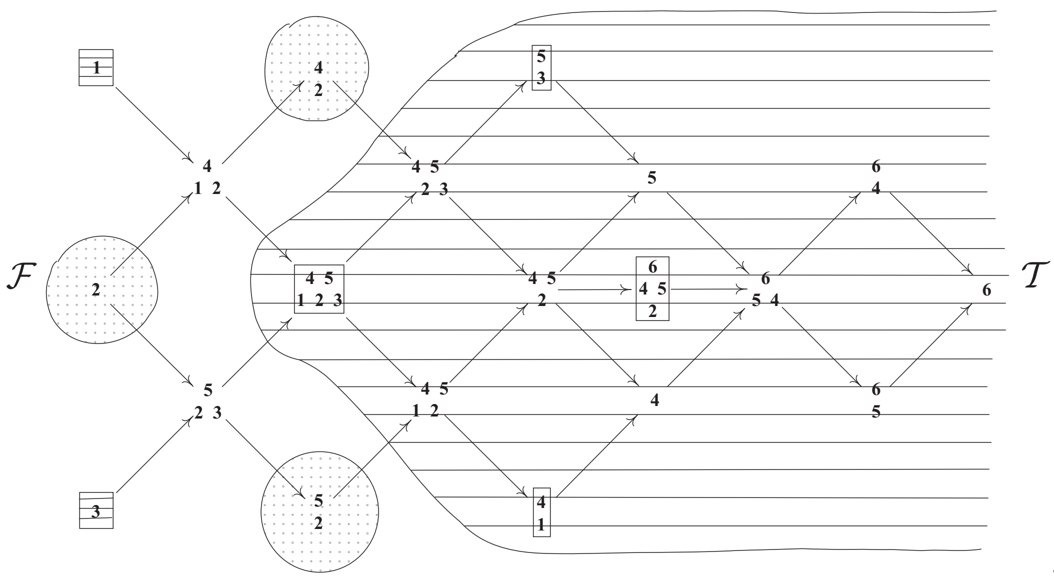
$$\mathrm{Hom}_A(T,2) = \begin{smallmatrix} 2'\\1' \end{smallmatrix}; \mathrm{Hom}_A(T, \begin{smallmatrix} 2\\1\\2 \end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix} 1'\\2'\\1' \end{smallmatrix}; \mathrm{Hom}_A(T, \begin{smallmatrix} 2\\1 \end{smallmatrix}) = 1',$$

en tanto que $\mathrm{Ext}^1_A(T,1) \cong D\mathrm{Hom}_A(1,\tau T) \cong 2'$, de donde $(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ corresponde a lo indicado en la figura.

(d) Sea A dada por el carcaj

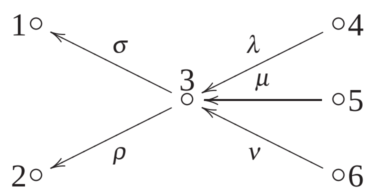
$$\begin{tikzcd}
1 & & \\
& 4 \arrow[ul, "\varepsilon"'] \arrow[dl, "\beta"'] & \\
2 & & 6 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
& 5 \arrow[ul, "\delta"] \arrow[dl, "\pi"] & \\
3 & &
\end{tikzcd}$$

ligado por $\alpha\varepsilon = 0, \gamma\pi = 0$ y $\alpha\beta = \gamma\delta$. Sea $T = 1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix} 45\\123 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 5\\3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4\\1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 6\\45\\2 \end{smallmatrix}$. Dejamos al lector la tarea de verificar que T es un módulo inclinante y que el par de torsión $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ está dado por

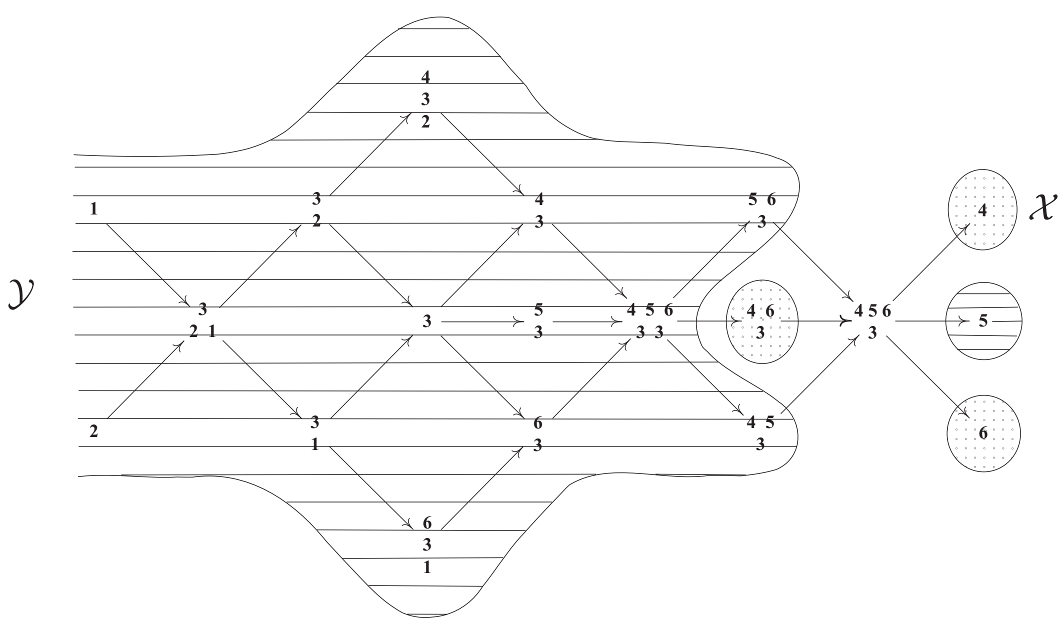


.

Aquí, B está dado por el carcaj



ligado por $\mu\sigma = 0$, $\mu\rho = 0$, $\lambda\sigma = 0$ y $\nu\rho = 0$. El par de torsión $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ está dado por



.

5. CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE INCLINACIÓN

La primera consecuencia importante del teorema de inclinación es la relación entre las dimensiones globales del álgebra de partida y del álgebra de endomorfismos de un módulo inclinante.

Sea $\mathscr{C}$ una subcategoría plena de una categoría de módulos. Notamos $\mathrm{dp}\mathscr{C}$ al supremo de las dimensiones proyectivas de los módulos de $\mathscr{C}$.

Lema 5.1. *Sean A un álgebra y $\mathscr{C}$ una clase sin torsión de* $\mathrm{mod}A$ *que contiene los proyectivos. Entonces* $\mathrm{dim.gl.}A \leq 1+\mathrm{dp}\mathscr{C}$.

Demostración. Para todo A-módulo M existe una sucesión exacta corta

$$0 \to L \to P \to M \to 0$$

con P proyectivo. Pero entonces $P \in \mathscr{C}$ y, por lo tanto, $L \in \mathscr{C}$. Luego

$$\mathrm{dp}M \leq 1+\mathrm{dp}L \leq 1+\mathrm{dp}\mathscr{C}.$$

□

Lema 5.2. *Sean A un álgebra y T un A-módulo inclinante. Para todo $M \in \mathscr{T}(T)$ se tiene* $\mathrm{dp}\,\mathrm{Hom}_A(T,M) \leq \mathrm{dp}M$.

Demostración. Por recurrencia sobre $n = \mathrm{dp}M$. Si $n = 0$ entonces M es proyectivo. Como $M \in \mathscr{T}(T)$, se tiene que $M \in \mathrm{add}\,T$. En consecuencia, $\mathrm{Hom}_A(T,M)$ es proyectivo y no hay nada que probar. Supongamos $n \geq 1$. Por (II.3.5), existe una sucesión exacta

$$0 \to L \to T_0 \to M \to 0$$

con $T_0 \in \mathrm{add}\,T$ y $L \in \mathscr{T}(T)$. Usando (II.3.6), deducimos una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T,L) \to \mathrm{Hom}_A(T,T_0) \to \mathrm{Hom}_A(T,M) \to 0.$$

Sea N un A-módulo arbitrario. El funtor $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ aplicado a la primera de las sucesiones precedentes da una sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}_A^n(T_0,N) \to \mathrm{Ext}_A^n(L,N) \to \mathrm{Ext}_A^{n+1}(M,N) = 0$$

(pues $n = \mathrm{dp}\ M$). Consideramos ahora dos casos. Si $n = 1$, consideremos $N \in \mathscr{T}(T)$. En la sucesión precedente se tiene que $\mathrm{Ext}_A^1(T_0,N) = 0$ y por lo tanto $\mathrm{Ext}_A^1(L,N) = 0$. Luego L es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}(T)$. Por (II.3.5), $L \in \mathrm{add}(T)$. En consecuencia $\mathrm{Hom}_A(T,L)$ es un B-módulo proyectivo y la segunda sucesión exacta da $\mathrm{dp}\ \mathrm{Hom}_A(T,M) \leq 1$.

Si $n > 1$, entonces $\mathrm{dp}\ T_0 \leq 1$ implica que $\mathrm{Ext}_A^n(L,N) = 0$ para todo A-módulo N, de donde $\mathrm{dp}L \leq n-1$. De la hipótesis de recurrencia resulta que $\mathrm{dp}\ \mathrm{Hom}_A(T,L) \leq n-1$ y de la segunda sucesión exacta corta de arriba obtenemos entonces

$$\mathrm{dp}\,\mathrm{Hom}_A(T,M) \leq 1+\mathrm{dp}\,\mathrm{Hom}_A(T,L) \leq n.$$

□

Teorema 5.3. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B = \mathrm{End}\,T_A$. Entonces*

$$|\mathrm{dim.gl.}A - \mathrm{dim.gl.}B| \leq 1.$$

Demostración. La clase sin torsión $\mathscr{Y}(T)$ en mod$B$ contiene los proyectivos (en virtud de (II.1.2)(b)). Sea $Y \in \mathscr{Y}(T)$. Por el teorema de inclinación hay un módulo $M \in \mathscr{T}(T)$ tal que $Y \cong \mathrm{Hom}_A(T,M)$. Por (5.2), dp$Y \leq$ dp$M \leq$ dim.gl.A. Por lo tanto dp$\mathscr{Y}(T) \leq$ dim.gl.A. Resulta entonces de (5.1) que

$$\mathrm{dim.gl.}B \leq 1 + \mathrm{dim.gl.}A.$$

Considerando T como un B^{op}-módulo inclinante se tiene también que

$$\mathrm{dim.gl.}A \leq 1 + \mathrm{dim.gl.}B$$

porque $A \cong (\mathrm{End}\,{}_BT)^{op}$, en virtud de (II.4.2). □

Ejemplo 5.4. En el Ejemplo (II.4.8)(a)(i), tenemos dim.gl.$A = 2$ y dim.gl.$B = 1$. En el Ejemplo (II.4.8)(a)(ii), se tiene dim.gl.$A =$ dim.gl.$B = 2$. Finalmente, en el Ejemplo (II.4.8)(b), se tiene dim.gl.$A = 1$ y dim.gl.$B = 2$.

El cálculo de la dimensión global se realiza más sencillamente construyendo las resoluciones proyectivas de los módulos simples. En efecto, un resultado de M. Auslander dice que, para un álgebra A vale que

$$\mathrm{dim.gl.}A = \sup\{\mathrm{dp}S \,|\, S \,\mathrm{es\,un}\, A-\text{módulo simple}\}$$

(ver [AuRS](I.5.1) p.17 ó [A] (X.2.8) p. 282). A manera de ejemplo, calcularemos las dimensiones proyectivas de los A-módulos simples para el álgebra A de (II.4.8)(a). Aquí, A está dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} & \overset{4}{\circ} \arrow[d, "\gamma"] & \\ \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\beta"] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

ligado por $\alpha\beta = 0$.

Se tienen las siguientes resoluciones proyectivas

$$0 \to 1 \to 1 \to 0$$

$$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to 2 \to 0$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 0 \\ & & & 2 \arrow[ur, hook] & & & \end{tikzcd}$$

y

$$0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \to 4 \to 0.$$

Por lo tanto, dp $1 = 0$, dp $2 = 1 =$ dp 4, en tanto que dp $3 = 2$. Luego dim.gl.$A = 2$.

Por otro lado, el proceso de inclinación induce también un isomorfismo entre los grupos de Grothendieck de las álgebras involucradas (ver (I.1))

Teorema 5.5. *Sean A un álgebra, T un A-módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. La aplicación $f : K_0(A) \to K_0(B)$ definida por $M \mapsto \underline{\dim}\operatorname{Hom}_A(T,M) - \underline{\dim}\operatorname{Ext}^1_A(T,M)$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Sea $0 \to L \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta corta de A-módulos. Se deduce una sucesión exacta larga

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T,L) \to \operatorname{Hom}_A(T,M) \to \operatorname{Hom}_A(T,N) \to$$

$$\to \operatorname{Ext}^1_A(T,L) \to \operatorname{Ext}^1_A(T,M) \to \operatorname{Ext}^1_A(T,N) \to 0.$$

Resulta entonces de la definición de f y de las de $K_0(A)$ y $K_0(B)$, que f está bien definida y es un homomorfismo de grupos.

Sea S un B-módulo simple. Como $(\mathscr{X}(T), \mathscr{Y}(T))$ es un par de torsión tenemos que, o bien $S \in \mathscr{X}(T)$, o bien $S \in \mathscr{Y}(T)$. En el primer caso, $S \cong \operatorname{Hom}_A(T, S \otimes_B T)$ y $\operatorname{Ext}^1_A(T, S \otimes_B T) = 0$. En el segundo, $S \cong \operatorname{Ext}^1_A(T, \operatorname{Tor}^B_1(S,T))$, mientras que $\operatorname{Hom}_A(T, \operatorname{Tor}^B_1(S,T)) = 0$, en virtud del teorema de inclinación. En ambos casos, $\underline{\dim} S$ pertenece a la imagen de f. Luego f es sobreyectiva y por consiguiente el rango rg $K_0(A)$ de $K_0(A)$ es mayor o igual que el de $K_0(B)$. Como ${}_BT$ es también inclinante obtenemos que rg $K_0(B) \geq$ rg $K_0(A)$. $\square$

El resultado más importante de esta sección, debido a Bongartz, es una consecuencia de (5.5), y facilita mucho la tarea de determinar si un módulo dado es inclinante o no.

Corolario 5.6. *Sea $T = T_1^{n_1} \oplus T_2^{n_2} \oplus \cdots \oplus T_t^{n_t}$ con los T_i indescomponibles y tales que $T_i \ncong T_j$ para $i \neq j$. Entonces T es un A-módulo inclinante si y sólo si T es inclinante parcial y verifica*

($\mathrm{T}_{3'}$) $t = \operatorname{rg} K_0(A)$.

Demostración. Necesidad. Si T es inclinante, entonces es inclinante parcial y, además, $t =$ rg $K_0(B)$ (por (II.1.2)(b) y (5.5)). Pero entonces (5.5) implica ($\mathrm{T}_{3'}$).

Suficiencia. Si T es inclinante parcial, resulta de (II.3.2) que existe un módulo E tal que $T \oplus E$ es inclinante. En virtud de ($\mathrm{T}_{3'}$), el número de sumandos indescomponibles no isomorfos de $T \oplus E$, que es igual al rango de $K_0(A)$, debe también coincidir con t. Por lo tanto, $E \in \operatorname{add} T$, de donde T es inclinante. $\square$

El resultado siguiente, conocido como *Lema de Skowroński*, puede verse como una generalización de (5.6) y es de importancia capital por sus aplicaciones.

Corolario 5.7. *Sea $T = T_1^{n_1} \oplus T_2^{n_2} \oplus \cdots \oplus T_t^{n_t}$ con los T_i indescomponibles y tales que $T_i \ncong T_j$ para $i \neq j$. Si $\operatorname{Hom}_A(T, \tau T) = 0$ (ó, dualmente, $\operatorname{Hom}_A(\tau^{-1}T, T) = 0$), entonces $t \leq \operatorname{rg} K_0(A)$.*

Demostración. Sea I el anulador de T y $B = A/I$. Puede demostrarse (ver [AuRS], Exercise (II.5), p. 186-187) que el trasladado de Auslander-Reiten $\tau_B T$ de T en mod$B$ es un A-submódulo del trasladado $\tau_A T$ de T en mod$A$. Por lo tanto $\operatorname{Hom}_A(T, \tau_A T) = 0$ implica $\operatorname{Hom}_B(T, \tau_B T) = 0$. Como T_B es fiel, resulta de (II.2.7) que es inclinante parcial. En virtud del Lema de Bongartz (II.3.2), existe un B-módulo E tal que $T \oplus E$ es inclinante en mod$B$. Luego t no supera el número de sumandos indescomponibles no isomorfos de $T \oplus E$, que es igual, por (5.6), al rango de $K_0(B)$. Como $\operatorname{rg} K_0(B) \leq \operatorname{rg} K_0(A)$, se deduce que $t \leq \operatorname{rg} K_0(A)$. $\square$

Si, en particular, T es un módulo inclinante parcial, entonces el número de clases de isomorfismo de sumandos indescomponibles de T no puede superar el rango de $K_0(A)$.

El lema siguiente, llamado ”lema de conexión”, dice qué ocurre en la ”frontera” entre $\mathscr{X}(T)$ e $\mathscr{Y}(T)$.

Lema 5.8. *Sean A un álgebra, T un A - módulo inclinante y $B = \mathrm{End}\, T_A$. Sean P_A un proyectivo indescomponible e I_A un inyectivo indescomponible tales que* $\mathrm{soc} I = P/\mathrm{rad} P$. *Entonces*

$$\tau^{-1}\mathrm{Hom}_A(T,I) \cong \mathrm{Ext}^1_A(T,P).$$

En particular, $P \in \mathrm{add}\, T$ si y sólo si $\mathrm{Hom}_A(T,I)$ es un B - módulo inyectivo.

Demostración. Como T es un módulo inclinante, existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow T' \xrightarrow{f} T'' \longrightarrow 0$$

con T', $T"$ $\in \mathrm{add} T$. Aplicando $\mathrm{Hom}_A(-,T)$ obtenemos una resolución proyectiva del B^{op}-módulo $\mathrm{Hom}_A(P,T)$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A\left(T'',T\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A\left(T',T\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P,T) \longrightarrow 0.$$

Por otra parte, existe un isomorfismo funtorial

$$\mathrm{Hom}_A(T,T_0) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{B^{op}}(\mathrm{Hom}_A(T_0,T), \mathrm{Hom}_A(T,T))$$

dado por $u \longmapsto \mathrm{Hom}_A(u,T)$: en efecto, es un isomorfismo cuando $T_0 = T$ y los funtores son aditivos. Entonces el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{B^{op}}(\mathrm{Hom}_A(T',T), \mathrm{Hom}_A(T,T)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{B^{op}}(\mathrm{Hom}_A(f,T),\mathrm{Hom}_A(T,T))"'] & \mathrm{Hom}_A(T,T') \arrow[d, "\mathrm{Hom}_A(T,f)"] \\
\mathrm{Hom}_{B^{op}}(\mathrm{Hom}_A(T'',T), \mathrm{Hom}_A(T,T)) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_A(T,T'')
\end{tikzcd}$$

y la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A\left(T,T'\right) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(T,f)} \mathrm{Hom}_A\left(T,T''\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T,P) \longrightarrow 0$$

muestran que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^1_A(T,P) &\cong \mathrm{Coker}\ \mathrm{Hom}_A(T,f) \\
&\cong \mathrm{Coker}\ \mathrm{Hom}_{B^{op}}(\mathrm{Hom}_A(f,T),B) \\
&\cong Tr\ \mathrm{Hom}_A(P,T).
\end{aligned}$$

Por (I.1.2), tenemos que $\mathrm{Hom}_A(P,T) \cong D\mathrm{Hom}_A(T,I)$, de donde

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^1_A(T,P) &\cong TrD\mathrm{Hom}_A(T,I) \\
&= \tau^{-1}\mathrm{Hom}_A(T,I).
\end{aligned}$$

El último enunciado sigue del hecho que un módulo proyectivo P está en add T si y sólo si está en $\mathscr{T}(T) = \mathrm{Gen} T$, si y sólo si $\mathrm{Ext}^1_A(T,P) = 0$. $\square$

Corolario 5.9. *Sean A un álgebra, T un A - módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. Sean I un A - módulo inyectivo y M un A - módulo arbitrario. Entonces, para cada $i > 0$, tenemos*

$$\operatorname{Ext}_B^i(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,I)) = 0.$$

Demostración. Sea

$$\dots P_t \xrightarrow{f_t} \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} \operatorname{Hom}_A(T,M) \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de $\operatorname{Hom}_A(T,M)$ en $\operatorname{mod} B$, y ponemos $K_i = \operatorname{Im}\ f_i$ para cada $i \geq 0$. Como todos los B - módulos proyectivos están en la clase sin torsión $\mathscr{Y}(T)$, entonces $K_i \in \mathscr{Y}(T)$ para cada i. Ahora, empleando la fórmula de Auslander-Reiten y el lema de conexión (II.5.8) tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}_B^i(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,I)) &\cong \operatorname{Ext}_B^1(K_{i-1}, \operatorname{Hom}_A(T,I)) \\ &\cong D\, \underline{\operatorname{Hom}}_B\left(\tau^{-1}\operatorname{Hom}_A(T,I), K_{i-1}\right) \\ &\cong D\, \underline{\operatorname{Hom}}_B\left(\operatorname{Ext}_A^1(T,P), K_{i-1}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

porque $K_{i-1} \in \mathscr{Y}(T)$ y $\operatorname{Ext}_A^1(T,P) \in \mathscr{X}(T)$, como se deduce fácilmente aplicando $\operatorname{Hom}_A(T,-)$ a la sucesión canónica para M respecto del par de torsión $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$. □

Terminaremos esta sección con un teorema, debido a Hoshino, que permite determinar si un par de torsión asociado a un módulo inclinante se escinde.

Lema 5.10. *Sean A un álgebra y T un A-módulo inclinante. Si $M \in \mathscr{T}(T)$ y $N \in \mathscr{F}(T)$, se tiene*

$$\operatorname{Ext}_A^2(M,N) \cong \operatorname{Ext}_B^1(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Ext}_A^1(T,N)).$$

Demostración. Sea $0 \to N \to I \to N' \to 0$ una sucesión exacta corta , con I inyectivo. Como $N \in \mathscr{F}(T)$, se deduce una sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T,I) \to \operatorname{Hom}_A(T,N') \to \operatorname{Ext}_A^1(T,N) \to 0.$$

El funtor $\operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(T,M), -)$ induce una sucesión exacta

$$\operatorname{Ext}_B^1(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,I)) \to \operatorname{Ext}_B^1(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,N')) \to$$
$$\to \operatorname{Ext}_B^1(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Ext}_A^1(T,N)) \to \operatorname{Ext}_B^2(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,I)).$$

En virtud del Corolario 5.9, y como $I \in \mathscr{T}(T)$, tenemos que

$$\operatorname{Ext}_B^1(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,I)) = 0$$

y

$$\operatorname{Ext}_B^2(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,I)) = 0.$$

Por lo tanto, como $N' \in \mathscr{T}(T)$,

$$\operatorname{Ext}_B^1(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Ext}_A^1(T,N)) \cong$$
$$\operatorname{Ext}_B^1(\operatorname{Hom}_A(T,M), \operatorname{Hom}_A(T,N')) \cong \operatorname{Ext}_A^1(M,N') \cong \operatorname{Ext}_A^2(M,N).$$

□

Teorema 5.11. *Sean A un álgebra y T un A-módulo inclinante. Entonces*
(a) $(\mathscr{X}(T),\mathscr{Y}(T))$ *se escinde si y sólo si* di $\mathscr{F}(T)\leq 1$.
(B) $(\mathscr{T}(T),\mathscr{F}(T))$ *se escinde si y sólo si* dp $\mathscr{X}(T)\leq 1$.

Demostración. Probaremos (a). La prueba de (b) es similar.

Supongamos en efecto que el par $(\mathscr{X}(T),\mathscr{Y}(T))$ se escinde. En particular, $\mathrm{Ext}_B^1(Y,X)=0$ para todo $Y\in\mathscr{Y}(T)$ y $X\in\mathscr{X}(T)$ (en virtud de (II.2.9).

Sea entonces $N\in\mathscr{F}(T)$. Consideramos una copresentación inyectiva minimal

$$0\to N\xrightarrow{d^0} I^0\xrightarrow{d^1} I^1$$

y pongamos $L^0=\mathrm{Im}d^1$ y $L^1=\mathrm{Coker}d^1$. Se tiene entonces

$$\mathrm{Ext}_A^1(L^1,L^0)\cong\mathrm{Ext}_A^2(L^1,N)\cong\mathrm{Ext}_B^1(\mathrm{Hom}_A(T,L^1),\mathrm{Ext}_A^1(T,N))=0,$$

dado que $\mathrm{Hom}_A(T,L^1)\in\mathscr{Y}(T)$ y $\mathrm{Ext}_A^1(T,N)\in\mathscr{X}(T)$. Entonces la sucesión exacta corta

$$0\to L^0\to I^1\to L^1\to 0$$

se parte. Luego L^0 es inyectivo. Por lo tanto di $N\leq 1$.

Recíprocamente, supongamos di $\mathscr{F}(T)\leq 1$. Sean $Y\in\mathscr{Y}(T)$ y $X\in\mathscr{X}(T)$. Entonces existen $M\in\mathscr{T}(T)$ y $N\in\mathscr{F}(T)$ tales que $Y\cong\mathrm{Hom}_A(T,M)$ y $X\cong\mathrm{Ext}_A^1(T,N)$ (por el teorema de inclinación). Se tiene entonces

$$\mathrm{Ext}_B^1(Y,X)\cong\mathrm{Ext}_B^1(\mathrm{Hom}_A(T,M),\mathrm{Ext}_A^1(T,N))\cong\mathrm{Ext}_A^2(M,N)=0$$

dado que di $N\leq 1$. En virtud de (II.2.9), el par $(\mathscr{X}(T),\mathscr{Y}(T))$ se escinde. $\square$

En particular, si T es un módulo inclinante sobre un álgebra hereditaria A, el par de torsión $(\mathscr{X}(T),\mathscr{Y}(T))$ en mod$B$ siempre es escindido.