CAPITULO III

ALGEBRAS INCLINADAS

1. Algebras inclinadas

De todas las clases de álgebras con las que se trabaja en teoría de representaciones, las álgebras hereditarias son las que más se han estudiado (ver, por ejemplo, el capítulo VIII de [AuRS]). Las álgebras inclinadas forman una clase muy cercana a éstas.

Definición. Un álgebra de artin A se dice *inclinada* si existen un álgebra hereditaria H y un módulo inclinante T_H tales que $A \cong \operatorname{End} T_H$.

En el resto de estas notas supondremos, como en los capítulos anteriores, que las álgebras consideradas son siempre básicas y conexas.

Como asumimos que A es básica, si $T = \oplus_{i=1}^{n} T_i$ es una descomposición del módulo inclinante T en sumandos directos indescomponibles, entonces $T_i \ncong T_j$ para $i \neq j$. Esto sigue de (II.1.2) (b).

Por ejemplo, toda álgebra hereditaria es trivialmente inclinada. Un ejemplo distinto es el álgebra B del ejemplo (II.4.7) (b) dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} & \overset{2}{\circ} \arrow[dl, "\beta"'] & \\ 1\circ & & \circ 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\ & \underset{\circ}{3} \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

ligado por la relación $\alpha\beta = \gamma\delta$.

Una primera consecuencia sencilla del teorema de inclinación es el lema siguiente.

Lema 1.1. *Un álgebra A es inclinada si y sólo si existe un módulo inclinante T_A tal que $H = \operatorname{End} T_A$ es hereditaria.*

Demostración. Supongamos que A es inclinada. Entonces existen un álgebra hereditaria H y un módulo inclinante U_H tales que $A \cong \operatorname{End} U_H$. Como H es hereditaria, di $U_H \leq 1$ por lo que U_H es coinclinante. En virtud (del dual) de (II.4.2), ${}_AU$ es un A^{op} - módulo inclinante y $H \cong (\operatorname{End} {}_AU)^{op}$. Por consiguiente, el módulo $T_A = D({}_AU)$ es un A - módulo inclinante y $H \cong \operatorname{End} D({}_AU) \cong \operatorname{End} T_A$. La recíproca se prueba en forma análoga. □

En particular, de (1.1) y de (II.4.3) sigue que H es conexa.

Ahora vamos a probar que el carcaj de un álgebra inclinada es acíclico. Para ello utilizaremos el lema siguiente, debido a Happel y Ringel.

Lema 1.2. *Sea H un álgebra hereditaria y T_1, T_2 dos H- módulos indescomponibles tales que $\operatorname{Ext}_H^1(T_2,T_1) = 0$. Entonces todo morfismo no nulo de T_1 a T_2 es un monomorfismo o* *un epimorfismo. En particular, si T es indescomponible y* $\operatorname{Ext}^1_H(T,T)=0$*, entonces* End T_H *es un anillo de división.*

Demostración. Supongamos que el morfismo $f: T_1 \longrightarrow T_2$ no es ni inyectivo ni sobreyectivo. Sea $f = gh$ su factorización canónica a través de $\operatorname{Im} f$. Entonces la longitud $l(M)$ de $M = \operatorname{Im} f$ verifica $l(M) < l(T_1)$ y $l(M) < l(T_2)$. La sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} h \longrightarrow T_1 \xrightarrow{h} M \longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta

$$\operatorname{Ext}^1_H(T_2/M, T_1) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_H(T_2/M, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_H(T_2/M, \operatorname{Ker} h) = 0$$

puesto que H es hereditaria. Se deducen un diagrama conmutativo con filas exactas en mod$H$ como sigue

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & T_2/M & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & T_2 & \longrightarrow & T_2/M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

y la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow E \oplus M \longrightarrow T_2 \longrightarrow 0\,.$$

Como $\operatorname{Ext}^1_H(T_2, T_1) = 0$, esta última sucesión se parte. Como $l(M) < l(T_1)$ y $l(M) < l(T_2)$, entonces del Teorema de Krull-Schmidt se deduce que $M = 0$ y, por ende, $f = 0$. $\square$

Sea A un álgebra de artin y M , N dos A - módulos indescomponibles. Un *camino* en ind$A$ de M a N es una sucesión de morfismos no nulos

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_t} M_t = N$$

con cada M_i en ind$A$. Diremos entonces que M es un *predecesor* de N, y que N es un *sucesor* de M. Un tal camino es llamado un *ciclo* si $M \cong N$ y al menos uno de los f_i no es un isomorfismo. Un álgebra se dice *triangular* si no existen ciclos de la forma

$$P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_t = P_0$$

con $P_0, \ldots, P_t$ proyectivos. Esto equivale a decir que el carcaj de A es acíclico (ver [AuRS], pág. 69).

Corolario 1.3. *Toda álgebra inclinada es triangular.*

Demostración. Sea A un álgebra inclinada. Sabemos que existen un álgebra hereditaria H y un módulo inclinante T_H tales que $A \cong \operatorname{End} T_H$. Sean T_1', T_2' y T_3' sumandos indescomponibles de T y $f: T_1' \longrightarrow T_2'$, $g: T_2' \longrightarrow T_3'$ morfismos no nulos. No pueden ser simultáneamente f un epimorfismo propio y g un monomorfismo propio: en efecto, en tal caso tendríamos que $gf \neq 0$ y que gf no es ni inyectivo ni sobreyectivo, lo cual contradice (1.2).

Supongamos que A no es triangular. Todo ciclo entre módulos indescomponibles proyectivos induce, en virtud de (II.1.2), un ciclo

$$T_0 \xrightarrow{f_1} T_1 \xrightarrow{f_2} T_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_t} T_t = T_0$$

entre sumandos indescomponibles de T. La observación anterior implica que un ciclo no puede contener un epimorfismo propio seguido de un monomorfismo propio. Luego, todos los f_i son epimorfismos o todos son monomorfismos. Por consiguiente, la composición $f_t \dots f_1$ es un epimorfismo o un monomorfismo y, por lo tanto, es un isomorfismo. En cualquiera de los dos casos resulta que cada f_i es un isomorfismo, una contradicción. $\square$

Las propiedades siguientes son consecuencia del teorema de inclinación.

Proposición 1.4. *Sea H un álgebra hereditaria, T_H un módulo inclinante y $A = \mathrm{End}\ T_H$. Entonces:*

(a) El par de torsión $(\mathscr{X}(T), \mathscr{Y}(T))$ en $\mathrm{mod}A$ se escinde.

(b) $\mathrm{dim.gl.}A \leq 2$ *y, para todo A - módulo indescomponible M, se tiene que* $\mathrm{dp}M \leq 1$ *ó* $\mathrm{di}M \leq 1$.

Demostración. (a) Resulta de (II.5.9).

(b) La primera parte sigue de (II.5.3). Sea M un A - módulo indescomponible. Por (a), tenemos dos casos. Si $M \in \mathscr{Y}(T)$ entonces existe $M' \in \mathscr{T}(T)$ tal que $M \cong \mathrm{Hom}_A(T, M')$ y entonces $\mathrm{dp}M = \mathrm{dp}\,\mathrm{Hom}_A(T, M') \leq \mathrm{dp}M' \leq 1$ (aplicamos (II.5.2)). Si, por el contrario, $M \in \mathscr{X}(T)$ entonces, por (II.5.9), tenemos $\tau^{-1}M \in \mathscr{X}(T)$ mientras que $A_A \in \mathscr{Y}(T)$. Luego, $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}M, A\right) = 0$ y por lo tanto $\mathrm{di}M \leq 1$. $\square$

Una consecuencia inmediata de (a) y de (II.4.6) es que, si H es hereditaria de representación finita, entonces A también es de representación finita. La recíproca no vale, como lo muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.5. Sea H dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} & \overset{\circ}{2} \arrow[dl] & \\ 1\circ & & \circ 4 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & \underset{\circ}{3} \arrow[ul] & \end{tikzcd} .$$

Aquí, H es hereditaria y de representación infinita (ver [AuRS] (VIII.5.4), pág. 293). Consideremos $T_1 = 1$, $T_2 = \begin{smallmatrix}4\\3\\1\end{smallmatrix}$, $T_3 = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$, $T_4 = 4$. Es claro que cada uno de estos módulos es indescomponible. Para demostrar que $T = \oplus_{i=1}^4 T_i$ es inclinante, basta probar que $\mathrm{Ext}_H^1(T, T) = 0$, ya que H es hereditaria con 4 simples no isomorfos. Para probar este enunciado probamos primero que $\tau T_3 \cong \tau^{-1}T_3 \cong 3$. Para ello construimos una presentación proyectiva minimal de T_3

$$0 \longrightarrow P_3 = {\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}} \xrightarrow{\ f\ } P_4 = {\begin{smallmatrix} & 4 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}} \longrightarrow T_3 = {\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}} \longrightarrow 0\ .$$

Aplicando el funtor de Nakayama $\nu = D\mathrm{Hom}_A(-,A)$ a f, resulta que el núcleo de νf es el núcleo del único morfismo no nulo (a menos de escalares) de I_3 en I_4 , por lo tanto

$$\tau T_3 = \mathrm{Ker}\left({\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}} \longrightarrow 4 \right) = 3\,.$$

De manera análoga se prueba que $\tau^{-1}T_3 \cong 3$. Por simetría se tiene que $\tau T_2 \cong \tau^{-1}T_2 \cong 2$. Luego, podemos deducir que

$$\mathrm{Ext}^1_H(T_4,T_3) \cong D\mathrm{Hom}_H\left(\tau^{-1}T_3, T_4\right) \cong D\mathrm{Hom}_H(3,4) = 0$$

y

$$\mathrm{Ext}^1_H(T_3,T_1) \cong D\mathrm{Hom}_H(T_{1,}\tau T_3) \cong D\mathrm{Hom}_H(1,3) = 0\,.$$

Por simetría, $\mathrm{Ext}^1_H(T_4,T_2) = 0$ y $\mathrm{Ext}^1_H(T_2,T_1) = 0$. Finalmente,

$$\mathrm{Ext}^1_H(T_3,T_2) \cong D\mathrm{Hom}_H(T_2,\tau T_3) \cong D\mathrm{Hom}_H\left({\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}}, 3 \right) = 0\,,$$

y de manera análoga se prueba que $\mathrm{Ext}^1_H(T_2,T_3) = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1_H(T,T) = 0$ y T es un H - módulo inclinante.

El álgebra inclinada $A =$End T_H está dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd}
 & \overset{2}{\circ} \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1\circ & & \circ 4 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
 & \underset{}{\overset{3}{\circ}} \arrow[ul, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

ligado por las relaciones $\alpha\beta = 0$, $\gamma\delta = 0$. Este álgebra es de representación finita y su carcaj de Auslander-Reiten es

$$\begin{tikzcd}
 & {\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}} \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 3 \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}} \arrow[dr] & \\
1 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix} 2\,3 \\ 1 \end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {\begin{smallmatrix} 4 \\ 2\,3 \end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & 4 \\
 & {\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & 2 \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & {\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

en donde las líneas punteadas indican las sucesiones que casi se parten. Observamos que el A - módulo $U_A = {\begin{smallmatrix} 2 & & 3 \\ & 1 & \end{smallmatrix}} \oplus 3 \oplus 2 \oplus {\begin{smallmatrix} & 4 & \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix}}$ es tal que $H \cong \mathrm{End}\, U_A$.

2. Módulos inclinantes convexos.

La definición de álgebra inclinada hace mención a un álgebra hereditaria y a un módulo inclinante sobre ésta. Para verificar si un álgebra dada es inclinada, sería bueno saber cómo construir el álgebra hereditaria y el módulo inclinante en cuestión. Este es el objetivo de esta sección.

Sea A un álgebra de artin. Una subcategoría $\mathscr{C}$ de mod A se dirá *cerrada por predecesores* (o *por sucesores*) si, para todo $M \in \operatorname{ind}\mathscr{C}$, todo predecesor (o sucesor, respectivamente) de M pertenece también a $\mathscr{C}$. Ejemplos de tales subcategorías aparecen en el lema siguiente.

Lema 2.1. *Sea $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ un par de torsión en mod A. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(a) $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ se escinde.
(b) $\mathscr{F}$ es cerrada por predecesores.
(c) $\mathscr{T}$ es cerrada por sucesores.

Demostración. Por dualidad, basta probar la equivalencia entre (a) y (b). Supongamos entonces que $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ se escinde y sea $M \in \mathscr{F}$ indescomponible. Para todo $L \in \operatorname{ind}A$, tenemos que o bien $L \in \mathscr{T}$, o bien $L \in \mathscr{F}$. Si $\operatorname{Hom}_A(L,M) \neq 0$, se debe tener $L \in \mathscr{F}$. Por inducción se prueba inmediatamente que todo predecesor de M pertenece a $\mathscr{F}$. Por lo tanto, (a) implica (b). La recíproca resulta de (II.2.9) ya que, para todo módulo M indescomponible no proyectivo, τM es un predecesor de M . □

Un A - módulo inclinante T_A se dice *separante* si el par de torsión $(\mathscr{T}(T_A),\mathscr{F}(T_A))$ se escinde. Así, (II.3.10)(c) implica que todo módulo inclinante APR es separante. Daremos otro ejemplo, para lo cual recordaremos que un álgebra A es inclinada si y sólo si existe un A - módulo inclinante T_A tal que End T_A es hereditaria (en virtud de (1.1)).

Lema 2.2. *Sea A un álgebra inclinada, y T un A - módulo inclinante tal que $H = \operatorname{End} T_A$ es hereditaria. Entonces T_A es separante.*

Demostración. Por (II.4.2), ${}_HT$ es inclinante y el par de torsión $(\mathscr{X}({}_HT),\mathscr{Y}({}_HT))$ se escinde en $\operatorname{mod}A^{op}$, por (1.4)(a). Además, por (II.4.4), $\mathscr{T}(T_A) = D\mathscr{Y}({}_HT)$ y $\mathscr{F}(T_A) = D\mathscr{X}({}_HT)$. Luego T_A es separante. □

Un conjunto Σ de módulos indescomponibles de $\operatorname{ind}A$ se dice *convexo* si, para todo M, $N \in \Sigma$ y todo camino

$$M = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_t} M_t = N,$$

todos los M_i pertenecen a Σ. Un A - módulo M se dice *convexo* si el conjunto $\operatorname{ind}M$ de los sumandos directos indescomponibles de M es convexo.

Lema 2.3. *Un A - módulo inclinante T es convexo si y sólo si*

$$\mathrm{ind}T = \{M \in \mathrm{ind}A : M \in \mathscr{T}(T) \text{ y } \mathrm{Hom}_A(M,T) \neq 0\}.$$

Además, en este caso, $H = \mathrm{End}\, T_A$ es hereditaria.

Demostración. Supongamos que T es convexo. Sea $M \in \mathrm{ind}\mathscr{T}(T)$ tal que $\mathrm{Hom}_A(M,T) \neq 0$. Como $M \in \mathrm{Gen}T$, existe un morfismo no nulo $T' \longrightarrow M$, con $T' \in \mathrm{ind}T$, de donde obtenemos un camino $T' \longrightarrow M \longrightarrow T''$ con T', $T'' \in \mathrm{ind}T$. La convexidad de T implica que $M \in \mathrm{ind}T$. Luego,

$$\{M \in \mathrm{ind}A : M \in \mathscr{T}(T) \text{ y } \mathrm{Hom}_A(M,T) \neq 0\} \subseteq \mathrm{ind}T.$$

La otra inclusión es trivial.

Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{ind}T = \{M \in \mathrm{ind}A : M \in \mathscr{T}(T) \text{ y } \mathrm{Hom}_A(M,T) \neq 0\}$. Comencemos probando que H =End T_A es hereditaria. Sea Q_H un H - módulo proyectivo e Y un submódulo indescomponible de Q. Debemos probar que Y es proyectivo. Como Q_H es proyectivo, tenemos que $Q \in \mathscr{Y}(T)$ y, por lo tanto, $Y \in \mathscr{Y}(T)$. Por el teorema de inclinación, existen $T' \in \mathrm{add}T$ y $M \in \mathscr{T}(T)$ indescomponible tales que $Q \cong \mathrm{Hom}_A(T,T')$ e $Y \cong \mathrm{Hom}_A(T,M)$. La inclusión $\mathrm{Hom}_A(T,M) \cong Y \hookrightarrow Q \cong \mathrm{Hom}_A(T,T')$ induce, aplicando el funtor $- \otimes_H T$, un morfismo no nulo $M \longrightarrow T'$. Luego, $\mathrm{Hom}_A(M,T) \neq 0$. Como $M \in \mathscr{T}(T)$, nuestra hipótesis nos da que $M \in \mathrm{ind}T$. Por lo tanto, $Y \cong \mathrm{Hom}_A(T,M)$ es proyectivo. Esto establece que H es hereditaria.

Por (2.2), T_A es separante. Consideremos entonces un camino

$$T' = M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_t = T''$$

en $\mathrm{ind}A$, con T', $T'' \in \mathrm{ind}T$. Como $T' \in \mathscr{T}(T_A)$ que es cerrada por sucesores por (2.1), tenemos que $M_i \in \mathscr{T}(T)$ para todo i. Como $\mathrm{Hom}_A(M_{t-1},T'') \neq 0$ y $M_{t-1} \in \mathscr{T}(T)$, nuestra hipótesis nos da que $M_{t-1} \in \mathrm{ind}T$. Por recurrencia podemos obtener que $M_i \in \mathrm{ind}T$ para todo i. Luego, T es convexo. □

Lema 2.4. *Sea T_A un módulo inclinante. Cada una de las condiciones abajo indicadas implica la siguiente:*

(a) *Para todo $M \in \mathscr{T}(T)$, existe una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con T_0, $T_1 \in \mathrm{add}T$.

(b) $\mathrm{Ext}_A^2(M,N) = 0$ *para todo M, $N \in \mathscr{T}(T)$.*

(c) $\mathrm{di}M \leq 1$ *para todo* $M \in \mathscr{T}(T)$.

(d) $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}M,T\right) = 0$ *para todo $M \in \mathscr{T}(T)$.*

Demostración. (a) implica (b) Sean M, $N \in \mathscr{T}(T)$. Aplicando $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ a una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con T_0, $T_1 \in \mathrm{add}T$, obtenemos la sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}_A^1(T_1,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^2(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^2(T_0,N) = 0$$

y, por lo tanto, $\mathrm{Ext}_A^2(M,N)=0$.

(b) implica (c) Sea $0\longrightarrow M\xrightarrow{f^0} I^0\xrightarrow{f^1} I^1$ una copresentación inyectiva minimal de M. Entonces $N^0=$Coker f^0 y $N^1=$Coker f^1 están en $\mathscr{T}(T)$. La sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow M\longrightarrow I^0\longrightarrow N^0\longrightarrow 0$$

induce una sucesión exacta

$$0=\mathrm{Ext}_A^1\left(N^1,I^0\right)\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1\left(N^1,N^0\right)\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^2\left(N^1,M\right)=0$$

(el último término se anula por hipótesis). Por lo tanto, $\mathrm{Ext}_A^1\left(N^1,N^0\right)=0$. En particular, la sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow N^0\longrightarrow I^1\longrightarrow N^1\longrightarrow 0$$

se parte. Luego, N^0 es inyectivo.

(c) implica (d) Sea $M\in\mathscr{T}(T)$. La hipótesis di$M\leq 1$ implica que $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}M,T\right)\cong D\mathrm{Ext}_A^1(T,M)=0$, por (I.2.7). □

En virtud del teorema de inclinación (II.4.6), la condición (a) del lema precedente equivale a dp$\mathscr{Y}(T)\leq 1$. Por lo tanto, aplicando (II.5.1) obtenemos que dim.gl.$A\leq 2$.

Observación 2.5. Es razonable preguntarse en qué casos se verifica la condición (a). Esto ocurre, por ejemplo, cuando A es un álgebra hereditaria. En efecto, supongamos que A lo sea. Sea $M\in\mathscr{T}(T)$. Por (II.3.5) sabemos que existe una sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow L\longrightarrow T_0\xrightarrow{f} M\longrightarrow 0$$

con $L\in\mathscr{T}(T)$, de la cual se obtiene una sucesión exacta de funtores

$$\mathrm{Ext}_A^1(T_0,-)\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(L,-)\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^2(M,-)=0.$$

Como para todo $N\in\mathscr{T}(T)$ se tiene que $\mathrm{Ext}_A^1(T_0,N)=0$, entonces $\mathrm{Ext}_A^1(L,N)=0$, es decir, L es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}(T)$. Por (II.3.5), $L\in$ add$T$, obteniéndose entonces la sucesión buscada.

Deduciremos varias caracterizaciones de los módulos inclinantes convexos.

Proposición 2.6. *Sea T_A un módulo inclinante. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) End T_A *es hereditaria.*

(b) T_A es separante y, para todo $M\in\mathscr{T}(T)$, existe una sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow T_1\longrightarrow T_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

con T_0, $T_1\in$ add$T$.

(c) T_A es separante y $\mathrm{Ext}_A^2(M,N)=0$, para todo $M,N\in\mathscr{T}(T)$.

(d) T_A es separante y di$M\leq 1$, para todo $M\in\mathscr{T}(T)$.

(e) T_A es separante y $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}M,T\right)=0$, para todo $M\in\mathscr{T}(T)$.

(f) ind$T=\{M\in$ ind$A : M\in\mathscr{T}(T)$ y $\mathrm{Hom}_A(M,T)\neq 0\}$.

(g) T_A es convexo.

Demostración. (a) implica (b) Sea $M \in \mathscr{T}(T)$. Por (II.3.5), existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con $T_0 \in \operatorname{add}T$ y $L \in \mathscr{T}(T)$. Sea $H = \operatorname{End} T_A$. La sucesión anterior induce, por (II.3.6), una sucesión exacta corta en mod$H$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,L) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,M) \longrightarrow 0.$$

Como $\operatorname{Hom}_A(T,T_0)$ es H - proyectivo y H es hereditaria, $\operatorname{Hom}_A(T,L)$ también es H - proyectivo. Dado que $L \in \mathscr{T}(T)$, sabemos por (II.1.2) que $L \in \operatorname{add}T$. Finalmente T_A es separante, por (2.2).

(b) implica (c), (c) implica (d) y (d) implica (e) siguen de (2.4).

(e) implica (f) Sea $M \in \mathscr{T}(T)$ indescomponible tal que $\operatorname{Hom}_A(M,T) \neq 0$. Por (II.3.5), basta probar que M es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}(T)$, esto es, por (II.3.9), que $\tau M \in \mathscr{F}(T)$. Supongamos que $\tau M \notin \mathscr{F}(T)$. Como T es separante, debe ser $\tau M \neq 0$ y $\tau M \in \mathscr{T}(T)$. Pero entonces $\operatorname{Hom}_A(M,T) = \operatorname{Hom}_A\left(\tau^{-1}(\tau M), T\right) = 0$. Contradicción.

Por último, sigue de (2.3) que (f) y (g) son equivalentes y que implican (a). □

Como consecuencia de la proposición anterior, destacamos la siguiente caracterización de las álgebras inclinadas.

Teorema 2.7. *Un álgebra de artin A es inclinada si y sólo si existe un A-módulo inclinante convexo.*

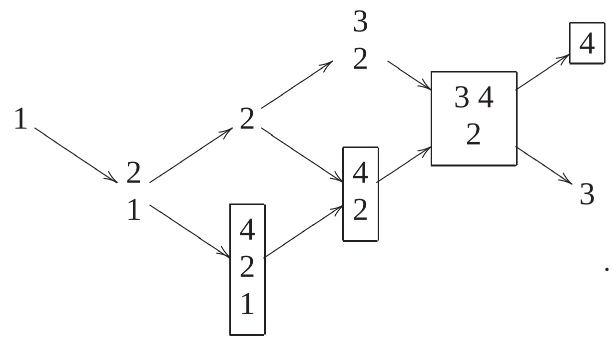
Demostración. Si A es inclinada, existe, por (1.1), un A - módulo inclinante T_A tal que $H = \operatorname{End} T_A$ es hereditaria. Por (2.6), T_A es convexo. Recíprocamente, si T_A es un módulo inclinante convexo, por (2.3), $\operatorname{End} T_A$ es hereditaria. Luego A es inclinada. □

Ejemplo 2.8. Sea, como en el ejemplo (II.4.7) (a), A dada por el carcaj

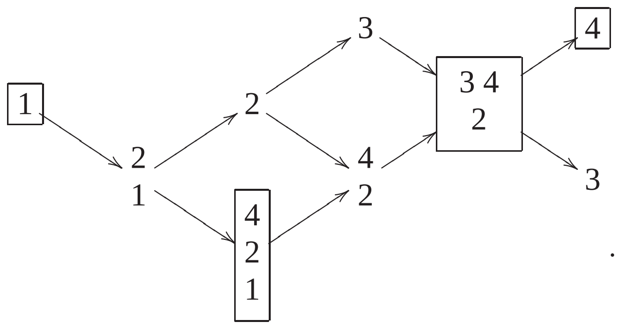
$$\begin{tikzcd} & \circ 4 \arrow[d, "\gamma"] & \\ \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\beta"] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

ligado por la relación $\alpha\beta = 0$.

(i) Sabemos que $U = \oplus_{i=1}^4 U_i$, con $U_1 = \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$, $U_2 = \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}$, $U_3 = \begin{smallmatrix} 3 & & 4 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$ y $U_4 = 4$, es un A - módulo inclinante (ver (II.3.12) (a)) y que su álgebra de endomorfismos $\operatorname{End}U$ es hereditaria (ver (II.4.7) (a)). Además, es fácil ver que U es un módulo convexo. Esto resulta de la ubicación de los sumandos directos indescomponibles de U en el carcaj de Auslander-Reiten de A. En particular, A es inclinada.



(ii) Sabemos también que $V = \oplus_{i=1}^{4} V_i$, con $V_1 = 1$, $V_2 = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$, $V_3 = \begin{smallmatrix}3\,4\\2\end{smallmatrix}$ y $V_4 = 4$ es un A - módulo inclinante (ver (II.3.12) (a)) y que su álgebra de endomorfismos End$V$ no es hereditaria (ver (II.4.7) (a)). Además, V no es un módulo convexo. Por ejemplo, el camino de $V_1 = 1$ a $V_2 = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$ se factoriza por el indescomponible $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ que no es un sumando directo de V.



3. Módulos sinceros.

A fin de enunciar (y probar) nuestra segunda caracterización de las álgebras inclinadas, vamos a necesitar la siguiente definición.

Definición. Un A - módulo M se dice *sincero* si cada A - módulo simple es un factor de composición de M.

La siguiente es una caracterización inmediata de los módulos sinceros.

Lema 3.1. *Sea M un A - módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(a) *M es sincero.*
(b) *Para todo A - módulo proyectivo $P \neq 0$, se tiene que* $\mathrm{Hom}_A(P,M) \neq 0$.
(c) *Para todo A - módulo inyectivo $I \neq 0$, se tiene que* $\mathrm{Hom}_A(M,I) \neq 0$.

Demostración. Es claro, a partir de (I.1.2), que para un A - módulo simple S las siguientes condiciones son equivalentes:
(i) S es un factor de composición de M.

(ii) Si $P(S)$ es la cubierta proyectiva de S, entonces $\mathrm{Hom}_A(P(S), M) \neq 0$.
(iii) Si $I(S)$ es la cápsula inyectiva de S, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, I(S)) \neq 0$. $\square$

Así, todo módulo fiel es sincero. La recíproca no es verdadera. En efecto, si A es el álgebra hereditaria con carcaj

$$\underset{1}{\circ} \xleftarrow[\alpha]{} \underset{2}{\circ}$$

entonces el módulo semisimple $M = 1 \oplus 2$ es sincero, pero no es fiel, ya que $M\alpha = 0$.

Lema 3.2. *Sean M un A - módulo,*

$$\mathscr{T}_M = \mathrm{add}\left\{N \in \mathrm{ind}A : \textit{existe } M' \in \mathrm{ind}M \textit{ y un camino } M' \rightsquigarrow N\right\}$$

y

$$\mathscr{F}_M = \mathrm{add}\left(\mathrm{ind}A \setminus \mathscr{T}_M\right).$$

Entonces $(\mathscr{T}_M, \mathscr{F}_M)$ es un par de torsión que se escinde.

Demostración. Es claro que $\mathscr{T}_M$ es cerrada por sucesores. Por lo tanto, $\mathscr{T}_M$ es cerrada por imágenes epimórficas y por extensiones. Luego, es una clase de torsión. Entonces la conclusión sigue de (2.1). $\square$

Definición. Un *gancho* es un camino de ind$A$ de la forma

$$\tau X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$$

con f y g irreducibles. Sea M un A-módulo. Se dice que *ningún camino entre dos sumandos de M contiene un gancho* si, para todo camino de ind$A$ de la forma

$$L = M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_t} M_t = M$$

con L, $N \in \mathrm{ind}M$, ninguno de los subcaminos

$$M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1}$$

es un gancho.

Lema 3.3. *Sea M un A - módulo sincero tal que ningún camino entre dos sumandos de M contiene un gancho. Entonces el par de torsión $(\mathscr{T}_M, \mathscr{F}_M)$ verifica:*
(a) *Para todo $N \in \mathscr{T}_M$,* $\mathrm{di}N \leq 1$.
(b) *M es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_M$.*
(c) *$DA \in \mathscr{T}_M$.*
(d) *Todo módulo Ext-proyectivo de $\mathscr{T}_M$ es inclinante parcial.*
(e) *El número de clases de isomorfismo de módulos* Ext-*proyectivos indescomponibles de $\mathscr{T}_M$ es menor o igual que el rango de $K_0(A)$.*

Demostración. (a) Sea $N \in \mathscr{T}_M$ indescomponible tal que di$N > 1$. Entonces existe un A - módulo proyectivo indescomponible P tal que $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}N, P\right) \neq 0$. Como M es sincero, existe $M'' \in \mathrm{ind}M$ tal que $\mathrm{Hom}_A(P, M'') \neq 0$. Además, como $N \in \mathscr{T}_M$, existe un camino $M' \rightsquigarrow N$, con $M' \in \mathrm{ind}M$. De aquí se deduce la existencia de un camino con un gancho

$$M' \rightsquigarrow N \longrightarrow * \longrightarrow \tau^{-1}N \longrightarrow P \longrightarrow M''$$

con $M', M'' \in \mathrm{ind}M$. Contradicción.

(b) Sea $N \in \mathscr{T}_M$ un módulo indescomponible tal que $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) \neq 0$. Como $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) \cong D\underline{\mathrm{Hom}}_A\left(\tau^{-1}N, M\right)$, existe un morfismo no nulo $\tau^{-1}N \longrightarrow M''$, con $M'' \in \mathrm{ind}M$. Como $N \in \mathscr{T}_M$, existe también un camino $M' \rightsquigarrow N$, con $M' \in \mathrm{ind}M$. Nuevamente obtenemos un camino con un gancho

$$M' \rightsquigarrow N \longrightarrow * \longrightarrow \tau^{-1}N \rightsquigarrow M''$$

con $M', M'' \in \mathrm{ind}M$. Esta contradicción prueba que $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) = 0$ para todo $N \in \mathscr{T}_M$.

(c) Sea I un A - módulo inyectivo indescomponible. Como M es sincero, $\mathrm{Hom}_A(M, I) \neq 0$. Luego existe un morfismo no nulo $M' \longrightarrow I$, con $M' \in \mathrm{ind}M$. Por lo tanto, $I \in \mathscr{T}_M$, de donde $DA \in \mathscr{T}_M$.

(d) Sea T_0 un Ext-proyectivo de $\mathscr{T}_M$. En particular, $\mathrm{Ext}^1_A(T_0, T_0) = 0$. Por otro lado, $\tau T_0 \in \mathscr{F}_M$ (por (II.2.4)). Como $DA \in \mathscr{T}_M$, a partir de (c) tenemos que $\mathrm{Hom}_A(DA, \tau T_0) = 0$. Luego, $\mathrm{dp}T_0 \leq 1$.

(e) Resulta de (d) y de (II.5.7). □

Resulta de (d) y (e) que la suma directa de un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de A - módulos indescomponibles Ext-proyectivos de $\mathscr{T}_M$ es un módulo inclinante parcial.

Lema 3.4. *Sea M un $A-$módulo sincero tal que ningún camino entre dos módulos de* ind$M$ *contiene un gancho. Sea T la suma directa de un conjunto completo de módulos* Ext-*proyectivos indescomponibles no isomorfos de $\mathscr{T}_M$. Entonces T es un módulo inclinante convexo y $M \in$* add$T$.

Demostración. Sean M y T como en el enunciado. Por la observación de más arriba, T es un módulo inclinante parcial. Por (3.3)(b), $M \in \mathrm{add}T$. Luego basta ver que T es inclinante y convexo. Probaremos esto en cuatro etapas:

(1) Sea $K \longrightarrow T'$ un morfismo irreducible, con K en ind$A$ y T' en ind$T$. Entonces

(a) Si $K \in \mathscr{T}_M$ entonces $K \in \mathrm{ind}T$:

En efecto, basta probar que K es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_M$ y para esto, por (II.2.4), es suficiente mostrar que $\tau K \in \mathscr{F}_M$. Si $\tau K \notin \mathscr{F}_M$, entonces $\tau K \in \mathrm{ind}\mathscr{T}_M$ ya que $(\mathscr{T}_M, \mathscr{F}_M)$ se escinde. Sabemos que existe un camino

$$M' \rightsquigarrow \tau K \longrightarrow * \longrightarrow K \longrightarrow T'$$

con $M' \in \mathrm{ind}M$. Si T' es proyectivo, entonces, al ser M sincero, tenemos $\mathrm{Hom}_A(T', M) \neq 0$. Luego, existe un camino con un gancho

$$M' \rightsquigarrow \tau K \longrightarrow * \longrightarrow K \longrightarrow T' \longrightarrow M''$$

con M', M'' en ind$M$. Contradicción. Por lo tanto, T' no es proyectivo. Pero entonces, el morfismo irreducible $K \longrightarrow T'$ induce un morfismo irreducible $\tau K \longrightarrow \tau T'$. Esto es absurdo, porque $\tau K \in \mathscr{T}_M$ y $\tau T' \in \mathscr{F}_M$. Luego, $\tau K \in \mathscr{F}_M$, lo que prueba (a).

(b) Si $K \in \mathscr{F}_M$ entonces $K \in \mathrm{add}(\tau T)$:

Por nuestra hipótesis K no es inyectivo, y hay un morfismo irreducible $T' \longrightarrow \tau^{-1}K$. Luego, $\tau^{-1}K \in \mathscr{T}_M$. Como $\tau\left(\tau^{-1}K\right) = K \in \mathscr{F}_M$, resulta que $\tau^{-1}K$ es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_M$, o sea , está en add$T$. Esto es, $K \in \mathrm{add}(\tau T)$.

(2) T es un módulo inclinante:

Como ya dijimos, T es un módulo inclinante parcial. Entonces sólo nos resta probar (T_3). Sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} T^d \longrightarrow 0$$

una sucesión de Bongartz para T (ver (II.3.3)). Queremos probar que $E \in \mathrm{add}T$. Como $(\mathscr{T}_M, \mathscr{F}_M)$ se escinde, podemos escribir $E = X \oplus Y$, con $X \in \mathscr{T}_M$ e $Y \in \mathscr{F}_M$.

A continuación probaremos que $Y = 0$. Supongamos que $Y \neq 0$. Si Y es proyectivo, la sinceridad de M implica que $\mathrm{Hom}_A(Y,M) \neq 0$, de donde $\mathrm{Hom}_A(Y,T) \neq 0$ pues $M \in \mathrm{add}T$ (por (3.3) (b)). Si Y no es proyectivo entonces la restricción a Y del morfismo g de la sucesión precedente es no nula. En cualquier caso resulta que $\mathrm{Hom}_A(Y,T) \neq 0$. Por otro lado, $T \oplus E$ es inclinante, luego

$$\mathrm{Hom}_A(Y, \tau T) \cong D\mathrm{Ext}^1_A(T,Y) = 0.$$

Sea $v_1 : Y \longrightarrow T_1$ un morfismo no nulo, con $T_1 \in \mathrm{ind}T$. Vamos a construir en forma recursiva, para todo $i \geq 2$, morfismos $v_i : Y \longrightarrow T_i$ y morfismos irreducibles $u_{i-1} : T_i \longrightarrow T_{i-1}$ con los $T_i \in \mathrm{ind}T$, tales que $u_1u_2...u_{i-1}v_i \neq 0$. Supongamos que $v_i, u_1, ..., u_{i-1}$ han sido construidos. Para construir v_{i+1}, u_i consideramos el morfismo minimal que casi se parte a derecha que termina en T_i, al que escribimos en la forma $[f_i, g_i] : K_i \oplus L_i \longrightarrow T_i$, con $K_i \in \mathscr{T}_M$ y $L_i \in \mathscr{F}_M$. Como $Y \in \mathscr{F}_M$ y $T_i \in \mathscr{T}_M$, el morfismo $v_i : Y \longrightarrow T_i$ no es una retracción, por lo que se factoriza a través del morfismo $[f_i, g_i] : K_i \oplus L_i \longrightarrow T_i$. Por (1) sabemos que $K_i \in \mathrm{add}T$ y $L_i \in \mathrm{add}(\tau T)$, de donde $\mathrm{Hom}_A(Y, L_i) = 0$, por lo observado arriba. Como $\mathrm{Hom}_A(Y, L_i) = 0$, v_i se factoriza por $f_i : K_i \longrightarrow T_i$. Como $u_1u_2...u_{i-1}v_i \neq 0$, hay un sumando directo T_{i+1} de K_i y morfismos $u_i : T_{i+1} \longrightarrow T_i$, $v_{i+1} : Y \longrightarrow T_{i+1}$ tales que $u_1u_2...u_{i-1}u_iv_{i+1} \neq 0$. Esto termina la construcción.

Como, para todo i, tenemos que $u_1u_2...u_{i-1} \neq 0$, obtenemos una contradicción, ya que todos estos morfismos se encuentran en $\mathrm{rad}(\mathrm{End}\,T)$, que es un ideal nilpotente. Así concluimos que $Y = 0$.

Hemos probado que la sucesión de Bongartz es de la forma

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow T^d \longrightarrow 0$$

con $X \in \mathscr{T}_M$. Sea $N \in \mathscr{T}_M$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(-,N)$, obtenemos una sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^1_A(T^d, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(X,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(A,N) = 0$$

Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1_A(X,N) = 0$ y X es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_M$. Luego, $X \in \mathrm{add}T$ y esto prueba que T es inclinante.

(3) $\mathscr{T}_M = \mathscr{T}(T)$ y $\mathscr{F}_M = \mathscr{F}(T)$:

Sea $N \in \mathscr{T}_M$. Como T es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}_M$, $\mathrm{Ext}^1_A(T,N) = 0$. Por lo tanto, $N \in \mathscr{T}(T)$. Recíprocamente, sea N indescomponible en $\mathscr{T}(T)$. Entonces $\mathrm{Hom}_A(T,N) \neq 0$, de donde $N \in \mathscr{T}_M$. Así probamos que $\mathscr{T}_M = \mathscr{T}(T)$. En consecuencia, $\mathscr{F}_M = \mathscr{F}(T)$.

(4) Por último, T es un módulo inclinante convexo:

En efecto, de (2) y (3) sigue que T es un módulo inclinante separante. Por otro lado, de (3.3) (a), tenemos que di$N \leq 1$ para todo $N \in \mathscr{T}(T)$. En virtud de (2.6), T es convexo. □

A continuación presentamos el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.5. *Un álgebra A es inclinada si y sólo si existe un A - módulo sincero M tal que ningún camino entre dos sumandos de M contiene un gancho*.

Demostración. La suficiencia de la condición sigue de (3.4) y de (2.7).

Recíprocamente, supongamos que A es inclinada. Por (2.7), existe un A-módulo inclinante convexo T. Como T es inclinante, es fiel y, por lo tanto, sincero. Supongamos que existe un camino que contiene un gancho

$$T' \rightsquigarrow \tau L \longrightarrow * \longrightarrow L \rightsquigarrow T''$$

con T', T'' en ind$T$. La convexidad de T implica que L, $\tau L \in \mathrm{ind}T$. Pero $\mathrm{Ext}^1_A(L, \tau L) \neq 0$, lo que contradice que $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$. Luego $M = T$ satisface lo deseado. □

El corolario que sigue es una consecuencia interesante del teorema anterior. Un A - módulo indescomponible se dice *dirigido* si no existe ningún ciclo

$$M = M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_t = M$$

en ind$A$.

Corolario 3.6. *Sea A un álgebra que admite un módulo indescomponible sincero y dirigido. Entonces A es inclinada.*

Demostración. Sea $M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_t} M_t$ un camino en ind$A$, con $M_0, M_t \in \mathrm{ind}M$. Como M es indescomponible, entonces $M_0 = M_t \cong M$. Como M es dirigido, f_i es un isomorfismo, para todo i. Luego el camino no contiene ganchos. Ahora el enunciado sigue de (3.5). □

La recíproca de este corolario es falsa. En efecto, el álgebra A del ejemplo (2.8) es inclinada, pero no existe un A-módulo indescomponible sincero.

Demostraremos un resultado que muestra la importancia de las álgebras inclinadas: si M es un A - módulo indescomponible dirigido arbitrario, entonces existe un álgebra inclinada B tal que M es un B - módulo. Así, para estudiar la estructura de los módulos indescomponibles dirigidos sobre un álgebra arbitraria, es suficiente estudiar los módulos indescomponibles dirigidos sobre las álgebras inclinadas. A fin de probar esto, necesitamos la siguiente definición.

Sea M un A - módulo indescomponible. El *proyectivo* P_M *que soporta a* M es por definición la suma directa $P_M = \oplus P_x$ de un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de A - módulos proyectivos indescomponibles P_x tales que $\mathrm{Hom}_A(P_x, M) \neq 0$. El *soporte de* M es el álgebra $\mathrm{Supp}M = \mathrm{End}\,P_M$. Así, M es un módulo indescomponible sincero si y sólo si $\mathrm{Supp}M \cong A$.

Corolario 3.7. *Sea A un álgebra de artin y M un módulo indescomponible dirigido. Entonces $B = \mathrm{Supp}M$ es un álgebra inclinada.*

Demostración. En virtud de la definición de soporte, M es un B - módulo indescomponible y sincero. Por otra parte, un ciclo en $\mathrm{ind}B$ induce un ciclo en $\mathrm{ind}A$. El enunciado resulta entonces de (3.6). $\square$

En el caso considerado, el soporte es además convexo. Decimos, en efecto, que $\mathrm{Supp}M$ es *convexo en* A si, para toda sucesión

$$P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_t$$

de morfismos no nulos entre indescomponibles proyectivos, con $P_0, P_t \in \mathrm{add}P_M$, tenemos que $P_i \in \mathrm{add}P_M$ para todo i. La demostración siguiente está inspirada en la hecha por Bongartz para álgebras sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

Para demostrar este resultado utilizaremos el siguiente lema.

Lema 3.8. (a) *Sea $P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} X$ un camino en* $\mathrm{ind}A$, *con P, Q proyectivos* y $gf = 0$. *Entonces existe un camino en $\mathrm{ind}A$ de la forma $P/\mathrm{rad}P \longrightarrow U \longrightarrow X$.*

(b) *Dualmente, sea $X \xrightarrow{f} I \xrightarrow{g} J$ un camino en* $\mathrm{ind}A$, *con I, J inyectivos y $gf = 0$. Entonces existe un camino en* $\mathrm{ind}A$ *de la forma $X \longrightarrow V \longrightarrow$* $\mathrm{soc}J$.

Demostración. Demostraremos la parte (a). La parte (b) se deduce por dualidad.

Sean $S = P/\mathrm{rad}P$ y $U = Q/f(\mathrm{rad}P)$. En el diagrama de abajo, $\mathrm{Ker}(qf) = f^{-1}f(\mathrm{rad}P) = \mathrm{rad}P + \mathrm{Ker}f = \mathrm{rad}P = \mathrm{Ker}p$. Luego el morfismo f induce un monomorfismo $\overline{f} : S \longrightarrow U$. Además el módulo U es indescomponible, por ser imagen epimórfica no nula del proyectivo indescomponible Q. Por último, $\mathrm{Ker}q = f(\mathrm{rad}P) \subseteq \mathrm{Ker}g$, de donde el morfismo g se factoriza a través del epimorfismo canónico q, como se indica en el diagrama. Esto completa la demostración.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Q \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, equal] \\ S \arrow[r, dashed, "\overline{f}"'] & U \arrow[r, dashed, "\overline{g}"'] & X \end{tikzcd}$$

$\square$

Proposición 3.9. *Sea M un $A-$módulo indescomponible dirigido. Entonces $B =$* $\mathrm{Supp}M$ *es convexo en A.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{Supp}M$ no es convexo en A. Entonces existe un camino $P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_t$, con $t \geq 2$, $P_0, P_t \in \mathrm{ind}P_M$, y $P_1, \ldots, P_{t-1}$ proyectivos que no están en indP_M. Consideremos un tal camino con longitud t mínima. Sea $S_i = P_i/\mathrm{rad}P_i$, con $1 \leq i \leq t$. Entonces $P_{i-1} \ncong P_i$. Dado que $\mathrm{Hom}_A(P_{i-1}, S_i) = 0$, podemos aplicar (3.8)(a) a cada uno de los caminos $P_{i-1} \longrightarrow P_i \longrightarrow S_i$ para deducir que existe un camino

$$(1) \qquad S_1 \longrightarrow U_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow S_{t-1}.$$

Como, por hipótesis, P_t está en Supp$M$ y P_{t-1} no está en Supp$M$, existe un camino $P_{t-1} \longrightarrow P_t \longrightarrow M$ con composición nula. Aplicando (3.8)(a) a este camino, se obtiene un camino

$$(2) \qquad S_{t-1} \longrightarrow U_t \longrightarrow M.$$

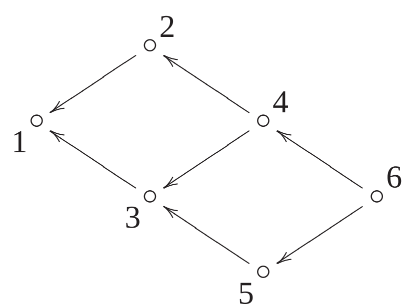
Ahora vamos a usar la equivalencia de Nakayama entre proyectivos e inyectivos para aplicar (3.8) nuevamente. Sea $I_i = \nu(P_i)$. Como $P_0 \in \mathrm{ind}P_M$, $P_1 \notin \mathrm{ind}P_M$, y $\mathrm{Hom}_A(P_i, M) = 0$ si y sólo si $\mathrm{Hom}_A(M, I_i) = 0$, hay un camino de la forma $M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1$ con composición nula. Deducimos, usando (3.8)(b), la existencia de un camino

$$(3) \qquad M \longrightarrow U_1 \longrightarrow S_1.$$

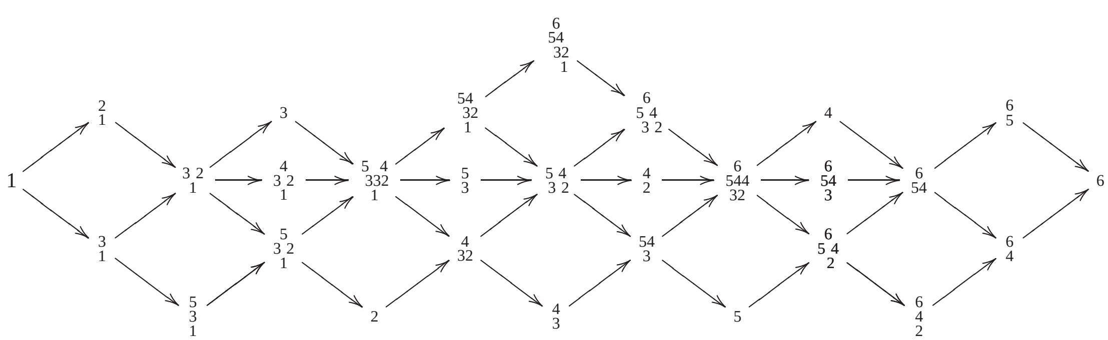
Concatenando los caminos $(1), (2)$ y (3) obtenemos un camino $M \longrightarrow U_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow U_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow S_{t-1} \longrightarrow U_t \longrightarrow M$. Como el módulo M es dirigido, todos los morfismos de este camino deben ser isomorfismos. Luego $M \cong S_1$. Pero esto es un absurdo, ya que por hipótesis, $\mathrm{Hom}_A(P_1, M) = 0$. $\square$

Ejemplo 3.10

(a) Sea A dada por el carcaj



ligado por todas las relaciones de conmutatividad posibles. El cálculo de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ muestra que éste es acíclico



El módulo indescomponible proyectivo $\begin{smallmatrix} & 6 & \\ 5 & & 4 \\ & 3\;2 & \\ & 1 & \end{smallmatrix}$ es sincero y dirigido. Por lo tanto, A es inclinada.

(b) Para que un álgebra sea inclinada no es suficiente que haya un módulo indescomponible sincero. En efecto, sea A dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} & \overset{2}{\circ} \arrow[dl, "\beta"'] & \\ 1\circ & & \circ 3 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[ll, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

ligado por la relación $\alpha\beta = 0$. Entonces $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ es

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}3\,2\\2\,1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & 3 \\ \vdots & \begin{smallmatrix}3\\2\,1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}3\,2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & \vdots \\ 2 \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & 2 \\ \vdots & & & & \vdots \end{tikzcd}$$

donde identificamos las dos copias del simple 2. Aquí tenemos varios módulos indescomponibles sinceros, pero todos están sobre ciclos. Sin embargo, A no es inclinada, pues $\mathrm{dp}\, \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} = 2 = \mathrm{di}\, \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$, y (1.4) (b) afirma que los módulos indescomponibles de dimensión proyectiva 2 sobre un álgebra inclinada tienen dimensión inyectiva menor o igual que uno.

En cambio, es fácil ver que el soporte del módulo indescomponible dirigido $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ es el álgebra dada por el carcaj

$$\overset{1}{\circ} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\circ}$$

mientras que el del módulo indescomponible dirigido $\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ es el álgebra cuyo carcaj es

$$\overset{2}{\circ} \xleftarrow{\alpha} \overset{3}{\circ}$$

y estas dos álgebras son inclinadas, ya que son hereditarias.

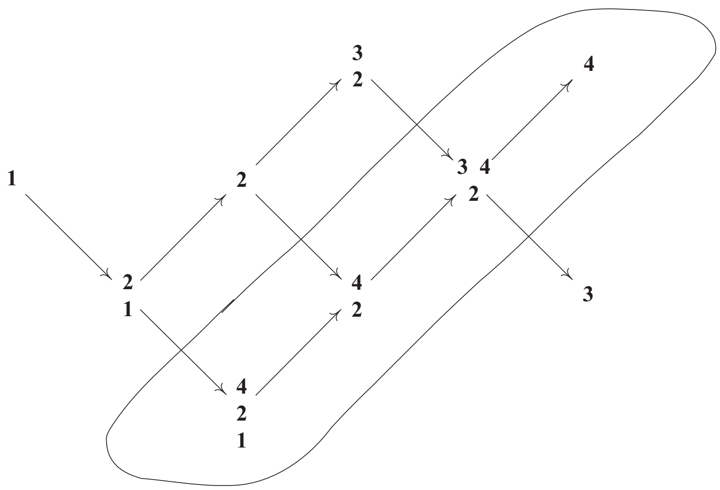
4. Rodajas y rodajas completas.

Si queremos verificar si un álgebra dada es inclinada debemos, de un modo u otro, reconocer el álgebra hereditaria de la cual ella es originaria. Ejemplos simples muestran que esta información está codificada en el carcaj de Auslander-Reiten. Para explicar la idea, retomamos un ejemplo visto anteriormente.

Ejemplo 4.1. Sea A dada por el carcaj

$$\begin{tikzcd} & \overset{}{\circ}\, 4 \arrow[d, "\gamma"] & \\ \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\beta"'] & \underset{3}{\circ} \arrow[l, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

ligado por la relación $\alpha\beta = 0$. Entonces el carcaj de Auslander-Reiten de A está dado por



.

Ya vimos (en (2.8)) que el módulo $U = \oplus_{i=1}^{4} U_i$, con $U_1 = \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}$, $U_2 = \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}$, $U_3 = \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}$ y $U_4 = 4$ es inclinante convexo, y que el álgebra $H = \operatorname{End} U_A$ es el álgebra hereditaria de carcaj

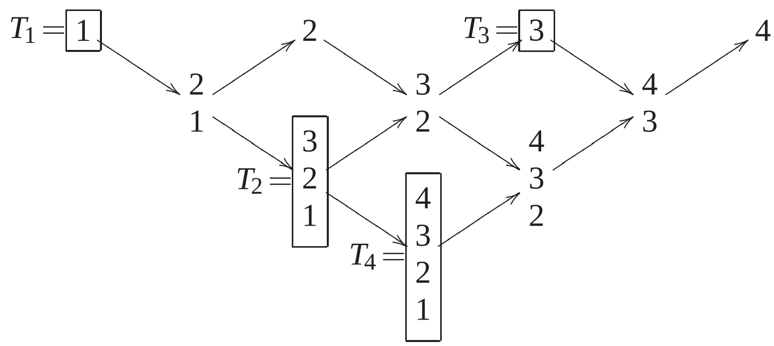
$$\underset{1}{\circ} \longleftarrow \underset{2}{\circ} \longleftarrow \underset{3}{\circ} \longleftarrow \underset{4}{\circ}\ .$$

Sabemos que U es un H^{op} - módulo inclinante y el carcaj de H^{op} reproduce exactamente el subcarcaj pleno

$$\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix} \longrightarrow 4$$

de $\Gamma(\mathrm{mod} A)$. En otros términos, mirar $\Gamma(\mathrm{mod} A)$ permite “recuperar” el álgebra hereditaria H tal que A es el anillo de endomorfismos de un H-módulo inclinante. En efecto, por (II.4.2) sabemos que $A \cong (\operatorname{End}{}_H U)^{op} \cong \operatorname{End} DU_H$.

Notamos que, mirando el carcaj de Auslander-Reiten de H, podemos también hallar un módulo inclinante T tal que $A \cong \operatorname{End} T_H$. Para ello buscamos H-módulos tales que el subgrafo del carcaj de Auslander-Reiten determinado por ellos “reproduzca” el carcaj de A^{op}:



Tenemos un H - módulo inclinante $T = \oplus_{i=1}^{4} T_i$ (con $T_1 = 1$, $T_2 = \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$, $T_3 = 3$ y $T_4 = \begin{smallmatrix}4\\3\\2\\1\end{smallmatrix}$) tal que $A \cong \operatorname{End} T_H$.

A partir de este ejemplo, llegamos a dos conjuntos diferentes de axiomas, que son el objeto de esta sección y de la sección siguiente.

Definición. Un conjunto finito $\mathscr{S} \subseteq \operatorname{ind} A$ es una *rodaja* en $\operatorname{mod} A$ si satisface los axiomas siguientes:

(S$_1$) $\oplus_{U \in \mathscr{S}} U$ es un A - módulo sincero.

(S$_2$) $\mathscr{S}$ es un conjunto convexo en $\operatorname{ind} A$.

(S$_3$) Si $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ es una sucesión que casi se parte entonces a lo sumo uno de los módulos L y N está en $\mathscr{S}$.

El conjunto $\mathscr{S}$ se llama *rodaja completa* si, además de los axiomas anteriores, satisface la condición:

(S$'_3$) Si $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ es una sucesión que casi se parte y un sumando indescomponible de M está en $\mathscr{S}$ entonces $L \in \mathscr{S}$ ó $N \in \mathscr{S}$.

Es fácil ver que en el ejemplo precedente, el conjunto $\left\{ \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix}, 4 \right\}$ es una rodaja completa. Por otra parte, $\left\{ \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix} \right\}$ es una rodaja, pero no es completa, como lo muestra la sucesión que casi se parte

$$0 \longrightarrow \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix}3&&4\\&2&\end{smallmatrix} \longrightarrow 4 \longrightarrow 0 \ .$$

Lema 4.2. *Sea T un A - módulo inclinante convexo. Entonces* $\operatorname{ind} T$ *es una rodaja completa en* $\operatorname{mod} A$*.*

Demostración. Verifiquemos los axiomas de la definición de rodaja completa.

(S$_1$) T es sincero por ser inclinante.

(S$_2$) Decir que T es convexo es decir que $\operatorname{ind} T$ lo es.

(S$_3$) Sea $0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$ una sucesión que casi se parte en $\operatorname{mod} A$. Supongamos que τX y X están en $\operatorname{ind} T$. Entonces $\operatorname{Ext}^1_A(X, \tau X) \neq 0$ contradice que $\operatorname{Ext}^1_A(T, T) = 0$.

(S_3') Sea $0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow E \oplus T_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ una sucesión que casi se parte con $T_0 \in \operatorname{ind} T$. En virtud de (2.6), T es separante. Como $T_0 \in \operatorname{add} T$ y $\operatorname{Hom}_A(T_0, X) \neq 0$, tenemos que $X \in \mathscr{T}(T)$. Supongamos que $X \notin \operatorname{ind} T$. Como T es inclinante, $\tau X \notin \mathscr{F}(T)$, por (II.3.9). Por lo tanto, $\tau X \in \mathscr{T}(T)$. Finalmente, de $\operatorname{Hom}_A(\tau X, T_0) \neq 0$ y (2.3), resulta que $\tau X \in \operatorname{ind} T$. □

Necesitaremos también el lema siguiente.

Lema 4.3. *Sea M un A - módulo convexo. Entonces:*
(a) $\operatorname{rad}_A^\infty(M, M) = 0$.
(b) *Si, además,* $\operatorname{End} M$ *es conexo, el subcarcaj pleno de* $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ *definido por* $\operatorname{ind} M$ *es conexo.*

Demostración. (a) Sea m un número natural tal que $\operatorname{rad}^m(\operatorname{End} M) = 0$. Basta ver que $\operatorname{rad}_A^\infty(X, Y) = 0$ siempre que $X, Y \in \operatorname{ind} M$. Consideremos un camino $X = X_m \xrightarrow{f_m} X_{m-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{f_1} X_0 = Y$, con cada $X_i \in \operatorname{ind} A$ y cada $f_i \in \operatorname{rad}_A(X_i, X_{i-1})$. Por la convexidad de M, tenemos que $X_i \in \operatorname{ind} M$ para cada i. Como $\operatorname{rad}^m(\operatorname{End} M) = 0$, resulta que $f_1 \ldots f_m = 0$, lo que prueba que $\operatorname{rad}_A^\infty(X, Y) = 0$.

(b) Sean X, Y dos sumandos indescomponibles de M tales que $\operatorname{Hom}_A(X, Y) \neq 0$. Por (a) y (I.3.4), existe un camino

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \cdots \xrightarrow{f_t} X_t = Y$$

de morfismos irreducibles con cada $X_i \in \operatorname{ind} A$. Por la convexidad de M, tenemos que $X_i \in \operatorname{ind} M$ para cada i, de lo que resulta el enunciado. □

En lo que sigue notaremos $|\mathscr{S}|$ al cardinal del conjunto $\mathscr{S}$.

Nuestro próximo teorema muestra la relación entre las nociones de rodaja completa y de módulo inclinante convexo.

Teorema 4.4. *Sea $\mathscr{S}$ una rodaja en* $\operatorname{mod} A$ *y* $M = \oplus_{U \in \mathscr{S}} U$. *Entonces existe una rodaja completa $\mathscr{S}' \supseteq \mathscr{S}$. Además, las siguientes condiciones son equivalentes:*
(a) *M es un módulo inclinante convexo.*
(b) *$\mathscr{S}$ es una rodaja completa.*
(c) $|\mathscr{S}| = \operatorname{rg} K_0(A)$.

Demostración. Supongamos primero que existe un camino que contiene un gancho $M' \rightsquigarrow \tau X \longrightarrow * \longrightarrow X \rightsquigarrow M''$, con $M', M'' \in \mathscr{S}$. Por (S_2), tenemos que $X, \tau X \in \mathscr{S}$. Pero esto contradice ($S_3$). Luego M satisface las hipótesis del Lema (3.4). Por lo tanto $T = \bigoplus\{X \in \operatorname{ind} A : X$ es Ext-proyectivo de $\mathscr{T}_M\}$ es un módulo inclinante convexo, y existe N tal que $T = M \oplus N$. Luego $|\mathscr{S}| = |\operatorname{ind} M| \leq |\operatorname{ind} T| = \operatorname{rg} K_0(A)$, y la igualdad vale si y sólo si $M = T$. De aquí se desprende inmediatamente la equivalencia de (a) y (c), y también el primer enunciado del teorema, ya que $\mathscr{S} \subseteq \operatorname{ind} T$, que es una rodaja completa por (4.2). El mismo (4.2) muestra que (a) implica (b).

Sólo resta probar que (b) implica (a), y para ello basta ver que $M = T$. Supongamos entonces que $\mathscr{S}$ es una rodaja completa, y sea $T' \in \operatorname{ind} T$. Como $T' \in \mathscr{T}_M$, existe un camino

$$M' = T_0 \xrightarrow{f_1} T_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_t} T_t = T'$$

con $M' \in \mathscr{S} \subseteq \operatorname{ind} T$. Como T es convexo, entonces $T_i \in \operatorname{ind} T$ para todo i. Claramente, basta probar que $T_1 \in \mathscr{S}$. Como T es inclinante y entonces conexo (ver (II.4.3)), por (4.3) podemos suponer que en el camino precedente los morfismos son irreducibles. Vamos a considerar dos casos:

Caso 1: T_1 es proyectivo. Como M es sincero, existe $M'' \in \mathscr{S}$ tal que $\operatorname{Hom}_A(T_1, M'') \neq 0$. A partir del camino $M' \to T_1 \to M''$ y de la convexidad de $\mathscr{S}$, obtenemos $T_1 \in \mathscr{S}$.

Caso 2: T_1 no es proyectivo. Entonces existe una sucesión que casi se parte $0 \to \tau T_1 \to M' \oplus E \to T_1 \to 0$. Como $\tau T_1 \notin \operatorname{ind} T$, entonces $\tau T_1 \notin \mathscr{S}$ y, por (S_3'), tenemos que $T_1 \in \mathscr{S}$, como queríamos. □

Corolario 4.5. *Sea $\mathscr{S}$ una rodaja en mod$A$, y sea $M = \bigoplus_{U \in S} U$. Entonces $|\mathscr{S}| \leq \operatorname{rg} K_0(A)$, existe una componente de $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ que contiene a $\mathscr{S}$, M es un módulo inclinante parcial y* $\operatorname{rad}_A^\infty(M,M) = 0$.

Demostración. Se deduce inmediatamente de (4.3) y (4.4). □

El corolario siguiente justifica el nombre de rodaja completa.

Corolario 4.6. *Si $\mathscr{S}'$ es una rodaja en* mod$A$ *que contiene una rodaja completa $\mathscr{S}$, entonces $\mathscr{S}' = \mathscr{S}$.*

Demostración. A partir de (4.4), tenemos que $|\mathscr{S}| = \operatorname{rg} K_0(A)$ y $|\mathscr{S}'| \leq \operatorname{rg} K_0(A)$. Entonces el corolario sigue de las desigualdades

$$\operatorname{rg} K_0(A) = |\mathscr{S}| \leq \left|\mathscr{S}'\right| \leq \operatorname{rg} K_0(A).$$

□

Deducimos también la recíproca de (4.2).

Corolario 4.7. *Un A - módulo T es inclinante convexo si y solamente si* ind$T$ *es una rodaja completa en* mod$A$. *En particular, una rodaja completa induce un subcarcaj conexo de* $\Gamma(\operatorname{mod} A)$.

Demostración. Este corolario resulta de (4.2), (4.3) y (4.4). □

La consecuencia más interesante es una nueva caracterización de las álgebras inclinadas.

Teorema 4.8. *Sea A un álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *A es un álgebra inclinada.*

(b) *Existe una rodaja completa en* mod$A$.

(c) *Existe una rodaja en* mod$A$.

Demostración. (a) implica (b) Si A es inclinada, existe un módulo inclinante convexo T. Pero entonces, por (4.2), $\operatorname{ind}T$ es una rodaja completa en $\operatorname{mod}A$.

(b) implica (c) Esta implicación es trivial.

(c) implica (a) De (4.4) resulta que existe un A-módulo inclinante convexo. □

Finalmente, el resultado siguiente muestra cómo construir (todas) las rodajas completas.

Teorema 4.9. (a) *Sea H un álgebra hereditaria, T_H un módulo inclinante y $A = \operatorname{End}T_H$. Entonces* $\operatorname{ind}(\operatorname{Hom}_H(T,DH))$ *es una rodaja completa en* $\operatorname{mod}A$.

(b) *Recíprocamente, sea A un álgebra y $\mathscr{S}$ una rodaja completa en* $\operatorname{mod}A$. *Entonces $M = \oplus_{U\in\mathscr{S}}U$ es un módulo inclinante convexo, $H = \operatorname{End}M$ es hereditaria, $T_H = D({}_HM)$ es inclinante y $\mathscr{S} = \operatorname{ind}(\operatorname{Hom}_H(T,DH))$.*

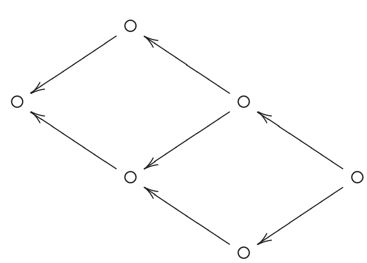
Demostración. (a) Sea $M_A = D({}_AT)$. Como T_H es co-inclinante, ${}_AT$ también lo es. Luego, M_A es inclinante. Como $H \cong \operatorname{End}M_A$ es hereditaria, el módulo M_A es inclinante convexo, por (2.6). Por lo tanto, en virtud de (4.2), $\operatorname{ind}M$ es una rodaja completa en $\operatorname{mod}A$. Por otro lado $M_A = D({}_AT) \cong D({}_AT\otimes_H H) \cong \operatorname{Hom}_H(T,DH)$. Así queda demostrado (a).

(b) Resta probar que, recíprocamente, toda rodaja completa en $\operatorname{mod}A$ es de la forma vista en (a). Sea $\mathscr{S}$ una tal rodaja. Por (4.2), $M = \oplus_{U\in\mathscr{S}}U$ es inclinante convexo. De (2.6), obtenemos que $H = \operatorname{End}M_A$ es hereditaria y ${}_HM$ es inclinante, luego, co-inclinante. Por lo tanto, $T_H = D({}_HM)$ es inclinante. En virtud de (II.4.2), tenemos $A \cong \operatorname{End}T_H$. Pero entonces

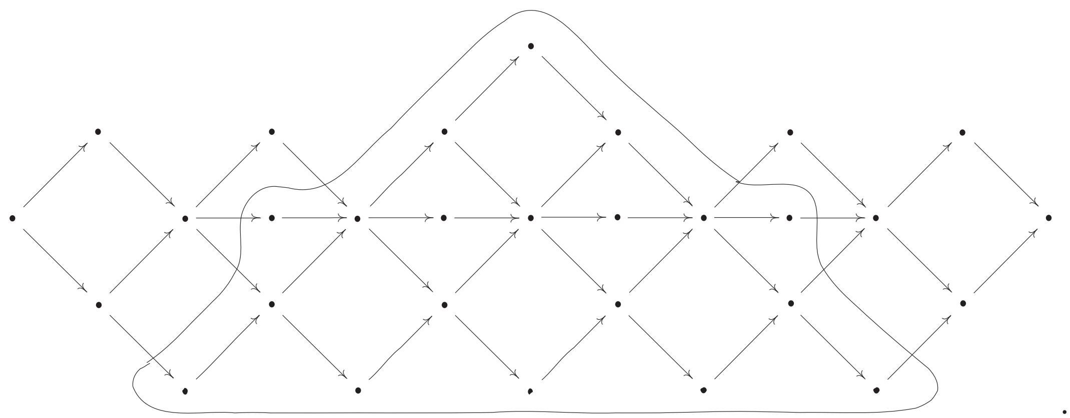
$$\oplus_{U\in\mathscr{S}}U = M_A \cong D({}_AT) \cong \operatorname{Hom}_H(T,DH)$$

Esto prueba que $\mathscr{S}$ es de la forma requerida. □

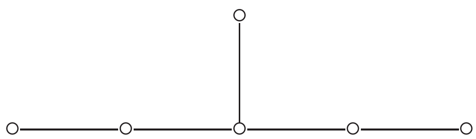
Ejemplo 4.10. En general, la categoría de módulos de un álgebra inclinada contiene varias rodajas completas. Por ejemplo, el álgebra dada por el carcaj



con todas las relaciones de conmutatividad posibles, tiene el carcaj de Auslander-Reiten siguiente (ver el ejemplo (3.8) (a))



La región indicada contiene varias rodajas completas que realizan todas las orientaciones posibles del diagrama de Dynkin $\mathbb{E}_6$.



Por lo tanto, para cada orientación de este grafo, existe un módulo inclinante sobre el álgebra de caminos del carcaj resultante cuya álgebra de endomorfismos es isomorfa a A.

5. Las secciones : el criterio de Liu y Skowroński.

Si bien la existencia de rodajas es un criterio muy satisfactorio cuando queremos saber si un álgebra de representación finita es inclinada o no, este criterio es más difícil de aplicar a álgebras de representación infinita. En efecto, esta verificación presupone un buen conocimiento de la categoría de módulos. Sin embargo, el Corolario (4.5) nos dice que en realidad basta conocer localmente el carcaj de Auslander-Reiten. Por ello, en esta sección estudiaremos subcarcajes especiales de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ con el objeto de obtener un criterio más fácil de aplicar. Este criterio fue obtenido simultánea e independientemente por Liu y Skowroński.

En lo que sigue del capítulo, Γ designa una componente de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$.

Definición. Sea Γ una componente de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$. Una *sección* Σ de Γ es un subcarcaj pleno que satisface los axiomas siguientes:

(σ_1) Σ es acíclico.

(σ_2) Para cada punto x de Γ, existe exactamente un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^n x \in \Sigma_0$.

(σ_3) Σ es convexo en Γ: si $x = x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_t = y$ es un camino en Γ con $x, y \in \Sigma_0$, entonces $x_i \in \Sigma_0$ para todo i.

Notemos que la noción de sección es puramente combinatoria. Observemos que la noción de convexidad en (σ_3) es diferente de la definida en la sección 2: en efecto, se trata aquí de caminos en Γ, es decir de caminos formados por morfismos irreducibles, y no por morfismos arbitrarios. Es claro que si un conjunto $\Sigma \subseteq \Gamma$ es convexo (en el sentido de la sección 2), entonces es convexo en Γ, pero la recíproca es falsa en general.

Por ejemplo, la rodaja completa del ejemplo (4.1) es una sección.

Lema 5.1. *Sea Γ una componente conexa de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ y Σ una sección de Γ. Supongamos que $x \to y$ es una flecha en Γ.*

a) Si $x \in \Sigma_0$, entonces o bien $y \in \Sigma_0$, o bien $\tau y \in \Sigma_0$.

b) Si $y \in \Sigma_0$, entonces o bien $x \in \Sigma_0$, o bien $\tau^{-1}x \in \Sigma_0$.

Demostración. Probemos (a), ya que (b) es dual. Por (σ_2), existe un entero m tal que $\tau^m y \in \Sigma_0$. Si $m \leq 0$, entonces existe un camino $x \longrightarrow y \longrightarrow * \longrightarrow \tau^{-1}y \longrightarrow \ldots \longrightarrow \tau^m y$ en Γ. Como $x, \tau^m y \in \Sigma_0$, entonces por la convexidad (σ_3), tenemos que $y \in \Sigma_0$. Luego, (σ_2) nos da $m = 0$. De la misma manera, si $m > 0$ tenemos que $\tau y \in \Sigma_0$. □

Lema 5.2. *Sean Γ una componente conexa de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ y Σ una sección de Γ tal que $\mathrm{Hom}_A(U, \tau V) = 0$ para todo U, $V \in \Sigma_0$. Entonces*

(a) $|\Sigma_0| \leq \mathrm{rg}\, K_0(A)$.

(b) $\mathrm{rad}_A^\infty(U,V) = 0$ *para todo U, $V \in \Sigma_0$.*

(c) $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}U,V\right) = 0$ *para todo U, $V \in \Sigma_0$.*

Demostración. (a) Esto sigue del lema de Skowroński (II.5.7).

(b) Sean U, $V \in \Sigma_0$ tales que $\mathrm{rad}_A^\infty(U,V) \neq 0$. Por el lema (I.3.5), existe, para cada $i \geq 0$, un camino de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles

$$V_i \longrightarrow V_{i-1} \longrightarrow \ \cdots \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_0 = V$$

tal que $\mathrm{rad}_A^\infty(U,V_i) \neq 0$. Como Σ es finita y acíclica, existe $i_0 \geq 1$ tal que $V_{i_0-1} \in \Sigma_0$ pero $V_{i_0} \notin \Sigma_0$. Por el Lema (5.1), tenemos $\tau^{-1}V_{i_0} \in \Sigma_0$. Pero entonces $\mathrm{Hom}_A\left(U, \tau\left(\tau^{-1}V_{i_0}\right)\right) = \mathrm{Hom}_A(U,V_{i_0}) \neq 0$ contradice la hipótesis.

(c) Sean U_0, $V_0 \in \Sigma_0$ tales que $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}U_0,V_0\right) \neq 0$. Entonces no existe un camino de morfismos irreducibles $\tau^{-1}U_0 \rightsquigarrow V_0$: en efecto, si existiera un tal camino, entonces habría un camino compuesto $U_0 \longrightarrow * \longrightarrow \tau^{-1}U_0 \rightsquigarrow V_0$ en Γ, y la convexidad de Σ en Γ daría $\tau^{-1}U_0 \in \Sigma_0$, una contradicción. Entonces $\mathrm{rad}_A^\infty\left(\tau^{-1}U_0,V_0\right) \neq 0$. Como Σ es finita y acíclica, podemos suponer que U_0 no tiene predecesor directo $W \in \Sigma_0$ tal que $\mathrm{rad}_A^\infty\left(\tau^{-1}W,V_0\right) \neq 0$. Por otra parte, observando que el morfismo minimal que casi se parte a derecha $E \longrightarrow \tau^{-1}U_0$ es sobreyectivo, tenemos que $\mathrm{rad}_A^\infty(W_0,V_0) \neq 0$, para algún sumando indescomponible W_0 de E. Como existe una flecha $U_0 \longrightarrow W_0$ en Γ, resulta del Lema (5.1) que uno de los módulos W_0, τW_0 pertenece a Σ_0. Por nuestra hipótesis sobre U_0, tenemos que $\tau W_0 \notin \Sigma_0$. Entonces $W_0 \in \Sigma_0$ y esto contradice (b). □

El lema siguiente es dual de (5.2).

Lema 5.3. *Sean Γ una componente conexa de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ y Σ una sección de Γ tal que $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}U,V\right) = 0$ para todo U, $V \in \Sigma_0$. Entonces*

(a) $|\Sigma_0| \leq \mathrm{rg}\, K_0(A)$.

(b) $\operatorname{rad}_A^\infty(U,V) = 0$ *para todo* $U, V \in \Sigma_0$.
(c) $\operatorname{Hom}_A(U, \tau V) = 0$ *para todo* $U, V \in \Sigma_0$. $\square$

Una primera consecuencia evidente es el corolario siguiente.

Corolario 5.4. *Sean* Γ *una componente conexa de* $\Gamma(\operatorname{mod} A)$, Σ *una sección de* Γ *y* $T = \bigoplus_{U \in \Sigma_0} U$. *Entonces* $\operatorname{Hom}_A(T, \tau T) = 0$ *si y sólo si* $\operatorname{Hom}_A\left(\tau^{-1}T, T\right) = 0$. $\square$

Un subcarcaj pleno Σ de Γ se dice *fiel* si su anulador $\operatorname{Ann} \Sigma = \bigcap\limits_{M \in \Sigma_0} \operatorname{Ann} M = \{a \in A : Ma = 0 \text{ para todo } M \in \Sigma_0\}$ es el ideal nulo.

Lema 5.5. *Sea* Γ *una componente de* $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ *y* Σ *un subcarcaj finito y acíclico de* Γ.

(a) *Si, para todo* $M \in \Sigma_0$ *y morfismo irreducible* $M \longrightarrow N$, *tenemos que* $N \in \Sigma_0$ *o* $\tau N \in \Sigma_0$, *entonces todo morfismo no nulo* $M \longrightarrow U$, *con* $M \in \Sigma_0$ *y* $U \notin \Sigma_0$ *indescomponible, se factoriza por* $\operatorname{add}\left(\tau^{-1}\Sigma\right)$.

(b) *Si, para todo* $M \in \Sigma_0$ *y morfismo irreducible* $L \longrightarrow M$, *tenemos que* $L \in \Sigma_0$ *o* $\tau^{-1}L \in \Sigma_0$, *entonces todo morfismo no nulo* $U \longrightarrow M$, *con* $M \in \Sigma_0$ *y* $U \notin \Sigma_0$ *indescomponible, se factoriza por* $\operatorname{add}(\tau\Sigma)$.

Demostración. Es suficiente probar (b), ya que (a) es dual. Sea $f : U \longrightarrow M$ como en el enunciado. Vamos a proceder por recurrencia, puesto que Σ es acíclico. Supongamos primero que M es una fuente de Σ, y sea $g : E \longrightarrow M$ el morfismo minimal que casi se parte a derecha. Como M es una fuente de Σ, ningún sumando directo de E pertenece a Σ_0. En virtud de la hipótesis, $E \in \operatorname{add}(\tau\Sigma)$. Como f se factoriza por g, hemos terminado. Supongamos ahora que M no es una fuente y que el enunciado se verifica para todo predecesor propio M' de M sobre Σ. Sea $g : E \longrightarrow M$ el morfismo minimal que casi se parte a derecha. Por hipótesis, $E = E' \oplus E''$, donde $E' \in \operatorname{add}(\tau\Sigma)$, mientras que todos los sumandos directos de E'' pertenecen a Σ_0 y son predecesores de M. Entonces f se factoriza por $g = [g' \; g''] : E' \oplus E'' \longrightarrow M$, o sea, existe $h = \begin{bmatrix} h' \\ h'' \end{bmatrix} : U \longrightarrow E' \oplus E''$ tal que $f = gh = g'h' + g''h''$. Finalmente, por la recurrencia, h'' se factoriza por $\operatorname{add}(\tau\Sigma)$. $\square$

Lema 5.6. *Sean* Γ *una componente conexa de* $\Gamma(\operatorname{mod} A)$ *y* Σ *una sección fiel de* Γ *tal que* $\operatorname{Hom}_A(U, \tau V) = 0$ *para todo* $U, V \in \Sigma_0$. *Entonces* $T = \bigoplus\limits_{U \in \Sigma_0} U$ *es un módulo inclinante convexo.*

Demostración. Por (II.2.7), T es un módulo inclinante parcial. Además, sigue de (II.1.7) que una $\operatorname{add} T$ - aproximación a izquierda $f : A \longrightarrow T^d$ es inyectiva. Entonces tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} T^d \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0.$$

Afirmamos que $T \oplus X$ es inclinante. Como $\operatorname{dp} T \leq 1$ y A es proyectivo, tenemos que $\operatorname{dp} X \leq 1$. Entonces $\operatorname{dp}(T \oplus X) \leq 1$.

Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_A(-, T)$, obtenemos una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T^d,T) \stackrel{\mathrm{Hom}_A(f,T)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_A(A,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(X,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T^d,T) = 0.$$

Por (II.1.7), $\mathrm{Hom}_A(f,T)$ es sobreyectivo. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1_A(X,T) = 0$. Aplicando sucesivamente $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ y $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ a la misma sucesión exacta, se tiene

$$0 = \mathrm{Ext}^1_A(X,T^d) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(X,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(X,A) = 0$$

y

$$0 = \mathrm{Ext}^1_A(T,T^d) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(T,A) = 0$$

dado que $\mathrm{dp}(T \oplus X) \leq 1$. Entonces $\mathrm{Ext}^1_A(X,X) = 0$ y $\mathrm{Ext}^1_A(T,X) = 0$. Por consiguiente, $\mathrm{Ext}^1_A(T \oplus X, T \oplus X) = 0$ y $T \oplus X$ es inclinante.

Para probar que T es un módulo inclinante, es suficiente mostrar que $X \in \mathrm{add}T$. Si esto no ocurre, existe $U \in \mathrm{ind}X$ tal que $U \notin \mathrm{add}T$. Como $\mathrm{Hom}_A(T,U) \neq 0$, existe un sumando indescomponible T_0 de T tal que $\mathrm{Hom}_A(T_0,U) \neq 0$. Como Σ es finita y acíclica, podemos suponer que T_0 no tiene sucesor directo $T_0' \in \Sigma_0$ tal que $\mathrm{Hom}_A\left(T_0',U\right) \neq 0$. Como $U \notin \Sigma_0$, tenemos que $\mathrm{rad}(T_0,U) \neq 0$. Considerando el morfismo minimal que casi se parte a izquierda empezando en T_0, existe una flecha $T_0 \longrightarrow V$ en Γ tal que $\mathrm{Hom}_A(V,U) \neq 0$. Por (5.1), $V \in \Sigma_0$ o $\tau V \in \Sigma_0$. Por nuestra hipótesis sobre T_0, tenemos que $V \notin \Sigma_0$, pero

$$\mathrm{Ext}^1_A(U,\tau V) \cong D\mathrm{Hom}_A\left(\tau\left(\tau^{-1}V\right),U\right) = D\mathrm{Hom}_A(V,U) \neq 0$$

contradice que $\mathrm{Ext}^1_A(X,T) = 0$. Esto prueba que T es inclinante.

Finalmente, para probar que T es convexo, hay que probar que $H = \mathrm{End}\,T_A$ es hereditaria (ver (2.6)). Sean P un H - módulo proyectivo indescomponible, y $f : Y \longrightarrow P$ un monomorfismo con Y indescomponible. Tenemos que probar que Y es proyectivo. Como $Y \neq 0$, existe un morfismo no nulo $f' : Q \longrightarrow Y$, con Q proyectivo indescomponible. Como P y Q son proyectivos, tenemos que P, $Q \in \mathscr{Y}(T)$. Luego $Y \in \mathscr{Y}(T)$, pues Y es submódulo de P. Entonces existen morfismos $g : M \longrightarrow T_0$ y $g' : T_1 \longrightarrow M$, con T_0, $T_1 \in \mathrm{add}T$ y $M \in \mathscr{T}(T)$, tales que $P = \mathrm{Hom}_A(T,T_0)$, $Q = \mathrm{Hom}_A(T,T_1)$, $Y = \mathrm{Hom}_A(T,M)$, $f = \mathrm{Hom}_A(T,g)$ y $f' = \mathrm{Hom}_A(T,g')$. Como f es un monomorfismo, tenemos que $ff' \neq 0$. Entonces $gg' \neq 0$. Si alguno de los morfismos g, g' estuviera en el radical infinito de $\mathrm{mod}A$, entonces $\mathrm{rad}^\infty_A(T_1,T_0) \neq 0$, lo que contradice (5.2)(b). Entonces existen caminos en Γ de T_1 a M y de M a T_0. La convexidad de Σ en Γ implica que $M \in \mathrm{add}T$, de donde Y es proyectivo. □

Ahora estamos preparados para probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 5.7. *Sean Γ una componente conexa de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ y Σ un subcarcaj pleno y convexo de Γ. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) Σ *es una sección fiel tal que* $\mathrm{Hom}_A(U,\tau V) = 0$, *para todo* $U,V \in \Sigma_0$.

(b) Σ *es una sección fiel tal que* $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}U,V\right) = 0$, *para todo* $U,V \in \Sigma_0$.

(c) $T = \bigoplus_{U \in \Sigma_0} U$ *es un módulo inclinante convexo.*

Demostración. Por (5.4), (a) y (b) son equivalentes y, por (5.6), tenemos que (a) implica (c). Entonces basta probar que (c) implica (a).

Supongamos que T es un módulo inclinante convexo. En particular, es fiel. Por lo tanto, Σ es fiel. Además, $\mathrm{Hom}_A(T,\tau T) \cong D\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$. Finalmente, $\Sigma_0 = \mathrm{ind}T$ es convexo en $\mathrm{ind}A$, luego a fortiori convexo en Γ. Por (2.6), $\mathrm{End}\,T$ es hereditaria. Luego $\mathrm{End}\,T$ es triangular y Σ es acíclico. Nos resta probar (σ_2).

Comenzamos por verificar que Σ corta a cada τ - órbita de Γ. Para ello basta ver que, si $M \in \Sigma_0$ y $L \in \Gamma$ pertenecen a dos órbitas vecinas, entonces Σ corta a la órbita de L. Supongamos que existe un morfismo irreducible $\tau^n M \longrightarrow L$ o $L \longrightarrow \tau^n M$, para un cierto $n \in \mathbb{Z}$. Renombrando si es necesario a L, podemos suponer que $|n|$ es mínimo para la familia de morfismos irreducibles que conectan un módulo de la órbita de M con uno de la órbita de L. Consideramos tres casos :

Caso 1. $n < 0$. En este caso no existe morfismo irreducible $L \to \tau^n M$, porque de lo contrario también tendríamos uno $\tau^{n+1}M \to L$, contra la minimalidad de $|n|$. Luego tenemos un morfismo irreducible $\tau^n M \to L$. Análogamente, L debe ser proyectivo, ya que de lo contrario tendríamos un morfismo irreducible $\tau^{n+1}M \to \tau L$, contra la minimalidad de $|n|$. Entonces, por la sinceridad de T, existe un morfismo no nulo $L \to M'$, con $M' \in \Sigma_0$. Luego tenemos un camino en $\mathrm{ind}A$: $M \to \cdots \to \tau^n M \to L \to M'$, de donde $L \in \Sigma_0$, por la convexidad.

Caso 2. $n > 0$. Este caso es dual del anterior.

Caso 3. $n = 0$. Tenemos un morfismo irreducible $M \to L$ ó $L \to M$. En el primer caso, $L \in \mathscr{T}(T)$. Si L es proyectivo, entonces $L \in \Sigma_0$. Suponemos entonces que L no es proyectivo. Si $\tau L \in \mathscr{T}(T)$, de (2.3) obtenemos que $\tau L \in \Sigma_0$ y, si $\tau L \notin \mathscr{T}(T)$, resulta que $\tau L \in \mathscr{F}(T)$, de donde $L \in \Sigma_0$. De modo que en el primer caso, o bien $L \in \Sigma_0$, o bien $\tau L \in \Sigma_0$. En el segundo caso tenemos un morfismo irreducible $L \to M$. Si L es inyectivo, entonces $L \in \mathscr{T}(T)$ y, por (2.3), $L \in \Sigma_0$. Por último, si L no es inyectivo, hay un morfismo $M \to \tau^{-1}L$ y usando el primer caso concluimos que, o bien $\tau^{-1}L \in \Sigma_0$, o bien $L = \tau(\tau^{-1}L) \in \Sigma_0$.

Esto termina la demostración de que Σ corta a cada τ-órbita de Γ. A continuación probaremos que la corta una sola vez: si M y $\tau^m M$ (con $m > 0$) pertenecen ambos a Σ_0, del camino $\tau^m M \to \cdots \to \tau M \to * \to M$ deducimos que $\tau M \in \Sigma_0$, porque T es convexo. Pero $\mathrm{Ext}^1_A(M,\tau M) \neq 0$, lo que contradice la hipótesis que T es inclinante. Así, hemos probado que Σ verifica las condiciones de (a). □

La primera consecuencia de este teorema es el criterio de Liu-Skowroński.

Corolario 5.8. *Sea A un álgebra de artin. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) *A es inclinada.*

(b) $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ *contiene una sección fiel Σ tal que* $\mathrm{Hom}_A(U,\tau V) = 0$ *para todo* $U,V \in \Sigma_0$.

(c) $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ *contiene una sección fiel Σ tal que* $\mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}U,V) = 0$ *para todo* $U,V \in \Sigma_0$.

Demostración. Como A es inclinada, por (2.7) existe un módulo inclinante convexo y por (II.4.3) sabemos que $\mathrm{End}\,T_A$ es conexo. Resulta entonces de (4.3) que el subcarcaj pleno de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ determinado por $\mathrm{ind}T$ es conexo y por lo tanto está contenido en una componente conexa de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$. El resultado es entonces consecuencia de (5.7). □

El resultado siguiente es menos inmediato.

Corolario 5.9. *Un conjunto* $\Sigma_0 \subseteq \mathrm{ind}A$ *es una rodaja completa en* $\mathrm{mod}A$ *si y sólo si el subcarcaj* Σ *determinado por* Σ_0 *es una sección tal que:*
(a) $\mathrm{Hom}_A(U, \tau V) = 0$ *para todo* $U, V \in \Sigma_0$.
(b) $\mathrm{dp}U \leq 1$ *para todo* $U \in \Sigma_0$.
(c) $\mathrm{di}U \leq 1$ *para todo* $U \in \Sigma_0$.

Demostración. Sea Σ_0 una rodaja completa en $\mathrm{mod}A$. Por (II.4.4), $T = \bigoplus_{u\in\Sigma_0} U$ es un módulo inclinante convexo, cuyo anillo de endomorfismos es conexo (ver (II.4.3)). En particular, por (4.3)(b), Σ está contenida en una componente conexa Γ de $\Gamma(\mathrm{mod}A)$. Así, de (5.7) deducimos (a) y (b). Por dualidad, T es también co-inclinante, por lo que obtenemos también (c).

Recíprocamente, sea Σ una sección en Γ que satisface (a), (b) y (c). Por (5.2), Σ es finita, de donde T es un módulo finitamente generado. Como $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) \cong D\mathrm{Hom}_A(T, \tau T) = 0$, tenemos que T es inclinante parcial. Luego, existe E tal que $T \oplus E$ es inclinante. Supongamos que $E \notin \mathrm{add}T$. Como $\mathrm{End}(T \oplus E)$ es conexo (por (II.4.3)), existe un sumando directo E' de E que no está en $\mathrm{add}T$ tal que $\mathrm{Hom}_A(T, E') \neq 0$ ó $\mathrm{Hom}_A(E', T) \neq 0$. Por (5.5) tenemos que $\mathrm{Hom}_A\left(\tau^{-1}T, E'\right) \neq 0$ ó $\mathrm{Hom}_A(E', \tau T) \neq 0$. En el primer caso, $\mathrm{Ext}^1_A(E', T) \neq 0$ (ya que $\mathrm{di}\,T \leq 1$) y, en el segundo caso, $\mathrm{Ext}^1_A(T, E') \neq 0$ (ya que $\mathrm{dp}T \leq 1$). Esto contradice la hipótesis que $T \oplus E$ es inclinante. Por lo tanto, $E \in \mathrm{add}T$ y T es fiel. Entonces, a partir de (5.3), obtenemos que Σ_0 es una rodaja completa. □

Mucho trabajo ha sido dedicado al estudio de las componentes del carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra inclinada. Aunque actualmente se conocen buenas caracterizaciones, este estudio se sitúa fuera del marco de esta monografía. Nos limitaremos a algunas observaciones. Para comenzar, damos una definición.

Sea A un álgebra inclinada. Llamamos *componente de conexión de* $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ a una componente que contiene rodajas completas. A partir de (4.7) tenemos que $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ contiene al menos una componente de conexión.

Proposición 5.10. *Sean* A *un álgebra inclinada,* $n = \mathrm{rg}\, K_0(A)$, Σ *una rodaja completa en* $\mathrm{mod}A$ *y* Γ *la componente de* $\Gamma(\mathrm{mod}A)$ *que contiene a* Σ. *Entonces:*
(a) Γ *es acíclica y tiene exactamente* n τ*-órbitas.*
(b) $\mathrm{rad}^\infty_A(X,Y) = 0$ *para todo* $X, Y \in \Gamma$.
(c) *Si* $T = \bigoplus_{U\in\Sigma} U$ *y* $\Gamma' \neq \Gamma$ *es otra componente de* $\Gamma(\mathrm{mod}A)$*, existen dos casos posibles:*
(i) $\Gamma' \subseteq \mathscr{T}(T)$ *y entonces* Γ' *no contiene proyectivos.*
(ii) $\Gamma' \subseteq \mathscr{F}(T)$ *y entonces* Γ' *no contiene inyectivos.*

Demostración. (a) Supongamos por el absurdo que existe un ciclo de morfismos irreducibles $M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_t = M_0$ en Γ. Como Σ es una sección (ver (5.9)), para cada i existe $n_i \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^{n_i} M_i \in \Sigma$. Podemos suponer que existen i tal que $n_i \geq 0$ y j tal que $n_j \leq 0$. En efecto, si $n_i > 0$ para todo i, consideramos $m = \min_i n_i$ y aplicamos τ^{-m} a todo el ciclo. De la misma manera, si $n_i < 0$ para todo i, escribimos $m' = \max_i n_i$ y aplicamos $\tau^{-m'}$. Esto establece nuestra afirmación.

Por lo tanto, tenemos dos caminos de morfismos irreducibles $\tau^{n_i} M_i \rightsquigarrow M_i$ y $M_j \rightsquigarrow \tau^{n_j} M_j$. Componiendo, obtenemos un camino de morfismos irreducibles

$$\tau^{n_i}M_i \rightsquigarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_j \rightsquigarrow \tau^{n_j}M_j.$$

Como $\tau^{n_i}M_i \in \Sigma$ y $\tau^{n_j}M_j \in \Sigma$, por la convexidad tenemos que todos los M_i están en Σ, y esto contradice que Σ es acíclica, por ser una sección. Esto prueba que Γ es acíclica. Por otro lado, por (4.4), $|\Sigma| = n$, y como la sección Σ corta a cada τ-órbita exactamente una vez, resulta inmediatamente que Σ tiene exactamente n τ-órbitas.

(b) Sean $X, Y \in \Gamma$ tales que $\mathrm{rad}_A^\infty(X,Y) \neq 0$. Por (I.3.5), existe un camino infinito de morfismos irreducibles

$$X = X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_i \to \cdots$$

tales que $\mathrm{rad}_A^\infty(X_i,Y) \neq 0$ para cada i. Veamos que existe $p \geq 0$ tal que X_p es sucesor de Σ en Γ. Como Γ tiene sólo n τ-órbitas, una de ellas contiene a X_i para infinitos valores i_k del índice i. Como Σ corta a cada τ-órbita, existe M en Σ y números enteros t_k tales que $X_{i_k} = \tau^{t_k}M$. Por (a), Γ es acíclica. Luego la sucesión (t_k) es estrictamente decreciente y entonces existe m tal que $t_m < 0$. Pero entonces $p = i_m$ satisface lo deseado. Ahora bien, $\mathrm{rad}_A^\infty(X_p,Y) \neq 0$ implica que existe un camino infinito de morfismos irreducibles

$$\cdots \to Y_j \to \cdots \to Y_1 \to Y_0 = Y$$

tal que $\mathrm{rad}_A^\infty(X_p,Y_j) \neq 0$ para cada j. Ahora se deduce igual que antes que existe $q \geq 0$ tal que Y_q es predecesor de Σ en Γ.

Tenemos así un camino $Z_0 \to Z_1 \to \cdots \to Z_i = X_p \to Y_q = U_0 \to \cdots \to U_s$ en ind$A$, con $Z_0, U_s \in \Sigma$. Por la convexidad de Σ en ind$A$, deducimos que $X_p, Y_q \in \Sigma$, de donde $\mathrm{rad}_A^\infty(X_p,Y_q) = 0$, por (4.3). Esto contradice que $\mathrm{rad}_A^\infty(X_p,Y_j) \neq 0$ para cada j, probando (b).

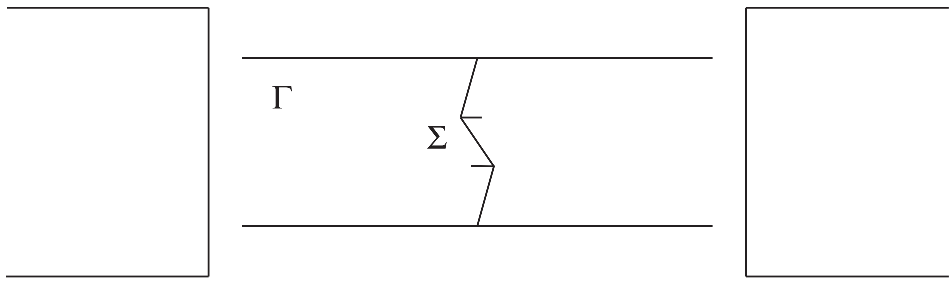
(c) Supongamos que $M \in \Gamma'$. Como T es separante, tenemos dos casos: $M \in \mathscr{T}(T)$ ó $M \in \mathscr{F}(T)$. Supongamos que $M \in \mathscr{T}(T)$. Entonces, probaremos que $\Gamma' \subseteq \mathscr{T}(T)$.

Si $\Gamma' \nsubseteq \mathscr{T}(T)$, existe $N \in \Gamma'$ tal que $N \in \mathscr{F}(T)$. Como la componente Γ' es conexa, podemos suponer que existe un morfismo irreducible $M \longrightarrow N$ ó $N \longrightarrow M$. Como $N \in \mathscr{F}(T)$ y $M \in \mathscr{T}(T)$, tenemos un morfismo irreducible $N \to M$. Por otra parte, $M \in \Gamma'$ no pertenece a $\Sigma \subseteq \Gamma$ y entonces M no es Ext-proyectivo en $\mathscr{T}(T)$. Pero tenemos un morfismo irreducible $\tau M \to N$ y esto es absurdo, porque $N \in \mathscr{F}(T)$. Así, $\Gamma' \in \mathscr{T}(T)$.

La segunda parte de (i) a saber, que Γ' no contiene proyectivos, resulta del hecho que los únicos proyectivos de $\mathscr{T}(T)$ pertenecen a Σ y, por lo tanto, a Γ. Hemos probado que Γ' verifica (i).

Finalmente, si $M \in \mathscr{F}(T)$, se prueba análogamente que Γ' verifica (ii). $\square$

Este enunciado dice que cada componente de conexión Γ "separa" a la categoría de módulos del álgebra inclinada A de la manera siguiente.

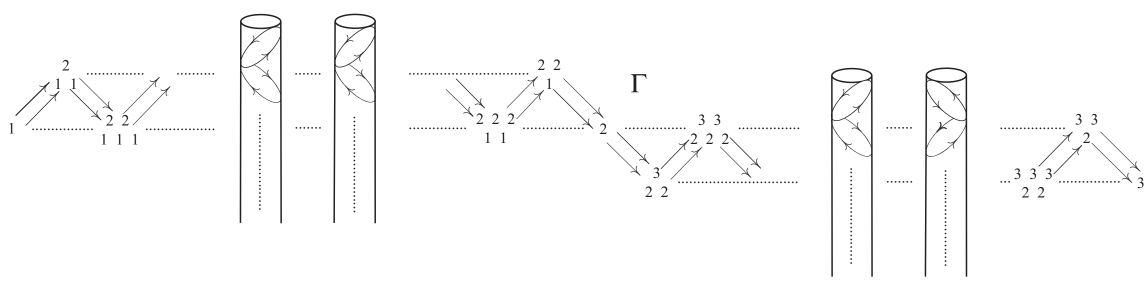


donde los morfismos van de izquierda a derecha, Γ es acíclica, toda componente Γ' contenida en $\mathscr{T}(T)$ está "a la derecha" de Γ, y todos sus módulos son generados por T. De la misma manera toda componente Γ'' contenida en $\mathscr{F}(T)$ está "a la izquierda" de Γ, y todos sus módulos son cogenerados por Γ.

Ejemplo 5.11. (a) Sea A dada por el carcaj

$$\underset{1}{\circ} \leftleftarrows \underset{2}{\circ} \leftleftarrows \underset{3}{\circ}$$

y tal que $\mathrm{rad}^2 A = 0$ (esto quiere decir que la composición de dos flechas cualesquiera es nula). El carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathrm{mod} A)$ está dado por



La componente central Γ, que contiene a 2, es una componente de conexión (y, de hecho, la única componente de conexión), puesto que ella contiene a la rodaja completa $\left\{ \begin{smallmatrix}2\,2\\1\end{smallmatrix}, 2, \begin{smallmatrix}3\\2\,2\end{smallmatrix} \right\}$. Las componentes que preceden a Γ son la componente postproyectiva, que contiene a 1, y una familia de tubos estables: estos son en efecto las componentes postproyectiva y regular del álgebra de Kronecker

$$\underset{1}{\circ} \leftleftarrows \underset{2}{\circ}$$

(ver [AuRS], pág. 302). Dualmente, las componentes que siguen a Γ son tubos estables y una componente preinyectiva que son las componentes preinyectiva y regular del álgebra de Kronecker

$$\underset{2}{\circ} \leftleftarrows \underset{3}{\circ}$$

(en efecto, esto sigue del hecho que A es de radical cuadrado nulo, ver [AuRS], pág. 344).

(b) El ejemplo anterior muestra porqué suponer que una componente contiene una sección no es suficiente para concluir que la componente es de conexión. En efecto, la componente postproyectiva contiene una sección $\left\{1, {}_{1}{}^{2}{}_{1}\right\}$, pero ésta no es fiel, ya que el proyectivo ${}_{2}{}^{3}{}_{2}$ no es cogenerado por ella. Por lo tanto, la componente no es de conexión.

6. Álgebras de endomorfismos de módulos inclinantes parciales.

Vamos a concluir este trabajo con un teorema, de Happel, que dice que si T es un módulo inclinante parcial sobre un álgebra hereditaria, entonces $\operatorname{End} T$ es un álgebra inclinada.

Lema 6.1. *Sea H un álgebra hereditaria y T un H - módulo inclinante parcial. Entonces T es inclinante si y sólo si, para todo H - módulo $M \neq 0$ tal que* $\operatorname{Ext}^1_H(M,M)=0$*, se tiene que* $\operatorname{Hom}_H(M,T)\neq 0$ *ó* $\operatorname{Ext}^1_H(M,T)\neq 0$*.*

Demostración. Sea T un H - módulo inclinante. Por la observación (2.5), existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_0 \longrightarrow DH \longrightarrow 0$$

con $T_0, T_1 \in \operatorname{add}T$, ya que $DH \in \mathscr{T}(T)$. Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_H(M,-)$ a la sucesión anterior obtenemos

$$0 \to \operatorname{Hom}_H(M,T_1) \to \operatorname{Hom}_H(M,T_0) \to \operatorname{Hom}_H(M,DH) \to \operatorname{Ext}^1_H(M,T_1) \to \operatorname{Ext}^1_H(M,T_0) \to 0.$$

Luego, $\operatorname{Hom}_H(M,T)=0$ y $\operatorname{Ext}^1_H(M,T)=0$ implican $\operatorname{Hom}_H(M,DH)=0$ y, por consiguiente, $M=0$. Esto prueba la necesidad.

Para probar la suficiencia, sea T un módulo inclinante parcial que verifica la propiedad enunciada. Para mostrar que T es inclinante, vamos a probar que una $\operatorname{add}T$- aproximación a izquierda $f: H_H \longrightarrow T_0$ (con $T_0 \in \operatorname{add}T$) es inyectiva y, luego, que el conúcleo $C=\operatorname{Coker} f$ pertenece a $\operatorname{add}T$.

Si aplicamos el funtor $\operatorname{Hom}_H(-,T)$ a las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow H \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \longrightarrow 0 \qquad y \qquad 0 \longrightarrow \operatorname{Im} f \longrightarrow T_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

obtenemos, respectivamente, las sucesiones exactas

$$\begin{gathered}0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_H(\operatorname{Im} f,T) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_H(f,T)} \operatorname{Hom}_H(H,T) \longrightarrow \operatorname{Hom}_H(\operatorname{Ker} f,T) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Im} f,T) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_H(H,T)=0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Ker} f,T) \longrightarrow 0\end{gathered}$$

y

$$\begin{gathered}0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_H(C,T) \longrightarrow \operatorname{Hom}_H(T_0,T) \longrightarrow \operatorname{Hom}_H(\operatorname{Im} f,T) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_H(C,T) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_H(T_0,T)=0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Im} f,T) \longrightarrow 0,\end{gathered}$$

ya que H es hereditaria. En particular, $\operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Ker} f,T)=0$ y $\operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Im} f,T)=0$.
Como $\operatorname{Hom}_H(f,T)$ es sobreyectivo, y f es una $\operatorname{add}T$ - aproximación a izquierda, también tenemos que $\operatorname{Hom}_H(\operatorname{Ker} f,T)=0$. Además, aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_H(-,\operatorname{Ker} f)$ a la sucesión $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow H \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \longrightarrow 0$ obtenemos en forma análoga que $\operatorname{Ext}^1_H(\operatorname{Ker} f,\operatorname{Ker} f)=0$.
Por hipótesis, Ker $f=0$, y f es inyectiva.

Entonces tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{f} T_0 \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0\,.$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_H(T,-)$, obtenemos un epimorfismo

$$0 = \mathrm{Ext}^1_H(T,T_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(T,C) \longrightarrow 0$$

de donde $\mathrm{Ext}^1_H(T,C) = 0$. Aplicando $\mathrm{Hom}_H(-,T)$ a la misma sucesión, se obtiene una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_H(C,T) \to \mathrm{Hom}_H(T_0,T) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_H(f,T)} \mathrm{Hom}_H(H,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(C,T) \longrightarrow 0.$$

Como $\mathrm{Hom}_H(f,T)$ es sobreyectivo, $\mathrm{Ext}^1_H(C,T) = 0$. Por último, $\mathrm{Hom}_H(C,-)$ aplicado a la misma sucesión exacta corta nos da un epimorfismo

$$0 = \mathrm{Ext}^1_H(C,T_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(C,C) \longrightarrow 0$$

de donde $\mathrm{Ext}^1_H(C,C) = 0$. Luego, $\mathrm{Ext}^1_H(T\oplus C, T\oplus C) = 0$ y $T\oplus C$ es un módulo inclinante.

Para probar que T es inclinante nos resta mostrar que $C \in \mathrm{add}T$. Supongamos que $C \neq 0$.

Como $\mathrm{Ext}^1_H(C,T) = 0$, de nuestra hipótesis resulta que $\mathrm{Hom}_H(C,T) \neq 0$. Sea $h : C \longrightarrow T_1$ (con $T_1 \in \mathrm{add}T$) una $\mathrm{add}T$-aproximación a izquierda. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_H(-,T)$ a las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}h \longrightarrow C \xrightarrow{h} \mathrm{Im}h \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}h \longrightarrow T_1 \longrightarrow \mathrm{Coker}h \longrightarrow 0$$

obtenemos las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Coker}h,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(T_1,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Im}h,T) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Coker}h,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(T_1,T) = 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Im}h,T) \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Im}h,T) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_H(h,T)} \mathrm{Hom}_H(C,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,T) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Im}h,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(C,T) = 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h,T) \longrightarrow 0\,.$$

En particular, $\mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Im}h,T) = 0$ y $\mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h,T) = 0$. Como $\mathrm{Hom}_H(h,T)$ es sobreyectivo, tenemos que $\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,T) = 0$. Finalmente, aplicando $\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,-)$ a la primera sucesión de más arriba, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,\mathrm{Ker}h) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,C) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,h)} \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,\mathrm{Im}h) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h,\mathrm{Ker}h) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h,C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h,\mathrm{Im}h) \longrightarrow 0.$$

La inclusion $\mathrm{Im}h \to T_1$ induce un monomorfismo $\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,\mathrm{Im}h) \to \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,T_1) = 0$, entonces $\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ker}h,\mathrm{Im}h) = 0$ y tenemos un monomorfismo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h,\mathrm{Ker}h) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h,C)\,.$$

Por otro lado, $\mathrm{Hom}_H(-,C)$ aplicado a la primera sucesión nos da un epimorfismo

$$0 = \mathrm{Ext}^1_H(C,C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h, C) \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h, C) = 0$. Luego, $\mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Ker}h, \mathrm{Ker}h) = 0$. Por nuestra hipótesis, $\mathrm{Ker}h = 0$. Entonces h es inyectiva y tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{h} T_1 \longrightarrow \mathrm{Coker}h \longrightarrow 0. \qquad (*)$$

Aplicando $\mathrm{Hom}_H(-,T)$ a $(*)$, se tiene una sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_H(T_1,T) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_H(h,T)} \mathrm{Hom}_H(C,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Coker}h, T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(T_1,T) = 0.$$

Como $\mathrm{Hom}_H(h,T)$ es sobreyectivo, resulta que $\mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Coker}h, T) = 0$. Luego, aplicando $\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Coker}h, -)$ a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{f} T_0 \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

obtenemos un epimorfismo

$$0 = \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Coker}h, T_0) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Coker}h, C) \longrightarrow 0,$$

de donde $\mathrm{Ext}^1_H(\mathrm{Coker}h, C) = 0$. Por lo tanto, la sucesión $(*)$ se parte y $C \in \mathrm{add}T$. Esto termina la demostración del lema. $\square$

Probaremos el principal resultado de esta sección por recurrencia. La noción clave es la categoría perpendicular definida por Geigle y Lenzing.

Definición. Sea A un álgebra de artin y T un A - módulo inclinante parcial. La *categoría perpendicular* $T^\perp$ de T es la subcategoría plena de $\mathrm{mod}A$ cuya clase de objetos es

$$T^\perp = \left\{ X \in \ \mathrm{mod}A : \mathrm{Hom}_A(T,X) = 0 \text{ y } \mathrm{Ext}^1_A(T,X) = 0 \right\}.$$

En la notación de la sección (II.2), tenemos

$$T^\perp = \mathscr{T}_1(T) \cap \mathscr{F}_0(T).$$

Hay una caracterización de módulos inclinantes en términos de la categoría perpendicular.

Proposición 6.2. *Sea T un módulo inclinante parcial. Entonces T es inclinante si y sólo si $T^\perp = 0$.*

Demostración. Sea T un módulo inclinante. Entonces, por (II.3.5) tenemos $\mathscr{T}_0(T) = \mathscr{T}_1(T)$. Por lo tanto $T^\perp = \mathscr{T}_1(T) \cap \mathscr{F}_0(T) = \mathscr{T}_0(T) \cap \mathscr{F}_0(T) = 0$.

Recíprocamente, sea T un módulo inclinante parcial tal que $T^\perp = 0$. Para probar que T es inclinante, basta probar que $\mathscr{T}_0(T) = \mathscr{T}_1(T)$ (ver (II.3.5)). Como ya sabemos que $\mathscr{T}_0(T) \subseteq \mathscr{T}_1(T)$ (por (II.2.5)), tenemos que probar que cada $X \in \mathscr{T}_1(T)$ pertenece a $\mathscr{T}_0(T) = \mathrm{Gen}T$.

Podemos suponer que $X \neq 0$. Como $X \in \mathscr{T}_1(T)$ y, por hipótesis, $\mathscr{T}_1(T) \cap \mathscr{F}_0(T) = 0$, tenemos que $X \notin \mathscr{F}_0(T)$ y entonces $\mathrm{Hom}_A(T,X) \neq 0$. Sea $f_0 : T_0 \to X$ una $\mathrm{add}T$-aproximación a derecha, con $T_0 \in \mathrm{add}T$. Tenemos una sucesión exacta

$$T_0 \xrightarrow{f} X \to C \to 0$$

con $C = \mathrm{Coker} f$. Sea $N = \mathrm{Im} f$ y $f = ip$ la factorización canónica de f. En particular, N está generado por T_0, de donde $N \in \mathscr{T}_0(T)$. Así, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ a la sucesión exacta corta

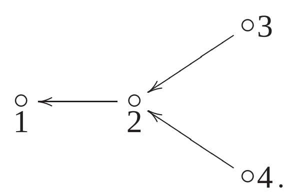
$$0 \to N \xrightarrow{i} X \to C \to 0$$

conseguimos primero $\mathrm{Ext}^1_A(T,C) = 0$ (porque $X \in \mathscr{T}_1(T)$) y segundo una sucesión exacta corta

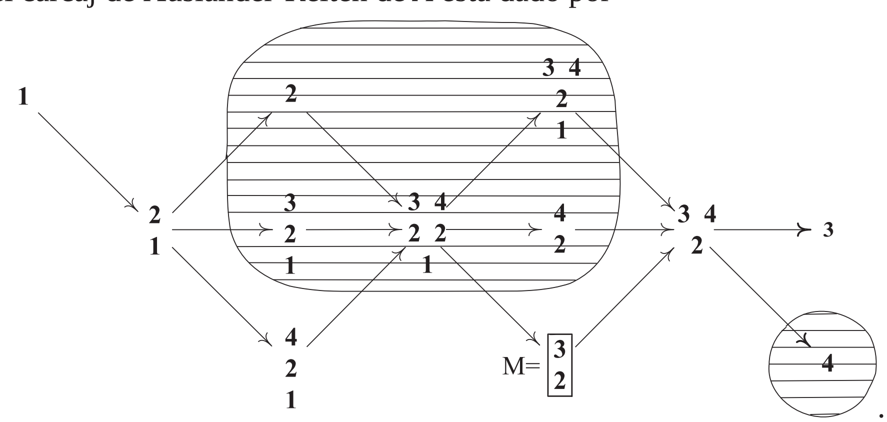
$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T,N) \to \mathrm{Hom}_A(T,X) \to \mathrm{Hom}_A(T,C) \to 0.$$

Ahora, sea $g : T \to X$ un morfismo. Como $f : T_0 \to X$ es una $\mathrm{add}T$- aproximación a derecha, existe $h : T \to T_0$ tal que $g = fh = (ip)h = i(ph)$. Entonces $\mathrm{Hom}_A(T,i)$ es un epimorfismo y $\mathrm{Hom}_A(T,C) = 0$. Esto muestra que $C \in T^{\perp}$ y entonces $C = 0$. Por lo tanto $X \in \mathrm{Gen}T = \mathscr{T}_0(T)$ y luego T es inclinante. $\square$

Ejemplo 6.3. Sea A el álgebra de caminos del carcaj



Entonces el carcaj de Auslander-Reiten de A está dado por



Si $T = {3 \atop 2}$, es fácil ver que T es un módulo inclinante parcial indescomponible. Los módulos indescomponibles de $T^{\perp}$ son aquéllos que están sombreados. En efecto, es inmediato que, para $X \in \mathrm{ind}A$, se tiene

$$\mathrm{Hom}_A(T,X) \neq 0 \text{ si y sólo si } X \in \left\{ {3 \atop 2}, {3\,4 \atop 2}, 3 \right\}$$

y

$$\mathrm{Ext}_A^1(T,X) \neq 0 \text{ si y sólo si } X \in \left\{1, \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}\right\}$$

(lo que puede verse usando el isomorfismo $\mathrm{Ext}_A^1(T,X) \cong D\mathrm{Hom}_A(X,\tau T)$, válido porque $\mathrm{dp}T \leq 1$).

Lema 6.4. *Sea T un módulo inclinante parcial. Entonces la categoría perpendicular $T^{\perp}$ es una subcategoría abeliana de* $\mathrm{mod}A$*, cerrada por extensiones.*

Demostración. Para probar que $T^{\perp}$ es una subcategoría abeliana de $\mathrm{mod}A$, es suficiente mostrar que, para todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathrm{mod}A$, con $X,Y \in T^{\perp}$, los módulos $K = \mathrm{Ker}\, f$, $J = \mathrm{Im}\, f$ y $C = \mathrm{Coker}\, f$ están en $T^{\perp}$.

Se tienen las siguientes sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \longrightarrow J \longrightarrow 0 \quad y \quad 0 \longrightarrow J \longrightarrow Y \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Puesto que $\mathrm{dp}T \leq 1$, al aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ obtenemos las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,J) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T,K) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T,J) \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,J) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,C) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T,J) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T,C) \longrightarrow 0$$

Como $X,Y \in T^{\perp}$, de la primera sucesión exacta obtenemos: $\mathrm{Hom}_A(T,K) = 0$ y $\mathrm{Ext}_A^1(T,J) = 0$, y de la segunda: $\mathrm{Hom}_A(T,J) = 0$ y $\mathrm{Ext}_A^1(T,C) = 0$. Luego, $J \in T^{\perp}$, $\mathrm{Ext}_A^1(T,K) = 0$ (de donde $K \in T^{\perp}$) y, por último, $\mathrm{Hom}_A(T,C) = 0$ (de donde $C \in T^{\perp}$).

Finalmente, si

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta con $X,Z \in T^{\perp}$, se prueba de la misma manera que $Y \in T^{\perp}$. □

Ahora vamos a presentar un teorema de reducción, debido a Geigle y Lenzing.

Teorema 6.5. *Sea A un álgebra de artin y M un A - módulo tal que:*
(a) $\mathrm{dp}M \leq 1$,
(b) $\mathrm{Ext}_A^1(M,M) = 0$,
(c) $\mathrm{Hom}_A(M,A) = 0$, *y*
(d) $\mathrm{End}\,M$ *es un anillo de división.*

Entonces existe un álgebra A' tal que $M^{\perp} \cong \mathrm{mod}A'$. Además, $\mathrm{dim.gl.}A' \leq \mathrm{dim.gl.}A$ *y* $\mathrm{rg}K_0(A') = \mathrm{rg}K_0(A) - 1$.

Demostración. Como $\mathrm{Hom}_A(M,A) = 0$, entonces M no es proyectivo. Luego $0 \neq \tau M \cong \mathrm{Hom}_A(A,\tau M) \cong D\mathrm{Ext}^1_A(M,A)$, ya que $\mathrm{dp}M \leq 1$. Por hipótesis, el módulo M es inclinante parcial. Entonces consideramos una sucesión de Bongartz (II.3.3)

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow M^d \longrightarrow 0,$$

donde d es la longitud de $\mathrm{Ext}^1_A(M,A)$ como $\mathrm{End}M$ - módulo. Sabemos que el morfismo inducido $\mathrm{Hom}_A\left(M,M^d\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,A)$ es sobreyectivo. Ahora bien, como los $\mathrm{End}M$ - módulos $\mathrm{Ext}^1_A(M,A)$ y $\mathrm{Hom}_A\left(M,M^d\right)$ tienen la misma longitud, dicho morfismo es, entonces, un isomorfismo. Luego, a partir de la sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Hom}_A(M,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,M^d) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,M^d) = 0$$

se obtiene que $\mathrm{Hom}_A(M,E) = 0$ y $\mathrm{Ext}^1_A(M,E) = 0$. Por lo tanto, $E \in M^\perp$.

Sea $X \in M^\perp$. Si aplicamos $\mathrm{Hom}_A(-,X)$ a la sucesión de Bongartz, obtenemos

$$0 = \mathrm{Ext}^1_A(M^d,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(E,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(A,X) = 0.$$

Luego, $\mathrm{Ext}^1_A(E,X) = 0$ y el objeto E es proyectivo en $M^\perp$: en efecto, si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una sucesión exacta, con $X \in M^\perp$, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(E,-)$ obtenemos un epimorfismo $\mathrm{Hom}_A(E,Y) \to \mathrm{Hom}_A(E,Z)$.

Por otra parte, todo objeto $X \in M^\perp$ está generado por E. En efecto, $E \oplus M$ es inclinante y $\mathrm{Ext}^1_A(E \oplus M,X) = 0$, de donde X es de torsión, esto es, $X \in \mathrm{Gen}(E \oplus M)$. Como $\mathrm{Hom}_A(M,X) = 0$, deducimos que $X \in \mathrm{Gen}E$.

Escribamos $A' = \mathrm{End}E$. Por (II.1.5), el funtor $\mathrm{Hom}_A(E,-) : M^\perp \longrightarrow \mathrm{mod}A'$ es una equivalencia de categorías que transforma $\mathrm{add}E$ en los A'-módulos proyectivos y preserva sucesiones exactas (ver (6.4)). Entonces las resoluciones proyectivas en $\mathrm{mod}A'$ se corresponden con las sucesiones exactas

$$E_t \xrightarrow{f_t} \cdots \longrightarrow E_1 \xrightarrow{f_1} E_0 \xrightarrow{f_0} X \longrightarrow 0,$$

con cada $E_i \in \mathrm{add}E$. Ahora veamos que $\mathrm{dim.gl.}A' \leq n = \mathrm{dim.gl.}A$. Por lo dicho más arriba, basta ver que si

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \longrightarrow E_1 \xrightarrow{f_1} E_0 \xrightarrow{f_0} X \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta con $X \in M^\perp$ y cada $E_i \in \mathrm{add}E$, entonces $K_n \in \mathrm{add}E$.

Para probarlo, consideramos una tal sucesión y notamos $\mathrm{Im} f_i = K_i$. Entonces $K_0 = X$ y para cada i con $0 \leq i \leq n$ tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K_{i+1} \longrightarrow E_i \longrightarrow K_i \longrightarrow 0$$

en $M^\perp$.

Sea Y un A - módulo arbitrario. Como $\mathrm{dp}E \leq 1$, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(-,Y)$, para cada $j \geq 2$ obtenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^j_A(K_{i+1},Y) \cong \mathrm{Ext}^{j+1}_A(K_i,Y)$$

y una sucesión exacta a derecha

$$\mathrm{Ext}^1_A(E_i, Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(K_{i+1}, Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(K_i, Y) \longrightarrow 0.$$

Tenemos varias consecuencias:

(1) $\mathrm{dp}K_n \leq 1$. En efecto, ya que $\mathrm{dim.gl.}A = n$, para todo Y tenemos que

$$\mathrm{Ext}^2_A(K_n, Y) \cong \mathrm{Ext}^3_A(K_{n-1}, Y) \cong \ \ldots\ \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_A(K_1, Y) = 0\,.$$

(2) Si $\mathrm{Ext}^1_A(E, Y) = 0$, la sucesión exacta a derecha da un isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^1_A(K_{i+1}, Y) \cong \mathrm{Ext}^2_A(K_i, Y)\,,$$

de donde

$$\mathrm{Ext}^1_A(K_n, Y) \cong \mathrm{Ext}^2_A(K_{n-1}, Y) \cong \ \ldots\ \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_A(K_0, Y) = 0.$$

En particular, $\mathrm{Ext}^1_A(K_n, K_n) = \mathrm{Ext}^1_A(K_n, E) = \mathrm{Ext}^1_A(K_n, M) = 0$.

Como, por otro lado, $K_n \in M^\perp$, resulta $\mathrm{Ext}^1_A(M, K_n) = 0$. Además, $\mathrm{Ext}^1_A(E, K_n) = 0$ pues E es Ext-proyectivo en $M^\perp$. Probamos así que $\mathrm{Ext}^1_A(E \oplus M \oplus K_n, E \oplus M \oplus K_n) = 0$ y que $\mathrm{dp}K_n \leq 1$. Por consiguiente, $E \oplus M \oplus K_n$ es un módulo inclinante parcial. Puesto que $E \oplus M$ es un módulo inclinante, $K_n \in \mathrm{add}(E \oplus M)$. Como $\mathrm{Hom}_A(M, K_n) = 0$, tenemos que $K_n \in \mathrm{add}E$, lo que prueba que $\mathrm{dim.gl.}A' \leq \mathrm{dim.gl.}A$.

Finalmente, por (d), M es indescomponible y como $M \oplus E$ es inclinante, resulta que E tiene $\mathrm{rg}K_0(A) - 1$ sumandos indescomponibles no isomorfos. Luego, $\mathrm{rg}K_0(A') = \mathrm{rg}K_0(A) - 1$. $\square$

Existe un caso particular del teorema que es importante: si A es hereditaria, entonces A' también lo es.

Ejemplo 6.6. Recordemos el ejemplo (6.3). Es fácil ver que, en este caso, $T^\perp \cong \mathrm{mod}A'$, donde A' es el álgebra de caminos de carcaj

$$\circ \longleftarrow \circ \longrightarrow \circ\,.$$

En efecto, el complemento de Bongartz de $T = \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ es (salvo multiplicidad) $E = \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix}3 & & 4\\ & 2 & \\ & 1 & \end{smallmatrix}$ y $\mathrm{End}E \cong A'$.

A continuación llegamos al resultado anunciado que implica que si A es un álgebra inclinada y e es un idempotente de A, entonces eAe es inclinada.

Teorema 6.7. *Sea H un álgebra hereditaria y T un H - módulo inclinante parcial. Entonces $A = \mathrm{End}\,T_H$ es un álgebra inclinada.*

Demostración. Si el número de clases de isomorfismo de sumandos indescomponibles de T es igual al rango de $K_0(H)$, entonces T es un H - módulo inclinante y no hay nada que probar. Si no es éste el caso, podemos disminuir el rango. Supongamos que $|\mathrm{ind}T| < \mathrm{rg}K_0(H)$. Entonces T no es inclinante. Por (6.1) existe un H - módulo indescomponible X tal que $\mathrm{Ext}^1_H(X, X) = 0$, $\mathrm{Ext}^1_H(X, T) = 0$ y $\mathrm{Hom}_H(X, T) = 0$. Entonces, de (1.2) resulta que $\mathrm{End}X$ es un anillo de división.

Si X es proyectivo, entonces existe un idempotente primitivo $e \in H$ tal que $X = eH$. Sea $H' = H/HeH$. Entonces los H'-módulos coinciden con los H-módulos M tales que $Me = \mathrm{Hom}_H(eH, M) = 0$. Como eH es proyectivo, esto muestra que los H'-módulos son exactamente los objetos de $(eH)^{\perp}$. Por otra parte, H' es hereditaria. Además, $Te \cong \mathrm{Hom}_H(eH, T) = \mathrm{Hom}_H(X, T) = 0$, de modo que T es un H' -módulo. Por otra parte, $\mathrm{rg}K_0(H') = \mathrm{rg}K_0(H) - 1$.

Si X no es proyectivo, entonces $\mathrm{Hom}_H(X, H) = 0$ y podemos considerar la categoría perpendicular $X^{\perp}$. Por (6.5) existe un álgebra hereditaria H' tal que $\mathrm{rg}K_0(H') = \mathrm{rg}K_0(H) - 1$ y $X^{\perp} \cong \mathrm{mod}H'$. Además, $T \in X^{\perp}$ y entonces T puede ser considerado como un H' - módulo inclinante parcial. En efecto, sabemos que toda sucesión $0 \to T \to E \to T \to 0$ se parte. En particular, toda tal sucesión en $X^{\perp}$ se parte. Entonces, considerando a T como H'-módulo, tenemos que $\mathrm{Ext}^1_{H'}(T, T) = 0$. Como H' es hereditaria, T es inclinante parcial sobre H'.

Así, en cada caso, hemos disminuido el rango del grupo de Grothendieck. Reiterando estas operaciones, terminamos obteniendo un álgebra hereditaria C tal que $rgK_0(C) = |\mathrm{ind}T|$ y, además, $\mathrm{End}\, T_C \cong \mathrm{End}\, T_H$. Esto finaliza la demostración. $\square$

Ejemplo 6.8. El teorema (6.7) suministra una técnica poderosa para verificar cuándo un álgebra no es inclinada. En efecto, es suficiente hallar un idempotente e del álgebra A tal que eAe no sea inclinada. Entonces seguirá del teorema que A tampoco lo es.

Sea entonces A dada por el carcaj

$$\underset{1}{\circ} \xleftarrow{\varepsilon} \underset{2}{\circ} \xleftarrow{\delta} \underset{3}{\circ} \xleftarrow{\gamma} \underset{4}{\circ} \xleftarrow{\beta} \underset{5}{\circ} \xleftarrow{\alpha} \underset{6}{\circ}$$

con las relaciones $\alpha\beta = 0$, $\delta\varepsilon = 0$. Consideremos $e = e_1 + e_2 + e_5 + e_6$. Entonces $B = eAe$ está dada por el carcaj

$$\underset{1}{\circ} \xleftarrow{\nu} \underset{2}{\circ} \xleftarrow{\mu} \underset{5}{\circ} \xleftarrow{\lambda} \underset{6}{\circ}$$

con las relaciones $\lambda\mu = 0$, $\mu\nu = 0$. Entonces B no es inclinada. En efecto, la dimensión proyectiva del módulo simple en 6 es igual a 3, ya que tenemos la resolución proyectiva

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix} \longrightarrow \begin{smallmatrix} 6 \\ 5 \end{smallmatrix} \longrightarrow 6 \longrightarrow 0$$

Por lo tanto, $\mathrm{dim.gl.}B \geq 3$ (de hecho es fácil verificar que $\mathrm{dim.gl.}B = 3$). Por (1.4) (a), B no es inclinada. Luego, A tampoco lo es.