SERIES CUYOS COEFICIENTES CONTIENEN EXPRESIONES FACTORIALES

Por J. BABINI
(Santa Fe)

Nos proponemos, en este trabajo, estudiar algunas series cuyos coeficientes contienen expresiones factoriales de base y grado variables. Indicaremos esas expresiones con el símbolo $(hn + \alpha + k)^{(n,\, h-k}$ donde n (entero) es el grado y $h - k$ la diferencia. Como dicho símbolo es simétrico respecto a h y k podremos siempre suponer $h \geq k$. (Para $h = k$ la expresión es una potencia de exponente n).

Consideremos en primer lugar la serie

$$\omega = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!} (hn + \alpha + k)^{(n,\, h-k},$$

y para h y k racionales, no simultáneamente nulos, calculemos su radio de convergencia. Si $h = \lambda p$, $k = \lambda q$ y $\alpha = \lambda d$ con p y q enteros $(p \geq q)$, ese radio será

$$\mathrm{R} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(hn + \alpha + k)^{(n,\, h-k} (n+1)!}{(hn + \alpha + h + k)^{(n+1,\, h-k} n!} \right| =$$

$$= \frac{1}{|h|} \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(hn + \alpha + k)^{(n,\, h-k}}{(hn + \alpha + 2k)^{(n,\, h-k}} \right| = \frac{1}{|h|} \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(pn + d + q)^{(n,\, p-q}}{(pn + d + 2q)^{(n,\, p-q}} \right|.$$

Como el límite es el mismo cambiando d por $d + 1$; $d + 2$; ..., tendremos

$$|\mathrm{R}h|^{p-q} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(pn + d + q)^{(n,\, p-q} \dots (pn + d + r + q)^{(n,\, p-q} \dots}{(pn + d + 2q)^{(n,\, p-q} \dots (pn + d + r + 2q)^{(n,\, p-q} \dots} \right.$$

$$\left. \frac{\dots (pn + d + p - 1 + q)^{(n,\, p-q}}{\dots (pn + d + p - 1 + 2q)^{(n,\, p-q}} \right| =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(pn + d + q)^{((p-q)\, n}}{(pn + d + 2q)^{((p-q)\, n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(qn + d + 2q)^{(q}}{(pn + d + 2q)^{(q}} \right| = \left| \frac{q}{p} \right|^q$$

de donde

$$|Rh| = \left|\frac{k}{h}\right|^{\frac{k}{h-k}} \qquad \therefore \qquad R = \left|\frac{k^k}{h^h}\right|^{\frac{1}{h-k}}$$

y los puntos z_0 del círculo de convergencia son tales que $(hz_0)^h = (kz_0)^k$.

Demostraremos ahora que en ese círculo, ω coincide con la función $\bar{\omega}$ de ecuación paramétrica

$$\begin{cases} z = t\,(1-(h-k)\,t)^{\frac{k}{h-k}} \\ \bar{\omega} = \dfrac{(1-(h-k)\,t)^{-\frac{\alpha+k}{h-k}}}{1-ht} \end{cases}$$

En efecto

$$\omega\,(1-(h-k)\,t)^{\frac{\alpha+k}{h-k}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\,(1-(h-k)\,t)^{\frac{\alpha+k(n+1)}{h-k}}}{n!}\,(hn+\alpha+k)^{(n,\,h-k}$$

que para $|(h-k)\,t| < 1$ puede escribirse

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(hn+\alpha+k)^{(n,\,h-k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}(-1)^m\,(kn+\alpha+k)^{(m,\,h-k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{n+m}}{n!\,m!}(-1)^m\,(hn+\alpha+k)^{(m+n,\,h-k} =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}\sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}(-1)^{p-n}\,(hn+\alpha+k)^{(p,\,h-k} =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}\,\Delta^p(\alpha+k)^{(p,\,h-k} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}\,p!\,h^p,$$

pues $\Delta\alpha = h$. Y, para $|ht| < 1$, tendremos

$$\omega\,(1-(h-k)\,t)^{\frac{\alpha+k}{h-k}} = \frac{1}{1-ht} = \bar{\omega}\,(1-(h-k)\,t)^{\frac{\alpha+k}{h-k}};$$

de donde, para los valores de t en el interior del círculo de radio : el menor de los dos números $\dfrac{1}{|h-k|}$ y $\dfrac{1}{|h|}$, y por lo tanto para los valores de z correspondientes, ω y $\bar{\omega}$ coinciden.

Si se pasa ahora del parámetro t al parámetro u tal que

$$1-(h-k)\,t = e^{(h-k)\,u},$$

la ecuación paramétrica de ω adopta la forma simétrica respecto a h y k

$$\left\{\begin{aligned} z &= -\frac{e^{hu}-e^{ku}}{h-k}, \\ \omega &= \frac{h-k}{he^{hu}-ke^{ku}}\, e^{-\alpha u}. \end{aligned}\right.$$

De estas ecuaciones puede deducirse nuevamente el radio de convergencia de la serie ω, pues los puntos singulares de la función se obtendrán para los valores de u tales que $he^{hu}=ke^{ku}$; para los cuales los valores de z son $\frac{e^{hu}}{k}=\frac{e^{ku}}{h}$. Como dichos valores de u tendrán igual parte real, los valores de z tendrán igual módulo y estarán pues sobre un círculo de radio

$$R=\left|\frac{e^{hu}}{k}\right|=\left|\frac{e^{h\frac{lh-lk}{k-h}}}{k}\right|=\left|\frac{k^k}{h^h}\right|^{\frac{1}{h-k}},$$

que es el valor del radio de convergencia obtenido directamente para h y k racionales, y válido ahora para todos los valores de estos números.

De igual radio de convergencia que la anterior serán las series directamente vinculadas con ella:

$$\sum_{n=0}\frac{z^n}{n!}(hn+\alpha_m+k)^{(n+m,\,h-k}=\sum_{n=m}\frac{z^{n-m}}{\underline{|n-m}}(hn+\alpha+k)^{(n,\,h-k}=\omega^{(m)},$$

con $\alpha_m-\alpha=mh$ y

$$\sum_{n=0}\frac{z^n}{n!}(hn+\alpha_{-m}+k)^{(n-m,\,h-k}=$$

$$=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{z^n}{n!}(hn+\alpha_{-m}+k)^{(n-m,\,h-k}+\int_0^z dt_m\int_0^{t_m}dt_{m-1}\dots\int_0^{t_2}\omega(t_1)\,dt_1$$

con $\alpha_{-m}-\alpha=-mh$ y $\alpha\neq hr+ks$ $(r,s=0,1,2,\dots(m-1))$.

Con estas fórmulas podremos determinar las ecuaciones paramétricas de las funciones que representan, en el círculo de convergencia, las series de los primeros miembros. Así, para $m=\pm 1$ tendremos que la serie

$$\omega = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!} (hn + \alpha_1 + k)^{(n+1,\, h-k} = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!} (h\,(n+1) + \alpha + k)^{(n+1,\, h-k}$$

tiene por ecuación paramétrica $z = -\dfrac{e^{hu} - e^{ku}}{h-k}$

$$\omega = \mathrm{D} \frac{h-k}{he^{hu} - ke^{ku}} e^{-\alpha u} = \frac{(h-k)^2 \,(h\,(h+\alpha)\, e^{hu} - k\,(k+\alpha)\, e^{ku})}{(he^{hu} - ke^{ku})^3} e^{-\alpha u};$$

mientras que la serie

$$\omega = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!} (hn + \alpha_{-1} + k)^{(n-1,\, h-k} =$$

$$= \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!} (h\,(n-1) + \alpha + k)^{(n-1,\, h-k}$$

tendrá por ecuación paramétrica $z = -\dfrac{e^{hu} - e^{ku}}{h-k}$,

$$\omega = \frac{1}{\alpha} + \int_0^z \omega\,(t_1)\, dt_1 = \frac{e^{-\alpha u}}{\alpha};$$

y su ecuación implícita será

$$z = -\frac{(\omega\alpha)^{-\frac{h}{\alpha}} - (\omega\alpha)^{-\frac{k}{\alpha}}}{h-k}.$$

De la ecuación paramétrica de ω se deduce que

$$dz = -\frac{he^{hu} - ke^{ku}}{h-k} du = -\frac{e^{-\alpha u} du}{\omega};$$

de donde

$$\omega dz = -e^{-\alpha u} du,$$

y como para

$$u = 0, \qquad z = 0$$

$$e^{-\alpha u} = 1 + \alpha \int_0^z \omega\,(x)\, dx = 1 + \alpha\Omega.$$

Con esta expresión la ecuación paramétrica puede escribirse

$$e^{hu} = kz + \frac{1 + \alpha\Omega}{\omega}$$

$$e^{ku} = hz + \frac{1 + \alpha\Omega}{\omega};$$

y la eliminación de u entre estas tres ecuaciones da lugar a una ecuación diferencial de primer orden en Ω, pues $\Omega' = \omega$, que podrá escribirse

$$\left(kz + \frac{1 + \alpha\Omega}{\omega}\right)^{k\alpha} = \left(hz + \frac{1 + \alpha\Omega}{\omega}\right)^{h\alpha} = (1 + \alpha\Omega)^{-hk},$$

de la que podrá deducirse una ecuación diferencial de segundo orden expresada algebraicamente, tal como

$$\frac{hkz\omega}{1 + \alpha\Omega} + h + k + \alpha = \frac{\omega'(1 + \alpha\Omega)}{\omega^2}.$$

Veamos ahora algunos casos particulares;

a) Para $h = 0$ (o $k = 0$) se tiene el caso trivial, simple aplicación de la serie binómica

$$\omega = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!} (\alpha + k)^{(n, -k} = (1 - kz)^{-\frac{\alpha + k}{k}}.$$

Si son simultáneamente nulos h y k la serie es la exponencial

$$\omega = e^{\alpha z}.$$

b) Para $\alpha = 0$ y $h \neq k$, caso en que la serie es

$$\omega = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!} (hn + k)^{(n, h-k}$$

se tendrá

$$\left(hz + \frac{1}{\omega}\right)^h = \left(kz + \frac{1}{\omega}\right)^k = e^{-hk\Omega}.$$

La igualdad proporcionada por los dos primeros miembros da la ecuación implícita de la función; utilizando, en cambio, el tercer miembro se obtiene, eliminando Ω por derivación, la ecuación diferencial

$$\omega' = \omega^2 (hkz\omega + h + k).$$

De esta ecuación diferencial se obtiene, por sustitución de las series respectivas e igualación de los coeficientes de igual potencia de la variable, la siguiente identidad entre expresiones factoriales

$$hk \sum_{p+q+r=n-1} \frac{(hp + k)^{(p, h-k}}{p!} \frac{(hq + k)^{(k, h-k}}{q!} \frac{(hr + k)^{(r, h-k}}{r!} +$$

$$+ (k + h) \sum_{p+q=n} \frac{(hp + k)^{(p, h-k}}{p!} \frac{(hq + k)^{(q, h-k}}{q!} = \frac{(h(n + 1) + k)^{(n+1, h-k}}{n!}.$$

que, por otra parte, puede obtenerse directamente, aplicando el binomio de Vandermonde.

Cuando h y k son conmensurables, la ecuación implícita es una expresión algebraica, que en algunos casos sencillos permite despejar ω. Así tendremos, por ejemplo,

$$h+k=0 \qquad \omega=\frac{1}{\sqrt{1+h^2z^2}}=\sum_{n=0}\frac{z^n}{n!}(h\,(n-1))^{(n,\,2h}=$$

$$=\sum_{n=0}\frac{(h^2z^2)^n}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)^{(n}$$

$$h-2k=0, \qquad \omega=\frac{2}{1-2hz+\sqrt{1-2hz}}=\sum_{n=0}\frac{z^n}{n!}\left(hn+\frac{h}{2}\right)^{\left(n,\,\frac{h}{2}\right.}=$$

$$=\sum_{n=0}\left(\frac{hz}{2}\right)^n\binom{2n+1}{n}.$$

De igual modo podrán expresarse explícitamente mediante radicales cúbicos y cuadráticos las funciones ω en los siguientes casos:

$$h+2k=0 \qquad \omega=\sum_{n=0}\frac{z^n}{n!}\left(hn-\frac{h}{2}\right)^{\left(n,\,\frac{3h}{2}\right.}=\sum_{n=0}\left(\frac{zh}{2}\right)^n\frac{(2n-1)^{(n,\,3}}{n!};$$

$$h-3k=0 \qquad \omega=\sum_{n=0}\frac{z^n}{n!}\left(hn+\frac{h}{3}\right)^{\left(n,\,\frac{2h}{3}\right.}=\sum_{n=0}\left(\frac{zh}{3}\right)^n\frac{(3n+1)^{(n,\,2}}{n!};$$

$$2h-3k=0 \qquad \omega=\sum_{n=0}\frac{z^n}{n!}\left(hn+\frac{2h}{3}\right)^{\left(n,\,\frac{h}{3}\right.}=\sum_{n=0}\left(\frac{zh}{3}\right)^n\binom{3n+2}{n}.$$

Cuando $h=k$, la ecuación diferencial y la identidad anteriores siguen siendo válidas, no así la ecuación implícita. Pero escrita ésta en la forma

$$\left(1+(h-k)\frac{z\omega}{kz\omega+1}\right)^{\frac{h}{k-h}}=kz+\frac{1}{\omega}$$

será, para $h=k$,

$$hz+\frac{1}{\omega}=e^{-\frac{hz\omega}{hz\omega+1}},$$

ecuación implícita de la función que en este caso está dada por la serie

$$\omega = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!}(hn + h)^{(n,0} = \sum_{n=0} \frac{(hz)^n}{n!}(n+1)^n$$

de radio de convergencia

$$\mathrm{R} = \lim_{h \to k} \left| \frac{k^k}{h^h} \right|^{\frac{1}{h-k}} = \frac{1}{|h|} \lim_{h \to k} \left| \left(1 - \frac{h-k}{h}\right)^{\frac{k}{h-k}} \right| = \frac{1}{e\,|h|}.$$

Si se hace

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - hz\omega_0},$$

donde

$$\omega_0 = e^{hz\omega_0},$$

será

$$(1 + hz\omega)(1 - hz\omega_0) = 1;$$

y como ω_0 puede expresarse por la ecuación paramétrica

$$\begin{cases} z = -ue^{uh} \\ \omega_0 = e^{-uh}, \end{cases}$$

es fácil obtener como desarrollo en serie de la misma

$$\omega_0 = \sum_{n=0} \frac{(hz(n+1))^n}{\underline{|n+1}},$$

convergente para $|z| < \frac{1}{e\,|h|}$. Por lo tanto las series

$$1 + hz\omega = \sum_{n=0} \frac{(hzn)^n}{n!}, \qquad 1 - hz\omega_0 = 1 - hz \sum_{n=0} \frac{(hz(n+1))^n}{\underline{|n+1}},$$

son recíprocas en el círculo de radio $\frac{1}{e\,|h|}$.

c) Mantengamos ahora la condición $h = k$, pero supongamos

$$\alpha = h(\beta - 1) \neq 0;$$

será entonces

$$\omega = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!}(h(n+1) + \alpha)^n = \sum_{n=0} \frac{(zh(n+\beta))^n}{n!}.$$

de radio de convergencia $(e\,|\,h\,|)^{-1}$ y la ecuación paramétrica será

$$z = -\,ue^{hu} \qquad \omega = \frac{e^{-h\beta u}}{1+hu};$$

de manera que introduciendo la función ω_0 del caso anterior resulta

$$\omega = \frac{\omega_0{}^{\beta}}{1-hz\omega_0}.$$

Si además $\beta = 0$, es decir $\alpha + h = 0$ será

$$\omega = \sum \frac{(hzn)^n}{n\,!} = \frac{1}{1-hz\omega_0} \qquad \therefore \qquad hz = \left(1-\frac{1}{\omega}\right) e^{\frac{1}{\omega}-1}.$$

d) Si en cambio, se mantiene la condición $\beta = 0$, es decir $\alpha + h = 0$ (ó $\alpha + k = 0$), pero $h \neq k$, tendremos

$$\left(hz + \frac{1-h\Omega}{\omega}\right)^{\frac{h}{k}} = kz + \frac{1-h\Omega}{\omega} = 1 - h\Omega.$$

Eliminada Ω entre las dos ecuaciones anteriores, se obtiene la ecuación implícita de ω:

$$kz = \left(1-\frac{1}{\omega}\right)\left(1+\frac{(h-k)(\omega-1)}{k\omega}\right)^{\frac{h}{k-h}}.$$

Si en cambio se elimina Ω por derivación, se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$kz\omega' = \omega(\omega-1)(k\omega + (h-k)(\omega-1));$$

y como en este caso la serie es

$$\omega = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n\,!}\,(h(n-1)+k)^{(n,\,h-k} = \sum_{n=0} \frac{(kz)^n}{n!}\, n^{(n,\,d},$$

donde $kd = k - h$, se obtiene, por igualación de coeficientes de iguales potencias de la variable la siguiente identidad entre factoriales de igual base y grado :

$$\frac{n^{(n,\,d}}{\underline{|n-1}} = \sum_{p+q+r=n-1} \frac{p^{(p,\,d}}{p\,!}\,\frac{q^{(q,\,d}}{q!}\,\frac{(r+1)^{(r+1,\,d}}{\underline{|r+1}} -$$
$$- \, d \sum_{p+q+r=n-2} \frac{p^{(p,\,d}}{p!}\,\frac{(q+1)^{(q+1,\,d}}{\underline{|q+1}}\,\frac{(r+1)^{(r+1,\,d}}{\underline{|r+1}}.$$

e) Por último, se obtendrá la expresión explícita de ω, cuando sea posible expresar e^u en función de z, por ejemplo: si $h + k = 0$

$$z = -\frac{\operatorname{Sh} uh}{h} \quad \therefore \quad \omega = \frac{e^{\frac{\alpha}{h}\operatorname{arc\,Sh} zh}}{\sqrt{1 + h^2 z^2}} = \sum_{n=0} \frac{z^n}{n!}(h(n-1)+\alpha)^{(n,\,2h} =$$

$$= \sum_{n=0} \frac{z^n (\alpha^2 - h^2(n-1)^2)(\alpha^2 - h^2(n-3)^2)\ldots}{n!};$$

por lo tanto

$$\frac{e^{\frac{\alpha}{h}\operatorname{arc\,sen} zh}}{\sqrt{1 - h^2 z^2}} = \sum_{n=0} \frac{z^n (\alpha^2 + h^2(n-1)^2)(\alpha^2 + h^2(n-3)^2)\ldots}{n!};$$

series de radio de convergencia $\frac{1}{|h|}$ y que, por integración, dan las series conocidas

$$e^{\frac{\alpha}{h}\operatorname{arc\,Sh} zh} = 1 + \sum_{n=0} \frac{(z\alpha)^{n+1}}{\underline{|n+1}}\left(1 - \frac{h^2(n-1)^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - \frac{h^2(n-3)^2}{\alpha^2}\right)\cdots =$$

$$= 1 + z\alpha + \frac{(z\alpha)^2}{2!} + \frac{(z\alpha)^3}{3!}\left(1 - \frac{h^2}{\alpha^2}\right) + \frac{(z\alpha)^4}{4!}\left(1 - \frac{4h^2}{\alpha^2}\right) +$$

$$+ \frac{(z\alpha)^5}{5!}\left(1 - \frac{9h^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - \frac{h^2}{\alpha^2}\right) + \cdots;$$

$$e^{\frac{\alpha}{h}\operatorname{arc\,sen} hz} = 1 + \sum_{n=0} \frac{(z\alpha)^{n+1}}{\underline{|n+1}}\left(1 + \frac{h^2(n-1)^2}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{h^2(n-3)^2}{\alpha^2}\right)\cdots =$$

$$= 1 + z\alpha + \frac{(z\alpha)^2}{2!} + \frac{(z\alpha)^3}{3!}\left(1 + \frac{h^3}{\alpha^2}\right) + \frac{(z\alpha)^4}{4!}\left(1 + \frac{4h^2}{\alpha^2}\right) +$$

$$+ \frac{(z\alpha)^5}{5!}\left(1 + \frac{9h^2}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{h^2}{\alpha^2}\right) + \cdots$$

Para terminar con la función ω, consideremos la representación definida por la función $z(k - h) = e^{hu} - e^{ku}$ entre los planos z y u. Eligiendo la determinación $u = z = 0$; al plano z corresponderá en el plano u un recinto D que contiene el origen. A las semirrectas del plano z que pasan por el origen, de argumento θ, corresponden en el plano u las curvas de ecuación

$$e^{(h-k)x} \operatorname{sen}(\theta - hy) = \operatorname{sen}(\theta - ky) \qquad (h \neq k)$$

$$x \operatorname{tg}(\theta - hy) = y \qquad (h = k).$$

La representación es conforme excepto en el o los puntos Z_0 singulares de la función ω, pues en ellos es

$$\frac{dz}{du} = -\frac{e^{-\alpha u}}{\omega} = 0.$$

A la semirrecta OZ_0Z corresponderá pues en el plano u una curva OU_0U formada por los arcos OU_0 y U_0U ortogonales en U_0.

Para $h \geq k \geq 0$ el punto U_0 está sobre el semieje real negativo, Z_0 sobre el semieje real positivo y el recinto D está limitado por la curva de ecuación

$$e^{(h-k)x} \operatorname{sen} hy = ky \qquad h \neq k$$

$$x \operatorname{tg} hy + y = 0 \qquad h = k$$

limitadas entre las asíntotas $x \to \infty;\ y = \pm\frac{\pi}{h}$ y a las semirrectas del plano z de argumento θ corresponden curvas de asíntotas

$$x \to \infty; \qquad y = \frac{\theta - \pi}{h} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\,\pi).$$

En cambio, para $0 \leq h > k < 0$ los puntos U_0 tienen por parte imaginaria $y = \frac{\pm\pi}{h-k}$ y los Z_0 por argumento $\frac{\pm\pi k}{h-k}$. El recinto D está ahora limitado por las rectas $y = \frac{\pm\pi}{h-k}$, y las curvas homólogas de las semirrectas de argumento θ del plano z tienen por asíntotas

$$-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 = -\frac{\pi k}{h-k} \qquad x \to \infty \qquad y = \frac{\theta}{k}$$

$$\theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0 \qquad x \to \infty \qquad y = \frac{\theta - \pi}{h}$$

Y ahora consideremos la serie

$$\omega_1 = \sum_{n=0} z^n\,(hn + \alpha + k)^{(n,\,h-k}$$

divergente para todo $z \neq 0$ (excepto en el caso $h = k = 0$ en el que converge para $|z\alpha| < 1$). Aplicando la función ω podemos proceder a la sumación de ω_1 por el método Borel. En efecto

$$\omega_1 = \int_0^\infty e^{-t} \sum_{n=0} \frac{(zt)^n}{n!}\,(hn + \alpha + k)^{(n,\,h-k}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,\omega\,(zt)\,dt;$$

y con la sustitución

$$zt = \frac{e^{hu} - e^{ku}}{k - h}$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{z}\int_C e^{-\alpha u + \frac{e^{hu} - e^{ku}}{h-k}}\, du,$$

donde C es la curva del plano u homóloga de la semirrecta que parte del origen y pasa por el punto de afijo z del plano z, en la representación definida por la última sustitución.

Para $u = x + yi$ y $z = re^{\theta i}$ el módulo de la función integrando es

$$e^{-\frac{\alpha xr(h-k) - e^{hx}\cos(hy-\theta) + e^{kx}\cos(ky-\theta)}{r(h-k)}} \qquad h \neq k$$

$$e^{-\frac{\alpha xr - e^{hx}(x\cos(hy-\theta) - y\,\mathrm{sen}\,(hy-\theta))}{r}} \qquad h = k,$$

y para

$$0 < h \geq k \geq 0 \qquad x \to \infty \qquad y = \frac{\theta - \pi}{h} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq h > k < 0 \quad \begin{cases} x \to -\infty & y = \dfrac{\theta}{k} & -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ x \to \infty & y = \dfrac{\theta - \pi}{h} & \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0, \end{cases}$$

ese módulo tiende a O.

Luego, excepto el caso $h = k = 0$, para todo $z \neq 0$

$$\omega_1 = \sum_{n=0} z^n (hn + \alpha + k)^{(n,\, h-k} = -\frac{1}{z}\int_C e^{-\alpha u + \frac{e^{hu} - e^{ku}}{(h-k)z}}\, du.$$

La función así definida es uniforme en todo el plano excepto para los valores de z situados sobre la o las semirrectas OZ_0, donde Z_0 son los puntos singulares de ω, para los cuales se obtienen para ω, dos valores distintos según sea el borde de D elegido como camino de integración.

Consideremos ahora las series

$$\omega_2 = \sum_{n=1} z^{-n}(-hn + \alpha + k)^{(-n,\, h-k}$$

que de acuerdo a la convención adoptada para las expresiones factoriales de exponente negativo será

$$\omega_2 = \sum_{n=1} \frac{1}{z^n(-hn + \alpha + h)^{(n,\, k-h}};$$

series convergentes para todo $z \neq 0$ (excepto el caso $h = k = 0$; $\alpha \neq 0$) siempre que no se anule ningún factor de las factoriales. Para eso supondremos $h \geq k \geq 0$; $\alpha < 0$.

Los coeficientes de la serie ω_2 pueden expresarse por la siguiente integral definida

$$\frac{1}{(-hn+\alpha+h)^{(n,\,k-h}} = \int_0^{-\infty} \frac{e^{-\alpha u}}{\underline{|n-1}} \left(\frac{e^{hu}-e^{ku}}{h-k}\right)^{n-1} du.$$

Basta, para demostrar esta fórmula para $h \neq k$ (pues para $h = k$ es inmediata), aplicar el desarrollo en fracciones simples del primer miembro, o aplicar reiteradamente la integración por partes; elijamos este último procedimiento: como la fórmula anterior es válida para $n = 1$, si lo es para $n-1$ será

$$\frac{1}{(-hn+\alpha+h)^{(n,\,k-h}} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-k(n-1))\,(-h(n-1)+\alpha-h+h)^{n-1,\,k-h}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha-k(n-1)} \int_0^{-\infty} \frac{e^{-u(\alpha-h)}}{\underline{|n-2}} \left(\frac{e^{hu}-e^{ku}}{h-k}\right)^{n-2} du =$$

$$= \frac{1}{\alpha-k(n-1)} \int_0^{-\infty} \frac{e^{-u(\alpha-k(n-1))}}{\underline{|n-1}}\, d\left(\frac{e^{(h-k)u}-1}{h-k}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{-1}{\alpha-k(n-1)} \int_0^{-\infty} \left(\frac{e^{(h-k)u}-1}{h-k}\right)^{n-1} \frac{de^{-u(\alpha-k(n-1))}}{\underline{|n-1}} =$$

$$= \int_0^{-\infty} \frac{e^{-\alpha u}}{\underline{|n-1}} \left(\frac{e^{hu}-e^{ku}}{h-k}\right)^{n-1} du,$$

y la fórmula anterior es válida para n. Con esa fórmula tendremos

$$\omega_2 = \sum_{n=1} \frac{1}{z^n} \int_0^{-\infty} \frac{e^{-\alpha u}}{\underline{|n-1}} \left(\frac{e^{hu}-e^{ku}}{h-k}\right)^{n-1} du =$$

$$= \frac{1}{z} \int_0^{-\infty} e^{-\alpha u} \sum_{n=0} \left(\frac{e^{hu}-e^{ku}}{(h-k)z}\right)^n \frac{du}{n\,!}$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{z} \int_{C'} e^{-\alpha u + \frac{e^{hu}-e^{ku}}{(h-k)z}} du,$$

siendo C' el semieje real negativo recorrido en el sentido positivo.

Como el módulo de la función integrando es

$$e^{-\alpha u+\frac{e^{hu}-e^{ku}}{(h-k)r}\cos\theta} \qquad (h \neq k)$$

$$e^{-\alpha u+\frac{ue^{hu}\cos\theta}{r}} \qquad (h = k),$$

cuando $u \to -\infty$ ese módulo tiende a 0. En definitiva, para $z \neq 0$, $\alpha < 0$ y $0 < h \geq k \geq 0$

$$\omega_2 = \sum_{n=1} \frac{1}{z^n(-hn+\alpha+h)^{(n,\,k-h}} = -\frac{1}{z}\int_{C'} e^{-\alpha u+\frac{e^{hu}-e^{kn}}{(h-k)z}}du.$$

Por último, sumando ω_1 y ω_2 tendremos

$$\omega_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n(hn+\alpha+k)^{(n,\,h-k} = -\frac{1}{z}\int_{C''} e^{-\alpha u+\frac{e^{hu}-e^{ku}}{(h-k)r}}du,$$

donde C'' es la curva constituída por el semieje real negativo y la homóloga de la semirrecta que pasa por el punto de afijo z. Y el segundo miembro que tiene sentido para todo $z \neq 0$; siempre que $\alpha < 0$; $0 < h \geq k \geq 0$ nos proporciona una fórmula de sumación de la serie divergente del primer miembro.

Veamos, para terminar, un par de casos particulares.

Si $h = k = -\alpha = 1$

$$\omega_1 = \sum_{n=0} z^n n^n = -\frac{1}{z}\int_C e^{u+\frac{ue^u}{z}}du,$$

siendo C la curva cuya ecuación paramétrica es $-ue^{u-\theta i} = t \geq 0$ donde $z = re^{\theta i}$

Si $\theta = \pi$; C es el semieje real positivo y

$$\omega_1 = \sum_{n=0}(-1)^n r^{-n} n^n = \frac{1}{r}\int_0^\infty e^{u-\frac{ue^u}{r}}du = \int_{\frac{1}{r}}^\infty \frac{dx}{(rx)^x};$$

y para $z = -1$ se obtiene

$$\sum_{n=0}(-1)^n n^n = \int_1^\infty \frac{dx}{x^x} = \int_0^1 y^{\frac{1}{y}-2}dy \simeq 0{,}7050.$$

Si $\theta = 0$; C es la curva formada por el segmento del eje real que va del origen al punto -1 y una de las dos ramas de la curva de ecuación

$$x = -\frac{y}{\operatorname{tg} y} \qquad |y| < \pi.$$

Adoptando y como variable de integración y eligiendo, por ejemplo, la curva de $y < 0$

$$\omega_1 = \sum r^n n^n = -\frac{1}{r}\int_0^{-1} e^{u+\frac{ue^u}{r}} du - \frac{1}{r}\int_0^{-\pi} e^{-\frac{t}{r}-\frac{y}{\operatorname{tg} y}} e^{yi} d\left(-\frac{y}{\operatorname{tg} y}+yi\right) =$$

$$= \int_{\frac{1}{re}}^{\frac{1}{r}} (rx)^x dx + \mathrm{A}(r) + i\mathrm{B}(r)$$

Luego para $z > 0$ los dos valores de ω_1 que se obtienen, según sea el camino de integración elegido, difieren en

$$\Delta\omega_1 = 2i\mathrm{B}(r) = \frac{2i}{r}\int_0^{\pi} \frac{e^{-\frac{t}{r}-\frac{y}{\operatorname{tg} y}}}{\operatorname{sen} y} y dy.$$

Por otra parte

$$\omega_2 = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{z^n n^n} = -\frac{1}{z}\int_{-\infty}^{0} e^{u+\frac{ue^u}{z}} du = \int_{\frac{1}{z}}^{0} (zx)^x dx = \int_0^{-\frac{1}{z}} \frac{dx}{(-zx)^x},$$

y para $z = -1$ se obtendrá,

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 \frac{dx}{x^x} \simeq 1{,}2913.$$

Combinando las dos series anteriores tendremos

$$\omega_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n n^n = -\frac{1}{z}\int_{\mathrm{C}''} e^{u+\frac{ue^u}{z}} du,$$

y para z real negativo

$$\omega_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n r^n n^n = \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} e^{u-\frac{ue^u}{r}} du = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(rx)^x}$$

obteniéndose para $r = 1$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n n^n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^x} \simeq 1{,}996.$$

En cambio para z real positivo

$$\omega_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n n^n = \int_{\frac{1}{re}}^{0} (rx)^x dx + \mathrm{A}(r) \pm i\mathrm{B}(r),$$

según sea el camino de integración elegido.

Si $h = 1$; $k = 0$; $\alpha < 0$

$$\omega_1 = \sum_{n=0} z^n (n+\alpha)^{(n} = \sum_{n=0} z^n (-1)^n (-\alpha-1)^{(n} = -$$

$$= -\frac{1}{z} \int_{\mathrm{C}} e^{-\alpha u + \frac{e^u - 1}{z}} du,$$

siendo C la curva de ecuación paramétrica $e^{-\theta i} - e^{u - \theta i} = t \geq 0$.

Es fácil ver que para $\theta \neq 0$

$$\omega_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{(1 - tz)^{\alpha+1}},$$

mientras que para $\theta = 0$, C es el semieje real negativo y una de las rectas $y = \pm \pi$. Eligiendo $y = -\pi$

$$\omega_1 = -\frac{1}{r} \int_0^{-\infty} e^{-\alpha u + \frac{e^u - 1}{r}} du - \frac{e^{\pi\alpha i}}{r} \int_0^{\infty} e^{-\alpha u - \frac{e^u + 1}{r}} du =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{r}} \frac{e^{-t} dt}{(1 - rt)^{\alpha+1}} - e^{\pi\alpha i} \int_{\frac{1}{r}}^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{(rt - 1)^{\alpha+1}},$$

de manera que para $z > 0$ los dos valores de ω_1 difieren en

$$\Delta\omega_1 = 2i \operatorname{sen} \pi (\alpha + 1) \int_{\frac{1}{r}}^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{(rt - 1)^{\alpha+1}},$$

que es evidentemente nulo para α entero, pues en ese caso ω_1 es un polinomio

Por otra parte

$$\omega_2 = \sum_{n=1} \frac{1}{z^n(-n+\alpha+1)^{(n,\,-1}} = \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{z^n \alpha^{(n}} = -$$

$$= -\frac{1}{z}\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha u + \frac{e^u - 1}{z}} du = \int_{\frac{1}{z}}^{0} \frac{e^{-t}dt}{(1-zt)^{\alpha+1}}$$

para todo $z \neq 0$.

Luego tendremos, para $\theta \neq 0$

$$\omega_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n(-1)^n(-\alpha-1)^{(n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n\alpha^{(n}} = \int_{\frac{1}{z}}^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{(1-zt)^{\alpha+1}},$$

mientras que para $\theta = 0$

$$\omega_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n(-1)^n(-\alpha-1)^{(n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{r^n\alpha^{(n}} = e^{\pi i(\alpha+1)} \int_{\frac{1}{z}}^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{(rt-1)^{\alpha+1}}.$$

Y en todos los casos

$$\omega_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n(-1)^n(-\alpha-1)^{(n} = \int_{\frac{1}{z}}^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{(1-zt)^{\alpha+1}}.$$

Haciendo intervenir las funciones eulerianas

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n(-1)^n\Pi(-\alpha-1)}{\Pi(-\alpha-1-n)} = \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{(-z)^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} e^{-x}x^{-\alpha-1}dx =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{z}}\Pi(-\alpha-1)}{(-z)^{\alpha+1}};$$

y cambiando z por $-\frac{1}{z}$ y $n+1$ por $-n$ se llega a la fórmula, válida para $z \neq 0$ y $\alpha < 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^{n-\alpha}}{\Pi(n-\alpha)} = e^z.$$