SOBRE LAS SINGULARIDADES DE LAS FUNCIONES ANALITICAS

DEFINIDAS POR INTEGRALES DETERMINANTES

Por C. BIGGERI
(Buenos Aires)

La determinación de las singularidades de la función analítica $f(z)$, definida por la integral determinante:

$$\int_0^\infty a(t) \,.\, e^{-tz} \,.\, dt, \qquad [1]$$

situadas sobre la recta de convergencia simple, puede hacerse sistemáticamente mediante el *criterio fundamental* que damos a continuación. Mediante dicho criterio pueden obtenerse teoremas sobre las singularidades periféricas de las funciones analíticas definidas por integrales determinantes, análogos a ciertos teoremas sobre las singularidades periféricas de las funciones analíticas definidas por series potenciales y *además algunos teoremas nuevos para las integrales, que no tienen su correlativo para las series.*

En esta nota demostraremos el criterio fundamental y algunos de los resultados obtenidos.

Sin restringir, en absoluto, la generalidad podemos suponer:

a) la abscisa de convergencia simple de la integral [1] *es nula;*

b) el punto, de la recta de convergencia, cuya singularidad o regularidad se desea reconocer es el origen, $z = o$.

(El caso en el cual la recta de convergencia de la integral [1] es C (siendo C un valor finito cualquiera), y el punto tomado sobre la recta de convergencia es arbitrario, se reduce al que vamos a tratar, mediante un simple cambio de variable).

Teorema I. — *Pongamos :*

$$Y_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} a(t) \,.\, t^n \,.\, e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt, \qquad (n \text{ natural}). \qquad [2]$$

a) Es condición necesaria y suficiente para que $z=0$ *sea un punto singular para* $f(z)$*, que se verifique :*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|Y_n|}=1. \qquad [3']$$

b) Es condición necesaria y suficiente para que $z=0$ *sea un punto regular para* $f(z)$*, que se verifique :*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|Y_n|}<1. \qquad [3'']$$

Demostración : Puesto que $f(z)$ es regular en el semiplano $R(z)>0$, podemos escribir :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)}{n!}\cdot\left(z-\frac{2}{3}\right)^n$$

siendo :

$$f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)=(-1)^n\cdot\int_0^{\infty}a(t)\,.\,t^n\,.\,e^{-\frac{2}{3}t}\cdot dt. \qquad [4]$$

Luego, poniendo :

$$L\equiv\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\int_0^{\infty}a(t)\,.\,t^n\,.\,e^{-\frac{2}{3}t}\cdot dt\right|}$$

el punto $z=0$ es *singular* para $f(z)$, si se verifica :

$$L=\frac{3}{2} \qquad [5]$$

y será *regular* si se tiene :

$$L<\frac{3}{2}. \qquad [6]$$

Ahora bien, respecto de la expresión :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log\left|\int_0^t a(\tau)\,.\,d\tau\right|}{t}$$

caben dos posibilidades : *a) es igual a* $-\infty$; o bien : *b) es finito pero negativo;* pues si fuese igual a $+\infty$ o tuviera un *valor finito y positivo,* la abscisa de convergencia de la integral [1] sería *positiva*, contra lo supuesto. Por consiguiente, dado arbitrariamente un número positivo ε existe un $t_1 \equiv t_1(\varepsilon)$, tal que para todo $t \geq t_1$ es :

$$\left| \int_0^t a(\tau) \, . \, d\tau \right| < e^{\varepsilon t}. \qquad [7]$$

Llamemos $M(\varepsilon)$ al extremo superior de todos los valores que la función :

$$\left| \int_0^t a(\tau) \, . \, d\tau \right|$$

toma en el intervalo $(0, t_1)$. Según [7] y la definición de $M(\varepsilon)$, se deduce que : para todo t del intervalo $(0 \leq t < +\infty)$ es :

$$\left| \int_0^t a(\tau) \, . \, d\tau \right| < K(\varepsilon) \, . \, e^{\varepsilon t} \qquad [8]$$

siendo :

$$K(\varepsilon) \equiv 1 + M(\varepsilon).$$

Pongamos :

$$A_n \equiv \int_0^n a(t) \, . \, t^n \, . \, e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt.$$

Transformemos esta expresión mediante integración por partes :

$$A_n = -\int_0^n \left(\int_0^t a(\tau) \, . \, \tau^n \, . \, d\tau \right) \cdot de^{-\frac{2}{3}t} + e^{-\frac{2}{3}n} \cdot \int_0^n a(\tau) \, . \, \tau^n \, . \, d\tau. \qquad [9]$$

De (8) y (9) se infiere :

$$|A_n| < 2 \, . \, K(\varepsilon) \, . \, n^n \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right) . n} + \frac{4}{3} \cdot K(\varepsilon) \cdot e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right) t} \, . \, dt. \qquad [10]$$

Como la función :

$$t^n \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right) t}$$

es monótona creciente en el intervalo $o \leq t \leq n$, de (10) se deduce que, si tomamos $n > 1$ se verifica :

$$|A_n| < 4 \, . \, K(\varepsilon) \, . \, n^{n+1} \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right) . n}. \qquad [11]$$

Pongamos :

$$B_n \equiv \int_{2n}^{\infty} a(t) \, . \, t^n \, . \, e^{-\frac{2}{3}t} \, . \, dt$$

(la función B_n existe en virtud de (4)).

Mediante integración por partes y teniendo en cuenta [8] se deduce que, para $t > 2n$ es :

$$\left| \int_{2n}^{t} a(t) \, . \, t^n \, . \, e^{-\frac{2}{3}t} \, . \, dt \right| < 4 \, . \, \mathrm{K}(\varepsilon) \, . \, t^n \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)t} +$$

$$+ \frac{8}{3} \cdot \mathrm{K}(\varepsilon) \cdot \int_{2n}^{t} t^n \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)t} \cdot dt$$

de donde, $\left(\varepsilon < \frac{2}{3}\right)$, se deduce :

$$| \mathrm{B}_n | \leq \frac{8}{3} \cdot \mathrm{K}(\varepsilon) \cdot \int_{2n}^{\infty} t^n \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-2\varepsilon\right)t} \cdot e^{-\varepsilon t} . dt. \qquad [12]$$

Como la función :

$$t^n \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-2\varepsilon\right)t}$$

es monótona decreciente en el intervalo $2n \leq t < +\infty$, si tomamos $\varepsilon < \frac{1}{12}$, de (12) se deduce :

$$| \mathrm{B}_n | < \frac{8}{3\varepsilon} \cdot \mathrm{K}(\varepsilon) \, . \, (2n)^n \, . \, e^{-\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right) \cdot 2n}. \qquad [13]$$

Según la fórmula de Stirling y las (11) y (13), existe un número natural fijo n_0, suficientemente grande, tal que para $n \geq n_0$ es :

$$| \mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n | < 4 \, . \, \mathrm{K}(\varepsilon) \, . \left(1 + \frac{2}{3n\varepsilon}\right) \cdot n \cdot n! \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{17}{18}\right)^n \cdot e^{3\varepsilon n}$$

de donde :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} | \mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n |} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{17}{18} \cdot e^{3\varepsilon}$$

y tomando límites para $\varepsilon \to 0$, es :

$$l \equiv \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} | \mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n |} < \frac{3}{2}. \qquad [14]$$

Pongamos finalmente :

$$\mathrm{C}_n \equiv \int_{n}^{2n} a(t) \, . \, t^n \, . \, e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt$$

Ahora bien, *supongamos que el punto* $z = 0$ *sea singular para* $f(z)$, o sea, que se verifique [5]. Sea δ un número positivo arbitrario pero fijo y q un número fijo positivo tal que:

$$l < q < \frac{3}{2}.$$

Según [5] y [14] a partir de un valor determinado de n, suficientemente grande, se verifican, respectivamente, que:

$$\frac{1}{n!}\,|(A_n + B_n) + C_n| < \left(\frac{3}{2} + \delta\right)^n$$

$$\frac{1}{n!}\,|A_n + B_n| < q^n$$

y por lo tanto:

$$\frac{1}{n!}\,|C_n| < \left(\frac{3}{2} + \delta\right)^n + q^n = \left(\frac{3}{2} + \delta\right)^n \cdot \left[1 + \left(\frac{q}{\frac{3}{2} + \delta}\right)^n\right]$$

de donde:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\,|C_n|} \leq \frac{3}{2} + \delta$$

y tomando límites para $\delta \to 0$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\,|C_n|} \leq \frac{3}{2}. \qquad [15]$$

Veamos que en la [15] no se puede verificar el signo menor. En efecto, si fuese:

$$l' \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\,|C_n|} < \frac{3}{2}$$

tomando un número positivo arbitrario fijo, q', menor que $\frac{3}{2}$ y mayor que l y l', será:

$$\frac{1}{n!}\,|C_n| < q'^n$$

$$\frac{1}{n!}\,|A_n + B_n| < q'^n$$

de donde:

$$\frac{1}{n!}\,|(A_n + B_n) + C_n| < 2q'^n,$$

o sea :

$$\mathrm{L} \leq q' < \frac{3}{2},$$

es decir : si en [15] se verifica el signo menor no se verifica la [5] sino la [6]; luego : es condición *necesaria* para que el punto $z=0$ sea *singular* para $f(z)$ que se verifique :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} | \mathrm{C}_n |} = \frac{3}{2}. \tag{16}$$

Veamos que esta condición es también *suficiente*. En efecto, si no se verifica [5] se verifica necesariamente la [6], por lo tanto, si tomamos un número positivo fijo, q'', menor que $\frac{3}{2}$ y mayor que l y L, según [6] y [14] a partir de un valor de n suficientemente grande, serán :

$$\frac{1}{n!} | (\mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n) + \mathrm{C}_n | < q''^n$$

$$\frac{1}{n!} | \mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n | < q''^n,$$

de donde :

$$\frac{1}{n!} | \mathrm{C}_n | < 2q''^n,$$

o sea :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} | \mathrm{C}_n |} \leq q'' < \frac{3}{2},$$

esto es, no se verifica [16]. Luego : *las igualdades* [5] *y* [16] *son equivalentes* y aplicando en [16] la fórmula de Stirling se obtiene la igualdad [3'].

La conclusión *a)* del teorema está probada.

Pasemos a la conclusión *b)*. Vimos que : si se verifica la [6], es decir, si el punto $z=0$ es *regular* para $f(z)$, se verifica :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} | \mathrm{C}_n |} < \frac{3}{2}, \tag{17}$$

y recíprocamente, si se verifica [17] se verifica la [6]. Luego : *las desigualdades* [3''] *y* [17] *son equivalentes.*

Como complemento interesante a este teorema veamos que : *si existe* *límite ordinario de* $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}\left|f^{(n)}\left(\dfrac{2}{3}\right)\right|}$, *para* $n \to \infty$, *existe también límite ordinario de* $\sqrt[n]{|\mathrm{Y}_n|}$, *en el caso de que el punto* $z = 0$ *sea singular para* $f(z)$.

En efecto, supongamos que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)\right|} \equiv \mathrm{L} = \frac{3}{2}. \qquad [18]$$

Sea δ un número positivo arbitrario menor que $\dfrac{3}{2} - l$. A partir de un n, suficientemente grande, se verifican:

$$\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)\right| > \left(\frac{3}{2} - \delta\right)^n \qquad [19]$$

$$\frac{1}{n!}\,|\mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n| < \left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + l - \delta\right)\right]^n \qquad [20]$$

según [18] y [14], respectivamente. De [19] y [20] se deduce:

$$\frac{1}{n!}\,|\mathrm{C}_n| > \left(\frac{3}{2} - \delta\right)^n \cdot \left[1 - \left(\frac{3 - 2\delta + 2l}{2\,(3 - 2\delta)}\right)^n\right]$$

de donde:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\,|\mathrm{C}_n|} \geq \frac{3}{2} - \delta \qquad [21]$$

(pues : $3 - 2\delta + 2l < 2\,(3 - 2\delta)$), y tomando límites en [21], para $\delta \to 0$:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\,|\mathrm{C}_n|} \geq \frac{3}{2}. \qquad [22]$$

De [16] y [22] se deduce la existencia de *límite ordinario* de $\sqrt[n]{|\mathrm{Y}_n|}$, si el punto $z = 0$ es *singular* para $f(z)$.

Este complemento nos será útil más adelante.

Hagamos algunas aplicaciones de este criterio.

Es sabido que el teorema de Vivanti de la teoría de las series potenciales se generaliza (con demostración análoga) a las funciones analíticas definidas por integrales determinantes; esto es: si la función generatriz es *positiva,* el punto real de la recta de convergencia es singular para la función analítica que define la integral.

Mediante nuestro criterio y este teorema análogo al de Vivanti, hemos logrado demostrar un teorema muy general para las integrales determinantes, a saber:

TEOREMA II. — *Si el valor principal, $\varphi(t)$, del argumento de la función (compleja) generatriz, $a(t)$ (supuesto, necesariamente, que a partir de un valor de t, suficientemente grande, $a(t)$ no se anula) de la integral determinante :*

$$\int_0^\infty a(t) \, . \, e^{-tz} \, . \, dt, \qquad [1]$$

satisface a la condición :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\log |\cos \varphi(t)|}{t} = 0; \qquad [23]$$

y las abscisas de convergencia, simple y absoluta, de la integral [1] *son iguales, y además $\varphi(t)$ satisface a la condición de Darboux, entonces, el punto real de la recta de convergencia de la integral* [1], *es singular para la función analítica, $f(z)$, que define dicha integral.*

Demostración : Sin restringir, en absoluto, la generalidad del teorema, podemos suponer que la abscisa de convergencia de la integral [1] es nula. Se trata, entonces de demostrar que el punto $z = 0$ es *singular* para $f(z)$.

Llamemos $\rho(t)$ al módulo de $a(t)$, y pongamos :

$$Y_n' \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} \rho(t) \, . \cos \varphi(t) \, . \, t^n \, . \, e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt$$

$$Y_n'' \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} \rho(t) \, . \, t^n \, . \, e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt.$$

Evidentemente es :

$$|Y_n| \geq |Y_n'|$$

y por el teorema de la media :

$$|Y_n| \geq |\cos \varphi(\xi)| \, . \, Y_n'' \qquad [24]$$

siendo :

$$n < \xi \equiv \xi(n) < 2n.$$

Puesto que :

$$\sqrt[n]{|\cos \varphi(\xi)|} = \left(|\cos \varphi(\xi)|^{\frac{1}{\xi}}\right)^{\frac{\xi}{n}}$$

está comprendido entre $|\cos \varphi(\xi)|^{\frac{1}{\xi}}$ y $|\cos \varphi(\xi)|^{\frac{2}{\xi}}$, en virtud de (23) se verifica :

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\cos \varphi(\xi)|} = 1. \qquad [25]$$

Como las abscisas de convergencia, simple y absoluta, de la integral [1] son iguales, y habiendo supuesto que la abscisa de convergencia de [1] es nula, por el teorema análogo al de Vivanti, el punto $z = 0$ será *singular* para la función analítica definida por la integral:

$$\int_0^\infty \rho(t) \,.\, e^{-tz} \,.\, dt$$

por lo tanto, en virtud del teorema I (conclusión a)) se verifica:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{Y_n''} = 1. \qquad [26]$$

De [24], [25] y [26] se deduce:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|Y_n|} \geq 1 \qquad [27]$$

y como $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|Y_n|}$ no puede ser mayor que la unidad, según [27] es:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|Y_n|} = 1,$$

y en virtud del teorema I, el punto $z = 0$ es *singular* para $f(z)$.

Si la abscisa de convergencia, que llamaremos C, *de la integral* [1] *se pudiese calcular por la fórmula:*

$$C = \lim_{t\to\infty} \frac{\log|a(t)|}{t} \qquad [28]$$

(en cuyo caso las abscisas de convergencia, simple y absoluta, de la integral [1] son *iguales), la condición* [23] *se puede substituir por la siguiente (que es más general):*

$$\overline{\lim_{\zeta\to\infty}} \frac{\log|\cos\varphi(\zeta)|}{\zeta} = 0 \qquad [29]$$

siendo $|\cos\varphi(\zeta)|$ *el menor (en sentido amplio) de todos los valores de* $|\cos\varphi(t)|$, *en el intervalo* $n \leq t \leq 2n$.

En efecto, el teorema de la media da:

$$Y_n' = \rho(\theta) \,.\, \cos\varphi(\theta) \,.\, Y_n'''$$

siendo:

$$Y_n''' \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \int_n^{2n} t^n \,.\, e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt$$

y θ un cierto valor de t, tal que: $n \leq \theta \leq 2n$. Por lo tanto:

$$|\mathrm{Y}_n| \geq \rho(\theta) \,.\, |\cos\varphi(\theta)| \,.\, \mathrm{Y}_n'''. \tag{30}$$

Llamando $\rho(\omega)$ al *menor* (en sentido amplio) de los valores de $\rho(t)$, en el intervalo $n \leq t \leq 2n$, de [30] se deduce:

$$|\mathrm{Y}_n| \geq \rho(\omega) \,.\, |\cos\varphi(\zeta)| \,.\, \mathrm{Y}_n'''. \tag{31}$$

Puesto que: $\sqrt[n]{\rho(\omega)} = \left[(\rho(\omega))^{\frac{1}{\omega}}\right]^{\frac{\omega}{n}}$ está comprendido entre $(\rho(\omega))^{\frac{1}{\omega}}$ y $(\rho(\omega))^{\frac{2}{\omega}}$ y como hemos supuesto que $\mathrm{C} = 0$, de [28] se infiere:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\rho(\omega)} = 1. \tag{32}$$

Análogamente, como: $\sqrt[n]{|\cos\varphi(\zeta)|} = \left(|\cos\varphi(\zeta)|^{\frac{1}{\zeta}}\right)^{\frac{\zeta}{n}}$ está comprendido entre $|\cos\varphi(\zeta)|^{\frac{1}{\zeta}}$ y $|\cos\varphi(\zeta)|^{\frac{2}{\zeta}}$, según [29] es:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\cos\varphi(\zeta)|} = 1. \tag{33}$$

Ahora bien, la integral $\int_0^\infty e^{-tz} \,.\, dt$ (cuya abscisa es nula) define la función $g(z) \equiv \frac{1}{z}$, en la cual es:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|g^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)\right|} \equiv \frac{3}{2} \to \frac{3}{2}, \qquad \text{para } n \to \infty,$$

luego, en virtud del complemento al teorema I, se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{Y}_n'''} = 1. \tag{34}$$

De [31], [32], [33] y [34] se deduce:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\mathrm{Y}_n|} \geq 1$$

lo que demuestra la conclusión.

Dos casos particulares interesantes en los cuales se cumple la condición [23] son:

a) El afijo de $a(t)$ varía, a partir de un valor de t, suficientemente grande, en un par de ángulos opuestos por el vértice (origen). (Téngase en cuenta que este par de ángulos opuestos por su vértice, siempre se puede transformar en un par de ángulos simétricos respecto del eje real, mediante la multiplicación de la generatriz, $a(t)$, por un cierto número complejo).

b) La generatriz, $a(t)$, es real y toma valores positivos y negativos (pero a partir de un valor de t, suficientemente grande, $a(t)$ no se anula).

Si la parte real de la generatriz, $a(t)$, a partir de un valor de t (suficientemente grande) es *positiva,* la igualdad de las abscisas de convergencia, simple y absoluta, de la integral [1], es, entonces, consecuencia de la condición [23]. Esto es, podemos enunciar el siguiente teorema.

TEOREMA III. — *Si se verifican las dos condiciones siguientes :*

1°) *La parte real de la generatriz, $a(t)$, a partir de un valor de t, suficientemente grande, es positiva.*

2°) *El valor principal, $\varphi(t)$, del argumento de $a(t)$, satisface a la condición :*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log \cos \varphi(t)}{t} = 0; \qquad [35]$$

entonces, el punto real de la recta de convergencia de la integral [1], es singular para la función analítica $f(z)$, que define dicha integral.

Para demostrarlo, basta comprobar que bajo la condición [35] las abscisas de convergencia, simple y absoluta, de la integral [1] son iguales.

En efecto, llamemos C y C′ a las abscisas de convergencia simple y absoluta de la integral [1], respectivamente, y pongamos :

$$a(t) \equiv a_1(t) + i a_2(t).$$

Se tiene :

$$C = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log\left|\int_{[t]}^{t} a(\tau)\,.\,d\tau\right|}{t}$$

$$C' = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log \int_{[t]}^{t} |a(\tau)|\,.\,d\tau}{t}.$$

Dado arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, existe un $t_0 \equiv t_0(\varepsilon)$, tal que para $t \geq t_0$, según [35] es :

$$\sqrt{\overline{a_1(\tau)}^2 + \overline{a_2(\tau)}^2} \leq a_1(\tau)\,.\,e^{\varepsilon\tau}$$

de donde :

$$\int_{[t]}^{t} |a(\tau)| \cdot d\tau \leq e^{\varepsilon t} \cdot \int_{[t]}^{t} a_1(\tau)\,.\,d\tau. \qquad [36]$$

Además, se tiene :

$$\left|\int_{[t]}^{t} a(\tau)\,.\,d\tau\right| \geq \int_{[t]}^{t} a_1(\tau)\,.\,d\tau. \qquad [37]$$

Pongamos :

$$C'' \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log \int_{[t]}^{t} a_1(\tau)\,.\,d\tau}{t}.$$

Según [36] es :

$$C' \leq \varepsilon + C''$$

y tomando límites para $\varepsilon \to 0$:

$$C' \leq C''. \qquad [38]$$

Según [37] es :

$$C' \geq C''. \qquad [39]$$

De [38] y [39] se deduce :

$$C \geq C'$$

y puesto que :

$$C' \leq C$$

se tiene :

$$C = C'.$$

Un caso particular interesante en el cual se cumplen las condiciones del teorema III, se presenta cuando es :

$$|\varphi(\tau)| \leq \tau < \frac{\pi}{2}; \qquad (\tau \text{ es fijo});$$

esto es, se obtiene, entonces, la generalización del teorema de Dienes de la teoría de las series potenciales.

Pasemos a otra propiedad de las integrales determinantes que se puede obtener mediante la aplicación del teorema fundamental.

TEOREMA IV. — *Si existe límite ordinario de la derivada logarítmica de la función generatriz, $a(t)$, para $t \to \infty$, y es :*

$$\lim_{t\to\infty} D \log a(t) = \alpha;$$

el punto $z = \alpha$ (que pertenece a la recta de convergencia), es singular para la función analítica, $f(z)$, que define la integral [1].

Este teorema recuerda al de Fabry de la teoría de las series potenciales, *pero no se puede decir que es su análogo.*

La demostración del teorema IV (que se efectúa mediante el teorema I) será objeto de una nota próxima.

Nótese que el teorema II no vale para las funciones analíticas definidas por series potenciales. En efecto; basta considerar la serie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n,$$

el valor principal, φ_n, del argumento de su coeficiente, $(-1)^n$, satisface a la condición :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log |\cos \varphi_n|}{n} = 0$$

análoga a la [23], y sin embargo, el punto $z = 1$ es *regular* para la función $\frac{1}{1+z}$. (Téngase en cuenta que : lo correlativo del punto en el cual la recta de convergencia de una integral determinante corta al *eje real* del plano z, es, en la serie de potencias, el punto en el cual la circunferencia de convergencia corta al *semieje real y positivo).*

RÉSUMÉ

L'étude des singularités de la fonction analytique, $f(z)$, définie par l'intégrale de Laplace :

$$\int_0^{\infty} a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt \qquad [1]$$

placées sur la droite de convergence simple, peut se faire systématiquement moyennant le *critérium fondamental* que je donne plus haut. En employant ce critérium on peut obtenir des théorèmes sur les singularités périphériques des fonctions analytiques définies par des intégrales de Laplace, analogues à certains théorèmes sur les singularités périphériques des fonctions analytiques définies par des séries potentielles et *de plus quelques théorèmes nouveaux pour les intégrales, qui n'ont pas des correspondants pour les séries.*

Dans la note présente je démontre le critérium fondamental et quelques uns des résultats obtenus.

Sans restreindre la généralité du théorème, on peut supposer que l'abscisse de convergence simple de l'intégrale [1] est *nulle* et donnons, alors, une condition nécessaire et suffisante pour que le point $z = 0$ soit *singulier* pour $f(z)$.

THÉORÈME I. — Posons [2] : *a) il est condition nécessaire et suffisante pour que le point* $z = 0$ *soit singulier pour* $f(z)$, *que l'égalité* [3′] *soit vérifiée;*

b) il est condition nécessaire et suffisante pour que le point $z = 0$ *soit régulier pour* $f(z)$ *que l'inégalité* [3″] *soit vérifiée.*

En outre, je démontre que : si le point $z = 0$ est singulier pour $f(z)$ et s'il existe de la *limite ordinaire* de $\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{2}{3}\right)\right|}$, pour $n \to \infty$, il existe aussi de la *limite ordinaire* de $\sqrt[n]{|Y_n|}$.

Moyennant le théorème I, je démontre les suivantes théorèmes.

THÉORÈME II. — *Si la valeur principale,* $\varphi(t)$, *de l'argument de la fonction génératrice,* $a(t)$, *de l'intégrale* [1] *satisfait à la condition* [23]; *et si, en outre, les abscisses de convergence, simple et absolue, de l'intégrale* [1] *sont égales, alors, le point réel de la droite de convergence de l'intégrale* [1], *est singulier pour* $f(z)$.

Si à partir d'une valeur de t (suffisammente grande), la partie réelle de la fonction génératrice, $a(t)$, est *positive*, l'égalité des abscisses de convergence, simple et absolue, de l'intégrale [1] est conséquence de la condition [23] : on a, alors, une extense généralisation du théorème de Dienes.

En outre, j'indique un théorème qui rappelle celui de Fabry, à savoir :

S'il existe de la limite ordinaire de la dérivée logarithmique de la fonction génératrice, $a(t)$, *pour* $t \to \infty$, *et elle est :*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{D} \log a(t) = \alpha,$$

le point $z = \alpha$ *(appartenant à la droite de convergence) est singulier pour* $f(z)$.