GENERALIZACION DE UN TEOREMA DE CANTELLI

POR A. GONZALEZ DOMINGUEZ
(Buenos Aires)

Dada una variable casual x, que puede tomar uno de los valores de la sucesión

$$a_{-n}, \quad a_{-(n-1)}, \quad \dots, \quad a_0, \quad a_1, \quad \dots, \quad a_n \dots \qquad [1]$$

con las respectivas probabilidades

$$p_{-n}, \quad p_{-(n-1)} \quad p_0, \quad \dots, \quad p_1 \quad \dots, \quad p_n \dots$$

e indicando con x uno cualquiera de los valores de la sucesión [1], y con $f(x)$ la probabilidad correspondiente, la función

$$\mathrm{F}(y) = \sum_{x=-\infty}^{y} f(x) \qquad [2]$$

que no es sino la probabilidad de que la variable casual x tome un valor no superior a y, se llama *función de probabilidades totales* o *función de repartición* de la variable casual x.

El profesor Cantelli, en una conocida memoria [1], ha enunciado el siguiente teorema :

Si para todo valor del índice k, y para todo entero positivo s existe $\sum_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\, x^s$, y se verifica la igualdad

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\, x^s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^s dx \qquad [s = 1, 2 \dots],$$

[1] CANTELLI, *Un nuovo teorema a proposito del secondo teorema limite del calcolo delle probabilità. Rend. di Palermo* (52), página 416-424, 1928.

se verificará también, para todo u fijo,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\, e^{-u|x-y|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-u|x-y|}\, dx,$$

uniformemente para todo y perteneciente a un intervalo finito fijo, arbitrariamente grande.

El profesor Cantelli agrega a continuación : « di questo teorema, suscettibile di generalizzazione, può darsi una dimostrazione elementare e breve, senza il sussidio di variabili casuali ausiliarie. Di esso avrò occasione di occuparmi presto ».

La anunciada generalización fué hecha el año siguiente no por Cantelli, sino por su discípulo R. Cultrera, quien demostró el teorema siguiente [1] :

« Sea una sucesión de leyes de probabilidades totales

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x),$$

y una densidad continua de probabilidad $\varphi(x)$, que satisfaga la condición

$$\frac{[\psi(2n)]^n}{(2n!)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, t^{2n} dt < 1$$

para n mayor que un cierto n_1, siendo ψ una función de la variable entera n, que tiende a ∞, para $n \to \infty$; si para todo $s = 0, 1, 2, \ldots$, se verifica

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^s df_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \varphi(x)\, dx,$$

se verificará también

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u|x-y|} df_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u|x-y|} \varphi(x)\, dx \text{ ».}$$

El anterior teorema de Cultrera, está comprendido, como caso muy particular, en el teorema siguiente :

Sea $\{f_k(x)\}$ una sucesión de leyes de probabilidades totales, y $f(x)$

[1] R. CULTRERA, *Intorno al secondo teorema limite del calcolo delle probabilità*, *Rend. di Palermo*, 53 (1929), página 476.

una ley de probabilidades totales tal que su correspondiente problema de momentos esté determinado; si se verifican las igualdades

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^s df_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s df(x) \qquad [s = 0, 1, 2, ...],$$

también se verifica, para todo u, y uniformemente para todo y perteneciente a un intervalo finito arbitrario

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k_u(x-y)\, df_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_u(x-y)\, df(x),$$

siendo $k_u(x-y)$ un núcleo positivo de una *integral singular* derivada de la sumación de la integral de Fourier.

De este teorema, y de sus relaciones con el segundo teorema límite del cálculo de probabilidades, nos ocuparemos en un próximo trabajo. En la presente nota demostraremos un caso particular del mismo, a saber, el correspondiente al núcleo de la « integral singular de Poisson para el semiplano ».

TEOREMA.

Hipótesis : 1ª $\{f_k(x)\}$ y $f(x)$ funciones de repartición;

2ª el problema de momentos de $f(x)$ está determinado;

3ª $$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^n df_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n df(x) \qquad [n = 0, 1, 2, ...].$$

Tesis :

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\, df_k(x)}{(p-x)^2+q^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\, df(x)}{(p-x)^2+q^2},$$

para q fijo, uniformemente para todo p comprendido en un intervalo finito, arbitrariamente grande.

La demostración se basa en el siguiente

Lema. — Hipótesis : Las mismas del teorema anterior.

Tesis :

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_k(x)}{\lambda - x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{\lambda - x}. \qquad [1]$$

$$\lambda = p + iq; \quad q \neq 0.$$

Demostración : Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{\lambda - x} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{x^\nu}{\lambda^{\nu+1}} + \frac{1}{\lambda^n}\frac{x^n}{\lambda - x},$$

resulta, haciendo

$$m_\nu^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu df_k(x)$$

$$m_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu df(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_k(x)}{\lambda - x} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{m_\nu^k}{\lambda^{\nu+1}} + \frac{1}{\lambda^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n df_k(x)}{\lambda - x}$$

para n fijo.

Al tender k a infinito, el primer sumando tiende a

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{m_\nu}{\lambda^{\nu+1}}.$$

Demostremos que el segundo sumando tiende a

$$\frac{1}{\lambda^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n df(x)}{\lambda - x} \qquad (n \text{ fijo}).$$

Se trata de demostrar que

$$\left| \frac{1}{\lambda^n} \int \frac{x^n df_k(x)}{\lambda - x} - \frac{1}{\lambda^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n df(x)}{\lambda - x} \right| < \varepsilon,$$

para $k > k(\varepsilon)$.

Esta igualdad se cumple; en efecto

$$\left| \frac{1}{\lambda^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n df_k(x)}{\lambda - x} - \frac{1}{\lambda^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n df(x)}{\lambda - x} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda^n|} \cdot \frac{1}{|\lambda \operatorname{sen} \theta|} \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^n df_k(x) - \int_{-\infty}^{\infty} x^n df(x) \right|,$$

por ser $\dfrac{1}{|\lambda \operatorname{sen} \theta|}$ el mínimo de $\dfrac{1}{\lambda - x}$ $\qquad (\lambda = re^{i\theta})$.

Pero el segundo miembro de la desigualdad puede hacerse tan pequeño como se quiera, para k suficientemente grande, en virtud de la hipótesis [3] del teorema, ya que el factor que multiplica la diferencia de integrales tiene un valor fijo.

Hemos, pues demostrado que

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_k(x)}{\lambda - x} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{m^\nu}{\lambda^{\nu+1}} + \frac{1}{\lambda^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n df(x)}{\lambda - x}.$$

Pero el segundo miembro no es sino

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{\lambda - x},$$

con lo que queda demostrado el lema. La hipótesis [3] es esencial. En efecto, si no se cumpliera, es decir, si el problema de momentos de $f(x)$ no estuviera determinado, habría infinitas funciones $f(x)$ que satisfarían a la desigualdad

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^n df_k(x) - \int_{-\infty}^{\infty} x^n df(x) \right| < \varepsilon,$$

para $k > k(\varepsilon)$; y no se llegaría, por tanto, a ninguna conclusión determinada.

El teorema resulta ahora fácilmente; en efecto, las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_k(x)}{\lambda - x},$$

cumplen la acotación

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_k(x)}{\lambda - x} \right| \leq \frac{1}{\mathrm{I}(\lambda)},$$

denotando con $\mathrm{I}(\lambda)$ la parte imaginaria de λ; en efecto, la variación total de cualquiera de las $f_k(x)$ es igual a 1, ya que son funciones de repartición.

Las funciones holomorfas $\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_k(x)}{\lambda - x} \right\}$ están, pues, uniformemente acotadas en todo recinto acotado completo que no corte el eje real. El teorema de Vitali es, pues aplicable, y por lo tanto la convergencia es *uniforme* en todo recinto del tipo descripto. Tomando las partes imaginarias en ambos miembros de la igualdad [1], de página 65, resulta

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\,df_k(x)}{(p - x)^2 + q^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\,df(x)}{(p - x)^2 + q^2},$$

uniformemente para todo p comprendido en un intervalo arbitrario, finito, y para q fijo. El teorema queda así demostrado.

Hagamos, finalmente, algunas observaciones.

La primera es que la condición

$$\frac{[\psi(2n)]^n}{(2n!)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, t^{2n} dt < 1,$$

desde un n en adelante, se cumple ampliamente si el problema de momentos de $\varphi(t)$ está determinado; esto es consecuencia fácil del clásico teorema de Carleman (¹), según el cual el problema de momentos de $f(x)$ está determinado, si la serie

$$\sum \frac{1}{\sqrt[2n]{m_{2n}}}$$

es divergente.

La segunda es que la expresión

$$\frac{u}{2} e^{u|x-y|}$$

que interviene en el teorema de Cantelli-Cultrera, es el núcleo de la integral singular de Picard.

Observemos finalmente, que de nuestro teorema se deduce fácilmente, en virtud de un teorema de Cantelli (²), el segundo teorema límite del Cálculo de Probabilidades; y que, inversamente, supuesto conocido este último teorema, el del texto se deduce inmediatamente, recordando una clásica proposición de Grommer-Hamburger (³).

RÉSUMÉ

On démontre le théorème suivant : Étant donnée une succession de fonctions de repartition $\{f_k(x)\}$, et une fonction de repartition $f(x)$ dont le problème des moments est determiné, si l'on a les égalités :

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n df_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n df(x)$$

pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots, n$, on a aussi

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_k(x)}{(p-x)^2 + q^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{(p-x)^2 + q^2}$$

pour q fixe, et uniformément pour tout p appartenant a un intervalle fixe, mais arbitrairement grand.

(¹) CARLEMAN, *Les fonctions quasi-analytiques*, página 80.

(²) CANTELLI, *loc. cit.*

(³) HAMBURGER, *Math. Ann.*, 81 (1920), página 283.