

REMARQUES ARITHMETIQUES SUS UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DU PREMIER ORDRE

par MICHEL PETROVICH (BEOGRAD)

1. L'objet de la présente Note est l'équation différentielle du premier ordre

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

où f est polynome en x, y à coefficients nombres entiers (positifs ou négatifs).

Considerons le point M_k sur l'axe des y , ayant pour l'ordonnée un nombre entier k (positif ou négatif).

L'intégrale y de (1), passant par un point M_k , est développable en série convergente au voisinage de $x=0$:

$$(2) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

dont le coefficient de x^n est multiple entier du coefficient de x^n dans le développement taylorien de e^x ; le rapport de ces deux coefficients est un entier ne croissant pas, en valeur absolue, plus vite que n^n .

En effet, le second membre de (1) étant holomorphe au voisinage de $x = 0, y = k$, l'intégrale y passant par le point M_k est développable en série (2) où $a_0 = k$ et

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{n!} [f_{n-1}]$$

les f_i étant les termes de la suite indéfinie de fonctions de x, y

$$(4) \quad f_1, f_2, f_3, \dots$$

définies par la relation de récurrence

$$(5) \quad f_i = \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x} + f \frac{\partial y}{\partial f_{i-1}}$$

avec

$$f_0 = f(x, y) \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

où, d'une manière générale, $[\varphi(x, y)]$ désigne le nombre obtenu en faisant $x = 0, y = k$, dans $\varphi(x, y)$.

Les fonctions (4) définies de cette manière sont des polynomes en x, y à coefficients nombres entiers. Les nombres (f_i) sont des entiers, de sorte que

$$(6) \quad A_n = \frac{\mu_n}{n!}.$$

D'autre part, le rayon de convergence de la série (2) étant différent de zéro, la lim. sup. de $\sqrt[n]{|a_n|}$ pour n augmentant indéfiniment est finie, ce qui montre que $\sqrt[n]{|\mu_n|}$, n'augmente pas plus vite que $\sqrt[n]{n!}$ c'est à dire que n . Il s'en suit que la valeur absolue de μ_n n'augmente pas plus vite que n^n , comme il fallait montrer.

La formule (6) met également en évidence le fait suivant :

Réduit à sa plus simple expression, le coefficient taylorien a_n de l'intégrale y est un nombre rationnel dont le dénominateur n'a pour diviseur aucun nombre premier supérieur à n .

Une série taylorienne, dont un ou plusieurs coefficients sont des nombres irrationnels, ou bien rationnels, mais dont le dénominateur est divisible par un nombre premier supérieur au rang du coefficient, ne peut, pour aucune équation différentielle (1), représenter le courbe intégrale passant par un point M_k .

On peut aussi remarquer que dans le cas où y est une fonction entière de x , l'entier μ_n ou bien n'augmente pas, ou bien augmente moins vite que n^n . Car dans ce cas $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers zéro lorsque x augmente indéfiniment.

2. Envisageons le cas où l'intégrale y est fonction algébrique de x . L'entier μ_n jouit alors de la propriété arithmétique suivante :

Il existe un nombre entier fixe λ rattaché à l'équation (1), tel que l'entier μ_n sera divisible par le produit de tous les entiers ne surpassant pas n et ne coïncidant avec une puissance d'aucun diviseur premier de λ .

Pour le faire voir, rappelons que, y étant fonction algébrique à coefficients a_n commensurables, il existe un entier fixe λ (l'entier d'Eisenstein) tel que le produit

$$(7) \quad a_n \lambda^n = \frac{\mu_n \lambda^n}{n!}$$

soit un nombre entier pour tout indice $n = 1, 2, 3 \dots$

Or, λ^n n'est jamais divisible par $n!$, car dans cette factorielle il y a toujours au moins un facteur nombre premier qui n'y entre qu'une seule fois, tandis que dans λ^n il figurerait n fois. Mais λ^n peut avoir des diviseurs communs avec $n!$. La fraction (7) devant se réduire à un nombre entier, μ_n doit être divisible par le produit de tous les entiers figurant comme facteurs dans $n!$, après y avoir supprimé ces diviseurs communs, ce qui démontre l'assertion précédente.

Le théorème d'Eisenstein conduit également à la conclusion suivante :

Le coefficient de x^n de l'intégrale y , pour $n = 1, 2, 3 \dots$ est multiple entier du coefficient de x^n dans le développement de la fonction

$$\frac{x}{\alpha - x}$$

α étant un entier convenablement déterminé; le rapport de ces deux coefficients est un entier ne croissant pas, en valeur absolue, plus vite que la n -ième puissance d'un nombre fixe.

Car le produit $a_n \lambda^n$ étant un nombre entier h_n on a

$$a_n = \frac{\lambda^n}{h_n}$$

h_n étant le coefficient de x^n de la fonction $\frac{x}{\lambda - x}$. D'autre part, le rayon de convergence de y au voisinage de $x = 0$ étant différent de zéro, l'expression

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\lambda} \sqrt[n]{|h_n|}$$

et par suite aussi la lim. sup de $\sqrt[n]{|h_n|}$ est finie, ce qui montre que h_n ne croit pas, en valeur absolue, plus vite que la n -ième puissance d'un nombre fixe.

On en conclut, d'après un théorème que j'ai démontré dans un travail antérieur ⁽¹⁾ que l'intégrale y appartient à la classe de fonctions qui se laisse déterminer sans ambiguïté par la seule valeur numérique d'une certaine intégrale définie rattachée à la fonction, la valeur de cette intégrale étant un nombre absolu.

3. Considérons maintenant la valeur inverse $\frac{1}{y}$ de l'intégrale y de l'équation (1), passant par un point M_k . En posant

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

on a la suite connue de relations déterminant les b_n au moyen des a_n .

Pour le point M_1 le coefficient a_0 est égal à 1 et l'on a

(1) M. Petrovitch: *Théorème sur les fonctions algébriques à coefficients tayloriens commensurables* (Revue mathématique de l'union interbalcanique t. I. fasc. 1, 1936.)

$$\begin{aligned}
 b_0 &= 1 \\
 b_1 &= -a_1 \\
 b_2 &= -a_2 + a_1^2 \\
 (8) \quad b_3 &= -a_3 + 2a_2a_1 - a_1^3 \\
 b_4 &= -a_4 + 2a_3a_1 + a_2^2 - 3a_2a_1^2 + a_1^4 \\
 b_5 &= -a_5 + 2a_4a_1 + 2a_3a_2 - 3a_3a_1^2 - 3a_2^2a_1 + 4a_2a_1^3 - a_1^5
 \end{aligned}$$

où l'on a les lois suivantes de formation :

1^o b_n se compose de tous les termes de poids n que l'on peut former avec les a_i jusqu'à a_n inclusivement ;

2^o ces termes sont positifs ou négatifs selon que le nombre de leurs facteurs est pair ou impair ;

3^o le coefficient de chaque terme est le coefficient polynomial que ce terme aurait en égard au nombre des facteurs qu'il contient et à leurs exposants.

Pour un point quelconque M_k on ramène le cas à celui du point M_1 en remplaçant a_n par $\frac{a_n}{k}$ et divisant par $a_0 = k$ le resultat obtenu. Donc :

Le premier coefficient b_0 étant égal à $\frac{1}{K}$, le coefficient b_n s'obtient en formant la même expression pour ce coefficient que dans le cas du point M_1 , en la rendant de degré n à l'aide du facteur $a_0 = k$ et en la divisant ensuite par $a_0^{n+1} = k^{n+1}$. Par exemple on aura

$$b_5 = \frac{1}{K^6} (-a_5k^4 + 2a_4a_1k^3 + 2a_3a_2k^3 - 3a_3a_1^2k^2 - 3a_2^2a_1k^2 + 4a_2a_1^3k - a_1^5)$$

Si l'on y remplace a_i par son expression (6), on obtient le coefficient b_n sous la forme d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est le produit de k^{n+1} par diverses factorielles

$$1!, 2!, 3!, \dots n!$$

ayant comme exposants des nombres entiers ne surpassant pas n . Il s'en suit que :

Réduit à sa plus simple expression, le coefficient de x^n de l'inverse $\frac{1}{y}$ de l'intégrale y de (1), passant par un point M_k , est un nombre rationnel dont le dénominateur n'a pour diviseur aucun nombre premier plus grand que n ne coïncidant pas avec un diviseur de k .

Ou voit également que le dénominateur de chaque terme composant b_n , avant la réduction de la fraction rationnelle à sa plus simple expression, est le produit de puissances de diverses factorielles

$$i!, j!, h!, \dots$$

des entiers i, j, h, \dots égaux aux indices des a_k dont provient ce terme, chacune de ces factorielles figurant avec un exposant égal à celui de a_k correspondant. De plus,

1° la puissance d'une factorielle étant comptée comme facteur autant de fois que l'indique son exposant, le nombre de ces facteurs est égal à n ;

2° la somme $i + j + k + \dots$ d'entiers dont les factorielles figurent dans ce dénominateur est également égale à n .

Il s'en suit qu'une factorielle $m!$ ne peut figurer au dénominateur de b_n plus de fois qu'il y a d'unités dans la partie entière du nombre $\frac{n}{m}$. Ceci permet d'assigner une limite supérieure au nombre indiquant combien de fois un nombre premier peut figurer comme diviseur dans ce dénominateur.

Je terminerai en faisant remarquer que l'équation de Riccati (avec ses dégénérescences) est la seule équation (1) qui par le changement $y = \frac{1}{z}$ se transforme en une équation (1). Pour l'intégrale y d'une telle équation, passant par le point M_1 , le coefficient de x^n du développement non seulement de l'intégrale elle-même, mais aussi du celui de son inverse $\frac{1}{y}$, est un nombre rationnel dont le dénominateur, réduit à sa plus simple expression, n'a pour diviseur aucun nombre premier supérieur à n ; son numérateur est un entier qui ne croît pas plus vite que n^n . On en tire aussi des conclusions analogues aux précédentes pour le cas des intégrales algébriques d'une telle équation différentielle.