SOBRE LAS SERIES DE POTENCIAS DESORDENADAS Y LA HIPERCONVERGENCIA DE UNA CLASE DE SERIES DE DIRICHLET

por SIXTO RIOS (MADRID)

1.—El problema fundamental de la teoría de la hiperconvergencia de las series de Dirichlet, consistente en la caracterización de las series que poseen sucesiones hiperconvergentes, puede abordarse limitando previamente el tipo de sucesiones de exponentes, con lo que es posible obtener soluciones completas o casi completas, que al ampliar los tipos de sucesiones cabe esperar que conduzcan a la solución del problema general.

Este es el camino iniciado por W. Bernstein ([1]) quien ha hecho un profundo estudio de la hiperconvergencia de las series de Dirichlet, limitándose a aquellas cuyas sucesiones de exponentes poseen densidad máxima finita, aunque sin llegar a la solución completa del problema para dichas series.

En el § 3 de esta nota resolvemos completamente el citado problema para una clase de sucesiones de exponentes que, como veremos, contiene sucesiones de densidad máxima infinita, pero sin comprender totalmente la clase estudiada por Bernstein, con la cual está en relación de imbricación.

Para llegar a dicha solución hemos utilizado las que llamamos series de potencias desordenadas, cuyas primeras propiedades se exponen en el § 2 de esta nota.

Este estudio me ha sido sugerido por mi querido maestro Sr. Rey Pastor ([2]).

2.—Llamamos series de potencias desordenadas a las del tipo

$$\Sigma\, a_n\, z^{\lambda_n} \qquad [1]$$

en que (λ_n) es una sucesión de números enteros positivos. Pueden considerarse tres tipos: A) la sucesión (λ_n) tiene como punto límite el infinito, y solo éste; p. ej.:

$$2, 2, 1, 4, 4, 3, \ldots, 2\,n, 2\,n, 2\,n-1, \ldots$$

B) la sucesión (λ_n) es acotada; C) la sucesión (λ_n) tiene como puntos de acumulación el infinito y otros.

Como vamos a ver, las series de potencias desordenadas tienen propiedades muy análogas a las series de Dirichlet y vienen a ser un paso intermedio entre éstas y las series de Taylor (3).

Nos referimos en lo que sigue a las series del tipo *A)* que son las que utilizamos en el § 3.

He aquí las propiedades primeras de estas series:

I. *Si la serie* [1] *converge en el punto* z_0 *converge para todo* z, *tal que* $|z| < |z_0|$.

No vale aquí el razonamiento que corrientemente se emplea para las series potenciales ordinarias, ya que utiliza la convergencia de la serie Σz^{λ_n} cuyos exponentes son los mismos de la [1] y los coeficientes iguales a la unidad, cosa que aquí falla La demostración se hace fácilmente mediante el lema de Abel con un camino paralelo al seguido corrientemente en las series de Dirichlet (4).

De aquí, por un razonamiento conocido, resulta que puede ocurrir:

a) *la serie converge para todo valor de* z; b) *la serie no converge para ningún valor de* z; c) *existe un número* R, *tal que la serie converge para* $|z| < R$ *y no para* $|z| > R$.

Para las series de tipo *B)* se demuestra directamente que solo se presentan los casos a) y b): tienen radio infinito o nulo.

II. Análogamente se definen los *radios de convergencia absoluta, de convergencia uniforme, de hiperconvergencia, etc.*

Directamente es fácil demostrar en general para los tipos *A), B)* y *C)* la existencia de un círculo de convergencia absoluta, y en particular para el tipo *B)* que, o tienen radio infinito o radio nulo.

III. *Si la serie* [1] *converge para* $z = z_0$, *converge uniformemente en todo círculo* $|z| \leqq \alpha$, *siendo* $\alpha < |z_0|$.

La demostración es análoga a la que se sigue para las series de Dirichlet y de esta propiedad resulta inmediatamente que *la serie* [1] *define una función holomorfa en su círculo de convergencia y la serie se puede derivar término a término.*

IV. Radio de convergencia:

Si la serie $\Sigma\, a_n$ *es divergente, es:*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \sum_{1}^{n} a_n \right|^{1/\lambda_n}$$

Si la serie $\Sigma\, a_n$ es convergente, es:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{n+1}^{\infty} a_n \right|^{1/\lambda_n}$$

Análogas fórmulas valen para la convergencia absoluta sustituyendo la serie $\Sigma\, a_n$ por la de sus valores absolutos.

V. *El radio de holomorfía* se define como el límite superior H de los números h tales que $f(z)$ es holomorfa en el interior del círculo de radio h.

Por camino análogo al expuesto en mi tesis (5) para la obtención de la abscisa de holomorfía en las series de Dirichlet e integrales *(LS)* se llega aquí a la fórmula:

$$H = e^{-k}\, e^{l}$$

donde k es un número positivo cualquiera y

$$l = \lim.\ \inf. \left[k : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{K} \right] (-\infty < t < \infty)$$

$$K = \Sigma \left(\frac{\lambda_m\, k\, e}{n} \right)^{n} a_m\, z^{-\lambda_m (k+it)}$$

extendida desde $n\,(1 - \mu'_n) : k$ hasta $n\,(1 - \mu''_n) : k$, siendo

$$0 < \mu \leq \mu_n' < 1\,,\ \ 0 < \mu \leqq \mu_n''\,,$$

(μ es un número arbitrariamente pequeño pero fijo).

Con un ejemplo vamos a ver que en estas series de potencias desordenadas (tipo A) pueden ser diferentes los radios de convergencia ordinaria, absoluta y de holomorfía, lo que pone de manifiesto gran analogía con las series de Dirichlet.

La serie de potencias desordenada:

$$z - z + z + (^3/_2 + e^{-1})\, z - {}^3/_2\, z + \ldots\ldots + (-1)^{n+1} z^n +$$
$$+ (-1)^n z^n + \ldots\ldots \pm z^n + (3^n/2^n + e^{-n}) z^n - 3^n/2^n\, z^n + \ldots\ldots$$

tiene distintos radios de convergencia ordinaria y absoluta, y además, no tiene ningún punto singular la función definida por la serie sobre la circunferencia de convergencia ordinaria de ésta. En efecto, utilizando las fórmulas precedentes, o mejor mediante artificios fáciles, se comprueba que el radio de convergencia absoluta de la serie es $1/_3$, el de convergencia ordinaria $^3/_2$ y el punto singular más próximo es el $z = -1$.

Hasta aquí hemos visto que las series consideradas tienen propiedades más próximas a las series de Dirichlet que a las de Taylor. Vamos a ver ahora algunas propiedades en que difieren de las series de Dirichlet.

Yo he demostrado ([6]) la existencia de series de Dirichlet cuyas abscisas de holomorfía e hiperconvergencia no coinciden. Pues bien, según se demuestra más adelante *para las series de potencias desordenadas las circunferencias de holomorfía e hiperconvergencia coinciden necesariamente.*

Aronszajn ([7]) ha construído series de Dirichlet que no tienen ningún punto singular sobre la recta de holomorfía. Por el contrario, se demuestra que la función definida por *una serie de potencias desordenadas del tipo A) tiene un punto singular, al menos, sobre la circunferencia de holomorfía.*

En lo que sigue nos limitamos a considerar dentro del tipo *(A)* las sucesiones que llamaremos del tipo *(A')* que son las sucesiones monótonas no decrecientes del tipo *(A)*; p. ej.:

$$1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, \ldots\ldots$$

En una serie del tipo *(A')* no coinciden necesariamente los círculos de convergencia e hiperconvergencia, lo que constituye una diferencia esencial con las series de Taylor y una analogía con las series de Dirichlet. Ejemplo de esto es la siguiente serie:

$$1 + z - 2z + 2z + z^2 - 4z^2 + 4z^2 +$$
$$\ldots\ldots + z^n - 2^n z^n + 2^n z^n + \ldots\ldots$$

cuyo radio de convergencia es $\frac{1}{2}$ y, agrupando los conjuntos de términos de igual exponente se ve que el radio de hiperconvergencia es 1.

El problema de la caracterización de las series con sucesiones hiperconvergentes, resuelto por Ostrowski ([8]) para las series de Taylor, se resuelve en las series de potencias desordenadas del tipo (A') mediante el siguiente teorema:

VI. a) *Si en una serie de potencias desordenadas del tipo (A'):* $f(z) = \Sigma\, a_n z^{\lambda_n}$*; de radio de convergencia 1, los círculos de hiperconvergencia y holomorfía no se confunden, la corona comprendida entre ellos es un dominio de hiperconvergencia.*

b) *Si una sucesión parcial es hiperconvergente en el entorno de un punto regular de la circunferencia de holomorfía es*

$f(z) = g(z) + h(z)$ *donde* $g(z)$ *tiene radio de holomorfía mayor y* $h(z)$ *tiene lagunas de longitud relativa inferiormente acotada.*

Se comienza probando que a cada serie desordenada corresponde una serie ordenada que representa la misma función analítica y tal que el círculo de holomorfía de la primera coincide con el de convergencia de la segunda, y entonces se aplican los teoremas de Ostrowski citados.

3.—Pasamos ahora a la parte principal de esta nota relativa al estudio de la hiperconvergencia de una clase de series de Dirichlet.

La clase [9] que consideramos se caracteriza porque las sucesiones de exponentes (λ_{nk}) son tales que:

$$\lim_{\lambda_{n_k} \to \infty} \frac{1}{n} \log |\gamma + \beta n - \lambda_{n_k}| = -\infty ; \qquad [2]$$

$$n = 1, 2, \ldots \text{ ad. inf} ; \quad k = 1, 2, \ldots, k(n).$$

Desde luego existen sucesiones de densidad máxima infinita dentro de la clase considerada como se comprueba en la sucesión:

$$1, 1 + e^{-1}, 2, 2 + e^{-2}, \ldots\ldots, \; n, n + e^{-n^{n}}, n + e^{-n^{(n-1)}}, n + e^{-n^{(n-2)}}, \ldots\ldots,$$

$$n + e^{-n^2}, n + e^{-n}, n + 1, \ldots.$$

Por esto tiene gran interés la clase estudiada.

Es inmediato ver también que no todas las sucesiones de densidad máxima finita pertenecen a esta clase.

El problema de la caracterización de las series hiperconvergentes dentro de esta clase lo resuelve completamente el siguiente teorema:

VII. a) *Si para una serie de Dirichlet* $f(s) = a_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} s}$ *de abcisa de convergencia nula cuya sucesión de exponentes verifica la condición* [2], *las rectas de hiperconvergencia y holomorfía no se confunden, la banda vertical comprendida entre ellas es un dominio de hiperconvergencia.*

b) *La serie de polinomios exponenciales obtenida agrupando los conjuntos de términos cuyos exponentes pertenecen al entorno de cada número* $\gamma + \beta n$ *converge uniformemente en cada dominio acotado interior al semiplano de holomorfía.*

c) *Si una sucesión parcial es hiperconvergente en el entorno de un punto de la recta de holomorfía es* $f(s) = g(s) + h(s)$

donde g(s) *tiene abscisa de holomorfía menor y* h(s) *lagunas de longitud relativa inferiormente acotada.*

El método de demostración consiste en asociar a la serie de Dirichlet dada la serie de iguales coeficientes cuyos exponentes son $-(\gamma + \beta_n)s$; esta nueva serie define una función $\varphi(s)$ que difiere de $f(s)$ en una función entera (10). El estudio de la hiperconvergencia de la serie dada queda así reducido al de la nueva serie, el cual se reduce à su vez al de la serie de potencias con iguales coeficientes, hecho ya en el teorema VI del § 2.

Se observa la diferencia esencial con los resultados de Bernstein relativos a las series de Dirichlet de densidad máxima finita ya que aunque las partes *a)* y *b)* han sido demostradas para éstas, no se sabe si es cierta en general para las series de Dirichlet de densidad máxima finita la parte recíproca *c)*.

---

(1) Leçons sur les progrés récents de la theorie des séries de Dirichlet (Colec. Borel, París, 1933).

(2) Rey Pastor. - Series e integrales D. (Curso dictado en la Universidad de Madrid, 1932-33) - Madrid 1933.

(3) Análogamente se pueden definir y estudiar las series de Dirichlet desordenadas en que los números λ forman cualquier sucesión de números reales positivos, distinguiéndose los mismos tres casos A), B), C) que para las series de potencias desordenadas las mismas propiedades I a V expuestas en esta nota para las series de tipo A). Podríamos haber hecho la exposición en esta forma más general, pero como nuestro objeto es la aplicación hecha en el § 3, hemos prescindido de ello.

(4) Rey Pastor. - Series e integrales D - Madrid - Buenos Aires, 1926.

(5) Problemas de hiperconvergencia (Rev. Acad. Cienc., t. 33, p. 59).

(6) Sobre la hiperconvergencia de las series de Dirichlet de densidad máxima infinita (Rev. de la Unión Matemática Argentina, vol. I, pág.

(7) Une remarque sur les singularités des séries de Dirichlet (C. R. t. 1930, 1931).

(8) Ueber eine Eingenschaft gewisser Potenzreihen (Sitz. der. Preuss. Akad. 1921, p. 597). Ueber Potenzreihen, die ueberkonvergente Abschnittfolgen besitzen (Id. 1923, p. 185).

(9) Esta clase comprende desde luego a la considerada en mi tesis para la que se resolvió allí el problema de la hiperconvergencia lagunar (Capítulo II).

(10) La demostración es análoga a la dada en mi tesis (Cap. II) para el problema de la hiperconvergencia lagunar.

(Original recibido en Enero de 1938).