A. González Domínguez

Una nueva demostración del teorema límite del Cálculo de Probabilidades

Condiciones necesarias y suficientes para que una función sea una Integral de Laplace

UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA

Publicación núm. 4

BUENOS AIRES

1938

UNA NUEVA DEMOSTRACION DEL TEOREMA LIMITE DEL CALCULO DE PROBABILIDADES. *

por ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ

I. *Teorema.*—Sea una sucesión de leyes de probabilidad $g_n(t)$, y una ley $g(t)$. Para que se verifique

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = g(t)$$

en todo punto de continuidad de $g(t)$, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad

$$\lim \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\, g_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\, g(t)\,.$$

Este teorema, generalización del clásico teorema límite de P. Lévy (1), ha sido recientemente demostrado por V. Glivenko (2). Posteriormente han dado de él nuevas demostraciones el mismo Lévy en su reciente libro *(Théorie de l'adition des variables aleatoires,* pág. 49), y por Cramer (*Random variables and probability distributions,* Cambridge, 1937, pág. 29, y pág. 121).

En esta nota damos una nueva demostración del teorema de Glivenko, que, aunque es menos directa que la de Lévy, Cramer, y el mismo Glivenko, es tanto o más breve que la de esos autores, y tiene, a nuestros ojos, la ventaja de que hace resaltar la íntima razón de ser del teorema, al ponerlo en relación con un campo muy estudiado, a saber, las series de Fourier de las funciones monótonas.

II. En el año 1920 demostró Carathéodory (3) el siguiente teorema:

Sea $g_k(t)$, $0 \leqq t < 2\pi$, una sucesión de funciones no decrecientes uniformemente acotadas, y $g(t)$ una función mo-

---

* Una versión francesa, abreviada, de esta nota, ha aparecido en los "*Comptes Rendus*", de la Academia de Ciencias de París, Vol. 203, 1936.

(1) P. Lévy, *Calcul des Probabilités,* París, 1925.

(2) *Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari,* 1936, pp. 160-167.

(3) Carathéodory C.: *Uber die Fourierschen Koeffizienten monotoner Funktionen,* Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, 30, 1920, pp. 559-573.

nótona no decreciente. La condición necesaria y suficiente para que se verifique, para $k \to \infty$.

$$g_k(t) \to g(t)$$

en todo punto de continuidad de $g(t)$, es que, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ y $k \to \infty$, se cumplan las igualdades

$$lim \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} F_k(t)\, d\, t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} F(t)\, d\, t\,. \qquad [1]$$

Como se ve, el teorema de Lévy-Glivenko no es otra cosa que el correlativo del teorema de Carathéodory, para integrales de Fourier-Stieltjes.

Carathéodory utiliza en su demostración (luminosa y profunda, como toda la producción de este ilustre matemático, que hace honor a su ascendencia helénica), tres instrumentos fundamentales: 1º) un teorema de selección de Helly (4). Este teorema es el siguiente:

Dada en un intervalo $a \leqq x \leqq b$ una sucesión de funciones $[F_n(x)]$ de variación uniformemente acotada, o bien existe una sucesión parcial uniformemente acotada $[F_k(x)]$, que converge en todos los puntos hacia una función $F(x)$ de variación acotada, o bien $[F_n(x)]$ diverge uniformemente a ∞, para $n \to \infty$;

2º) el conocido teorema de paso al límite bajo el signo de integral, debido a Lebesgue;

3º) el teorema de unicidad de las series trigonométricas.

Si se quiere demostrar el teorema de Glivenko siguiendo las huellas de Carathéodory, es natural buscar correlativos, para el intervalo infinito, de los tres teoremas anteriores.

Estos correlativos existen efectivamente.

El primer teorema subsiste sin modificación. El segundo tiene el siguiente correlativo, debido a Bochner (5):

Teorema 2'.—Sea $[F_n(t)]$ una sucesión de leyes de probabilidad que convergen hacia una ley de probabilidad $F(t)$ en todos los puntos de continuidad de esta última: si se verifica, para $n \to \infty$

$$lim \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\, F_n(t) = A\ (x)$$

---

(4) Helly E., *Uber lineare Funktionaloperationen*; Wiener Berichte, 121, (1912), pp. 265-297.

(5) Bochner S.—*Vorlesungen uber Fourierschen Integrale*, Leipzig, 1932, pág. 71.

siendo $A\ (x)$ una función continua, también será posible pasar al límite bajo el signo de integral:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\, F_n\ (t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\, F\ (t)\ .$$

El tercer teorema (de unicidad) admite el siguiente correlativo, también debido a Bochner. (6):

Teorema 3'.—Condición necesaria y suficiente para que se verifique

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\, g\ (t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\, h\ (t)$$

es que las respectivas funciones de probabilidad sean iguales:

$$g\ (t) \equiv h\ (t)\ .$$

III. Una vez en posesión de estos tres correlativos, el teorema límite puede demostrarse siguiendo paso a paso la demostración de Carathéodory.

La condición es necesaria. Esta parte de la demostración no ofrece ninguna novedad con respecto a las conocidas, y por lo tanto la omitimos.

La condición es suficiente. Supongamos, en efecto, que se verifique, y que exista un punto a, de continuidad de $g\ (t)$, y en el cual $g_n\ (a)$ no converja hacia $g\ (a)$. Existirá entonces una sucesión parcial $[g_k\ (t)]$, tal que, para $k \to \infty$,

$$\lim g_k\ (a) = \mathrm{L} \neq g\ (a)\ .$$

De acuerdo con el teorema de Helly, enunciado en la pág. 2, se podrá extraer de la sucesión $[g_k\ (t)]$ una sucesión parcial $[g_s\ (t)]$, que converge hacia una función acotada no decreciente $h\ (t)$, en todos los puntos de continuidad de esta última. Es bien sabido que la función $h\ (t)$ puede normalizarse de manera de tener

$$h\ (t) = \frac{1}{2} \left\{ h\ (t+0) + h\ (t-0) \right\}.$$

La sucesión de funciones características

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\, g_s\ (t)\ ,$$

(6). Bochner, loc. cit. (5), pág. 67.

tiende, en virtud de la hipótesis, hacia una función continua (a saber, la función

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\, g\,(t)\,)\;.$$

Esta sucesión cumple las condiciones exigidas por el teorema 2' de Bochner, de donde se deduce, para $s \rightarrow \infty$:

$$lim \int e^{itx}\, d\, g_s\,(t) = \int e^{itx}\, d\, h\,(t) = \int e^{itx}\, d\, g\,(t)\;.$$

Por lo tanto, apelando al teorema 3' de unicidad, se deduce que

$$g\,(t) \equiv h\,(t)\;.$$

Se tendrá, pues, para $s \rightarrow \infty$,

$$lim\; g_s\,(t) = g\,(t)$$

en todo punto de continuidad de $g\,(t)$, y, en particular,

$$lim\; g_s\,(a) = g\,(a)\;.$$

Pero, como $[g_s\,(t)]$ es una sucesión parcial de $[g_k\,(t)]$, se tendrá también

$$\lim_{s\rightarrow\infty} g_s\,(a) = \lim_{k\rightarrow\infty} g_k\,(a) = L \neq g\,(a)\;.$$

Pero esta igualdad es incompatible con la anterior, y el teorema queda, pues, demostrado.

IV. Como acabamos de ver, el teorema límite se demuestra de manera sumamente sencilla, utilizando las ideas fundamentales de Carathéodory. Pero hay más. La demostración más general conocida (y en cierto sentido definitiva), que han dado recientemente los señores Fréchet-Shoat (7) del llamado Segundo Teorema límite del Cálculo de Probabilidades de Chebicheff-Liapunoff coincide, esencialmente, con la de Carathéodory. La diferencia estriba en que, en vez de utilizar el teorema de unicidad para integrales de Fourier-Stieltjes, exigen, para asegurar la unicidad, que un cierto problema de momentos esté determinado. Y también pueden demostrarse fácilmente, con el método de Carathéodory, las versiones del teorema límite da-

(7) Fréchet-Shoat.—A generalized statement of the second Limit-theorem of the theory of Probability. - Transact. Amer. Math. Soc., 1931

das por Jacob (8), según demostraremos con todo detalle en otro lugar.

De todo lo anterior se deduce que la idea de Carathéodory permite demostrar de manera simple, uniforme y general las diferentes versiones del segundo teorema límite, y que aunque no haya expresado su idea en términos de Cálculo de Probabilidades, es justo asociar su nombre al de los grandes promotores de esta disciplina.

(8) Jacob, Comptes Rendus, 188, (1929), p.p. 541-543, y 754-757.

Seminario Matemático de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, abril de 1938.

CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES PARA QUE UNA FUNCION SEA UNA INTEGRAL DE LAPLACE.

por Alberto González Domínguez

I. INTRODUCCION

Widder (1) y Doetsch (2), han establecido condiciones necesarias y suficientes para que una función $F(x)$ sea representable por una integral de Laplace:

$$F(z) = \int e^{-zt} g(t)\, dt, \qquad [1]$$

o por una integral de Laplace-Stieltjes:

$$F(z) = \int^{(3)} e^{-zt} d\, g(t) \qquad [2]$$

con $g(t)$ de variación acotada en $[0, \infty]$.

El original método de Widder se basa en la introducción del operador

$$L_{k,t}(F(x)) = \frac{(-1)^k}{k!} F^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right)\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} \quad [k = 1, 2 \ldots]$$

el cual, si $F(x)$ tiene la forma (1), es una *integral singular:*

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{L}_{k,t}[F(x)] = g(t).$$

El método de Doetsch se basa en la consideración de las propiedades de la integral de Fourier, (las integrales 1 y 2 se convierten en integrales de Fourier, para $z = i x$), y es aplicable sólo a integrales de la forma 1.

En este trabajo abordamos el problema por un nuevo método, cuya idea fundamental exponemos a continuación. Si en la

(1) Widder, 1. (Ver la bibliografía al final).
(2). Doetsch, 1.
(3) Las integrales que no llevan indicación de extremos deben suponerse extendidas entre 0 y ∞; y las sumatorias, de 0 a ∞.

integral 2 ponemos $e^{-t} = s$, $g(t) = -f(e^{-t})$, él toma la forma

$$F(z) = \int_0^1 s^z \, d f(s) \, .$$

Así transformada la integral 1, se advierte en seguida que el problema de la representabilidad de funciones por integrales de Laplace es el correlativo continuo, del *problema de los momentos para intervalo finito,* resuelto por Hausdorff (4), que consiste, como es sabido, en establecer las condiciones necesarias y suficientes a que debe satisfacer una sucesión de números $[c_n]$, para que se verifique

$$c_n = \int_0^1 s^n \, d f(s), \qquad [n = 0, 1, 2, ...] \, .$$

Ahora bien, los teoremas establecidos por Hausdorff, en un apéndice a su citada memoria (5), (apéndice que por ser tal y por estar las demostraciones muy condensadas no ha recibido quizás la atención que merecía), permiten llegar sin mayor esfuerzo a la siguiente conclusión: el problema de los momentos es equivalente al siguiente:

Dada una serie de polinomios de Legendre

$$\Sigma \, c_n \, P_n(x) \, ,$$

¿cuál es la condición necesaria y suficiente para que se verifique

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} P_n(x) \, f(x) \, dx \ ?$$

Es decir, que el problema de los momentos de Hausdorff, es esencialmente equivalente al problema de las clases para la serie de polinomios de Legendre.

Esta equivalencia, y el hecho, anteriormente apuntado, de la correlación entre el problema de los momentos y la representabilidad de una función por medio de integrales de Laplace, nos llevó a pensar que *este último problema debía ser equivalente al problema de las clases para las series de funciones de Laguerre,* que contituyen un sistema ortonormal en $[0 \ \infty]$. Efectivamente, así sucede, como luego demostraremos. Comenzaremos por re-

---

(4) Hausdorff, 1.

(5) Loc. cit. 4, *Zusætze bei der Korrektur,* p.p. 246-248.

solver el problema de las clases para las series de funciones de Laguerre, apoyándonos para ello en los teoremas de la teoría general de las series ortogonales.

Todos los teoremas de este trabajo han sido enunciados en una nota publicada en los *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* de París (ver en la bibliografía: González Domínguez, 1).

II. EL PROBLEMA DE LAS CLASES

1) Sea la serie de funciones de Laguerre

$$\Sigma\, a_n\, \varphi_n\,(t) \qquad [3]$$

donde

$$\varphi_n\,(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-t)^k}{k!} .$$

es la función de Laguerre de orden n, y

$$|\, a_n \,| < C \quad (n = 0, 1, \ldots\ldots) .$$

Introduzcamos la función

$$g\,(r, t) = \Sigma\, a_n\, \varphi_n\,(t)\, r^n \quad (0 \leqq r < 1) .$$

Se verifican entonces los teoremas siguientes, que resuelven el problema de las clases para las categorías de funciones consideradas.

Teorema I.—Para que los coeficientes de la serie [3] tengan la forma

$$a_n = \int \varphi_n\,(t)\, f\,(t)\, d\,t \quad (n = 0, 1 \ldots\ldots) , \qquad [4]$$

con $f\,(t)$ sumable en $[0, \infty]$, es necesario, y suficiente que se verifique, para $r \to 1$, $r' \to 1$:

$$lim \int |\, g\,(r, t) - g\,(r', t)\,|\, d\,t = 0 . \qquad [5]$$

Teorema II.—Para que los coeficientes de la serie [3], tengan la forma [4], con $f\,(t)$ de enésima potencia sumable ($n > 1$) en $(0, \infty)$, es necesario y suficiente que se verifique

$$\int |\, g\,(r, t)\,|^n\, d\,t < M \quad (0 \leqq r < 1) \qquad [6]$$

Teorema III.—Para que los coeficientes de la serie [3] tengan la forma

$$a_n = \int \varphi_n(t)\, d\, f(t) \qquad [7]$$

con $f(t)$ de variación acotada en $(0, \infty)$, es necesario y suficiente que se verifique

$$\int |\, g(r, t)\,|\, d\, t < M \qquad (0 \leqq r < 1)\,. \qquad [8]$$

Teorema IV.—Para que los coeficientes de la serie [3] tengan la forma [7], con $f(t)$ de variación acotada y continua, es necesario y suficiente que se verifique la condición [8], y además la siguiente:

$$\lim_{r \to 1} 2\,(\pi\, t)^{1/2}\,(1 - r)^{1/2}\, g\,(r, t) = 0\,.$$

Teorema V.—Para que los coeficientes de la serie [3] tengan la forma [7], con $f(t)$ monótona no decreciente en $(0, \infty)$, es necesario y suficiente que se verifique la condición [8] y además la siguiente:

$$g\,(r, t) \gtreqqless 0 \qquad (0 \leqq r < 1)\,.$$

2) Los teoremas I — V se demuestran utilizando idéntico procedimiento al que hemos seguido en otro lugar ([6]) para demostrar análogos resultados para las series de funciones de Hermite. Como allí hemos dado las respectivas demostraciones con todo detalle, no volveremos a repetirlas ahora, y nos limitaremos a consignar los resultados fundamentales correlativos a los utilizados en nuestra memoria citada.

Al teorema A y siguientes de nuestra memoria (6), corresponden, en las demostraciones de los teoremas I — V, los teoremas siguientes.

Teorema VI ([7]).—Se verifica:

$$\Sigma \varphi_n(x)\, \varphi_n(t) =$$

$$= (1 - r)^{-1} I_0\left(2 (x t r)^{1/2} (1 - r)^{-1}\right) . \, exp\left(-\frac{(x + t)}{2}\,(1 + r)/1 - r\right) \quad [9]$$

donde $I_0\,(s)$ es la función de Bessel de orden 0, de variable imaginaria, igual a $J_0\,(i\, s)$.

([6]) González Domínguez, 1.

([7]) Este teorema es de Watson, 1.

Teorema VII.—La función positiva

$$k(t, x, r) = \Sigma \varphi_n(x) \varphi_n(t) r^n$$

goza de las siguientes propiedades, que hacen de ella un núcleo positivo de una integral singular.

$$\int k(t, x, r)\, dt = \frac{2}{1+r} exp \left\{ -\frac{x}{2}\left(\frac{1-r}{1+r}\right) \right\}, \qquad [10]$$

y análogamente

$$\int k(t, x, r)\, dx = \frac{2}{1+r} exp \left\{ -\frac{t}{2}\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \right\} \qquad [11]$$

Para $r \to 1$ se verifica

$$lim \int_0^{x-\delta} k(t, x, r)\, dt = 0, \qquad [12]$$

$$lim \int_{x-\delta}^{\infty} k(t, x, r)\, dt = 0 \qquad [13]$$

La propiedad [10] (y su análoga la [11] se demuestra fácilmente recurriendo a la siguiente fórmula de Gegenbauer [10]:

$$\int J_0(a y)\, exp(-p^2 y^2) y \cdot d y = (2 p^2)^{-1} exp(-a^2/4 p)^2 \qquad [14]$$

Si hacemos en esta fórmula el cambio de variable $y = \sqrt{t}$, y elegimos los parámetros p y a de la siguiente manera:

$$p = \sqrt{\frac{1+r}{2(1-r)}}, \qquad a = \frac{2 i \sqrt{x r}}{1-r}, \qquad [15]$$

se obtiene la fórmula [10], y por permutación de x con t, la [11]. Estas fórmulas son probablemente nuevas, y juegan papel fundamental en la demostración de nuestros teoremas.

Las propiedades [12] y [13] se demuestran fácilmente, utilizando la acotación

$$I_0(2\sqrt{t}) < t^{-1/4} exp(2\sqrt{t})$$

de manera análoga a como lo hace Wigert [11], para un fin semejante. La demostración es casi idéntica a la de Wigert, y por lo tanto la omitimos.

---

(10) Ver Watson, 2, pág. 395.

(11) Wigert, 1., pág. 114.

Teorema VIII.—Sea $f(t)$ una función sumable en $(0, \infty)$. Se verifica, para $r \to 1$,

$$lim \int k(r, x, t)\, f(t)\, dt = f(x) \qquad [16]$$

en todo punto en el que se verifique, para $h \to 0$,

$$lim \frac{1}{h} \int_0^h | f(x+t) - f(x) |\, dt = 0 .$$

Este teorema es consecuencia del hecho que el núcleo $k(x, t, r)$ satisface a todas las condiciones de un teorema general de Titchmarsh ([12]) sobre integrales singulares.

Teorema VIII.—Los coeficientes de una serie de Laguerre, o de Laguerre-Stieltjes, están acotados, para $n \to \infty$.

Este teorema trivial, es consecuencia inmediata de la conocida acotación de Szegö ([13]):

$$| \varphi_n(t) | \leqq 1 \quad (t \geqq 0) .$$

III. REPRESENTABILIDAD DE FUNCIONES POR INTEGRALES DE LAPLACE.

Una vez resuelto el problema de las clases para series de Laguerre, el problema de la representabilidad de funciones, por integrales de Laplace, queda también resuelto en pocas líneas, pues es en el primero donde reside la dificultad. Veamos cómo.

Sea $F(z)$ $(z = x + iy)$, una función analítica para $x > 0$, real para z real. Calculemos sus derivadas $F^{(n)}(x)$, en el punto $x = \frac{1}{2}$, y formemos las expresiones

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{F^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)}{k!} , \qquad [17]$$

$$g(r, t) = \Sigma\, a_n\, \varphi_n(t)\, r^n \qquad [18]$$

Teorema IX.—La condición necesaria y suficiente para que $F(z)$ sea una integral de Laplace-Stieltjes de una función de variación acotada

$$F(z) = \int e^{-zt}\, d\, g(t) , \qquad [19]$$

([12]) Titchmarsh, 1, pág. 28.
([13]) Szegö, 1.

es que se verifique

$$\int | g(r, t) | \, d t < M \qquad (0 \leqq r < 1) . \qquad [20]$$

La condición es necesaria. En efecto, si se cumple la [19], se verifica, evidentemente,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{F^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)}{k!} = \int \varphi_n(t) \, d g(t) . \qquad [21]$$

Es decir, que los a_n son los coeficientes de Laguerre-Stieltjes de una función de variación acotada. Por lo tanto, en virtud del Teorema III, se verificará la fórmula [20].

Las condiciones son suficientes. En efecto, supongamos que $F(z)$ cumpla las condiciones enunciadas, y que se verifique la [20]. En virtud nuevamente del teorema III, existirá una función $g(t)$, de variación acotada en $[0, \infty]$, tal que

$$a_n = \int \varphi_n(t) \, d g(t) . \qquad [22]$$

Pero teniendo en cuenta la expresión [17] de a_n, se advierte inmediatamente que la [22] implica

$$F^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^n \int t^n e^{-\frac{t}{2}} \, d g(t) \quad (n = 0, 1, 2, ...) . \qquad [23]$$

Ahora bien, la función

$$G(z) = \int e^{-zt} \, d g(t)$$

es analítica para $x > 0$, y se verifica

$$G^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = F^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, ...) . \qquad [24]$$

Luego, en virtud del teorema de identidad de las funciones analíticas, debe verificarse

$$F(z) \equiv G(z) ,$$

con lo que nuestro teorema queda demostrado.

De idéntica manera se demuestran los teoremas siguientes.

Teorema X.—Condición necesaria y suficiente para que $F(z)$

sea la integral de Laplace de una función sumable en $(0, \infty)$, es que se verifique, para $r \to 1$, $r' \to 1$,

$$lim \int | g(r, t) - g(r', t) | \, d\, t = 0 .$$

Teorema XI.—Condición necesaria y suficiente para que $F(z)$ sea la integral de Laplace de una función de enésima potencia sumable, es que se verifique

$$\int | g(r, t) |^{n} \, d\, t < M \qquad (o \leqq r < 1) . \qquad [25]$$

Teorema XII.—Condición necesaria y suficiente para que $F(z)$ sea la integral de Laplace-Stieltjes de una función de variación acotada y continua en $[0, \infty]$, es que se cumpla [25], y además la siguiente:

$$\lim_{r \to 1} 2 (\pi\, t)^{\frac{1}{2}} (1 - r)^{\frac{1}{2}} \, g(r, t) = 0 .$$

Teorema XIII.—Condición necesaria y suficiente para que $F(z)$ sea la integral de Laplace-Stieltjes de una función no decreciente y acotada, es que se cumpla la condición [25], y, además, la siguiente:

$$g(r, t) \geqq 0 \quad (0 \leqq r < 1) .$$

BIBLIOGRAFIA

Doetsch G.—Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion als Laplace Integral. — Math. Zeitschrift, 1937.

González Domínguez, A.—1) Sur les intégrales de Laplace. Comptes Rendus, vol. 205, p. 1035, 1937. - 2) Sobre las series de funciones de Hermite, Rev. de la Unión Matemática Argentina, vol. II, 1938.

Hausdorff, F.—Momentprobleme für ein endliches Interval. Math. Zeitschrift, 1923.

Szegö, G.—Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi. Math. Zeitschrift, vol. I, (1918), pág. 341.

Titchmarsh, E. C.—Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford, 1937.

Watson, G., 1.—Notes on Generating Functions of Polynomials I. - Laguerre Polynomials. - Journal London Mathematical Society, pp. 189-192, 1933.

Watson, G., 2.—Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1922.

Wigert, S.—Contribution a la théorie des polynomes d'Abel-Laguerre.

Arkiv fuer Mathematik, Astronomi och Fysik, vol. 15, 1921.