ALBERTO GONZALEZ DOMINGUEZ

SOBRE UNA MEMORIA

DEL

Prof. J. C. VIGNAUX

UNION MATEMATICA ARGENTINA
Publicación N.º 12

BUENOS AIRES
1940

SOBRE UNA MEMORIA DEL Prof. J. C. VIGNAUX

por ALBERTO GONZALEZ DOMINGUEZ

Nos proponemos en esta nota hacer un análisis objetivo y completo de la memoria siguiente:

J. C. VIGNAUX.—*Extensión del teorema de Abel-Stolz, y sobre algunas transformaciones funcionales lineales* (continuación); Anales de la Sociedad Científica Argentina, Tomo CXXVI, entrega VI, 1938, pp. 401-428).

He aquí todo el contenido de la memoria, página por página, y párrafo por párrafo, sin omitir nada:

Párrafo 1 (pág. 401):

"En la presente memoria —dice el autor— nos proponemos exponer " varios resultados *nuevos* [1] relativos a la transformación limitada de " Laplace", definida por la relación

[1] $$f(z) = \int_0^1 e^{-xz} \varphi(x)\, dx \, ;$$

" de la transformación de Le Roy

$$g(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)\, dx}{1 - xz} \, ,$$

" y de la transformación de Heine:

$$h(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)\, dx}{x - z} \ldots \qquad ''$$

Párrafo 2 (págs. 402-404):

Introducción histórica y resumen de la memoria.

Párrafo 3 (págs. 404-405):

Define lo que entiende por "transformación limitada de Laplace", en los siguientes términos: "dada una función $\varphi(x)$, *acotada e integrable Lebes-* " *gue* en el intervalo $(0, 1)$, la integral definida

$$f(z) = \int_0^1 e^{-tz} \varphi(t)\, dt$$

" define en todo el plano de la variable compleja $z = x + iy$, una función " compleja de z, que llamaremos transformada limitada de Laplace de la " función $\varphi(t)$, o, simplemente, transformada limitada (L_1), e indicare- " mos con la notación $f(z) = L_1[\varphi(x)]$.

"A las funciones $\varphi(x)$ y $f(z)$ las denominaremos función generatriz " L, y función determinante L_1, respectivamente."

(*) La bastardilla es nuestra.

Enuncia y demuestra a continuación el siguiente teorema:

"La función $f(z)$ es holomorfa en todo el plano"; luego da su desarrollo de Taylor y deduce que la función $f(z)$ es de tipo exponencial.

Estos *nuevos* teoremas, que demuestra el autor con lujo de detalles, para lo cual necesita dos páginas, 405-406, figuran hace largos años en textos elementales, por ejemplo, en el conocido manual de Pincherle, "Gli Elementi della Teoria delle Funzioni Analitiche", Bologna, Zanichelli, 1923, donde en las 6 primeras líneas de la página 314 demuestra mucho más; y Bochner le gana en concisión a Pincherle, pues liquida el tema en 3 líneas (Nos. 13. 14, 15 de pág. 145; y Titchmarsh se limita a desdeñarlo por trivial y conocido. En cambio, el Prof. Vignaux considera la primicia digna de ocupar tamaño espacio (págs. 405-406) no ya en un libro didáctico, sino en una memoria de tan altas pretensiones.

Párrafos 4 *y* 5 (págs. 405-411):

Definición de lo que el autor entiende por problema de los momentos de "Le Roy Haussdorf", a saber:

"determinar una función *única* que satisfaga a la condición

$$a_n = \int_0^1 x^n \varphi(x)\, dx \quad . \quad (n = 0, 1, 2, \ldots n \ldots) \text{"}$$

El autor no dice a qué categoría debe pertenecer la función $\varphi(x)$, incógnita. Suponemos que exige que $\varphi(x)$ sea acotada e integrable, según ha supuesto antes. Este problema, tal como lo entiende el Sr. Vignaux, es insoluble, como se deduce de las primeras propiedades de la integral de Riemann, o aún de Cauchy.

Página 408:

Demuestra el teorema: Si se verifica la (1), se verifica también:

$$f(z) = \frac{1}{z}\left[\varphi(1)\, e^{-z} - \varphi(0)\right] + \frac{1}{z}\int_0^1 e^{-zx}\, \varphi'(x)\, dx\, .$$

Exactísimo. No hay más que integrar por partes. Igualmente, derivando n veces, llega a una fórmula donde en el segundo miembro aparece, bajo el signo de integral, la derivada enésima de $\varphi(x)$. Estos "teoremas", eran ya conocidos en los tiempos de Laplace (siglo XVIII), y quizás aun antes.

Otro "teorema" (pág. 409, línea 5, empezando por arriba): Si se verifica:

$$f(z) = \int_0^1 e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx\, , \qquad g(z) = \int_0^1 e^{-xz}\, \psi(x)\, dx\, ,$$

se verifica también:

$$f(z) \pm g(z) = \int_0^1 e^{-xz}\, (\varphi(x) \pm \psi(x))\, dx\, . \text{"}$$

Huelgan los comentarios.

Página 410:

El teorema que demuestra, de manera no rigurosa, es un caso muy particular del conocidísimo teorema sobre la "Faltung", de integrales de Laplace, que figura en libros bien conocidos, incluso para el intervalo $(-\infty, \infty)$, y funciones meramente sumables (y no sumables y acotadas, como supone Vignaux). Suponiendo las funciones nulas para $(-\infty, 0)$, y $(1, \infty)$, se obtienen los teoremas del autor, sin necesidad de los largos cálculos (puramente formales), que él utiliza.

Páginas 410-411:

Con motivo del "cociente" de transformadas (que define de manera exclusivamente formal, al estilo del siglo XVIII, pues para conocer ese cociente hay que resolver una ecuación integral de primera especie, y el autor no da condiciones ni siquiera para que esa ecuación admita solución), comete un grueso error de concepto. Dice, en efecto (pág. 411):

"Haciendo el producto del segundo miembro, la relación anterior se puede " escribir:

$$\text{``} \quad \int e^{-xz} \varphi(x)\, dx = \int e^{-xz} \left[\frac{1}{2} \int_0^x \psi(x-y)\, \omega(y)\, dy \right] dx ,$$

" de donde rsulta, según un conocido teorema de Lerch-Vitali

$$2\, \varphi(x) = \int_0^x \psi(x-y)\, \omega(y)\, dx \text{.''}$$

La conclusión a que llega el autor es lamentablemente equivocada. Suponiendo que la función $\omega(x)$ *exista*, para lo cual el autor no da ningún criterio, la igualdad anterior puede no verificarse. Consulte el autor cualquier libro moderno de Cálculo.

Párrafo 6 (pág. 411):

Incompleta y confusa noticia sobre el problema de la inversión.

Párrafo 7 (págs. 412-415):

Demuestra que la integral doble

$$f(z, w) = \int\int e^{-zx-yw} \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

($\varphi(x, y)$ acotada e integrable Lebesgue), es función holomorfa de z y w, escribe su desarrollo de Taylor, y afirma que sus derivadas parciales se obtienen derivando bajo el signo de integral.

Todo esto es tan trivial y conocido como en el caso de una variable, y con idéntica facilidad se demuestra, por ejemplo, para una función de 10.000 variables.

Párrafo 9 (página 414-415):

Plantea el siguiente problema:

"Dada la sucesión doble a_{mn}, determinar una función "*única*", $\varphi(x, y)$,
" de las variables x, y, tal que

"
$$a_{mn} = \int x^m y^n \varphi(x, y)\, dx\, dy \quad . \quad (m, n = 0, 1, \ldots) \text{ .''}$$

Le aconsejamos al Prof. Vignaux que deje las cosas donde están, y no trate de resolver el problema, tan incorrectamente enunciado, el cual si tiene una solución, tiene infinitas; vea cualquier libro moderno de Cálculo Infinitesimal. El autor no tiene noticia, por lo visto, de que el problema, *bien planteado*, ha sido objeto de múltiples investigaciones, por Schoenberg, Hildebrandt, Haviland,... incluso para intervalo infinito, y n variables. Ponemos la bibliografía completa a su disposición, si así lo desea.

Párrafo 10 (pág. 415-416):

He aquí un teorema característico del Prof. Vignaux, que ya conocían perfectamente los alumnos de los cursos elementales: la integral de una suma es igual a la suma de las integrales.

El caso del producto (pp. 415-416) no es tan trivial, y se siente orgulloso de haberlo resuelto en 1938 para dos variables (An. Soc. Cient. Arg. T. CXXVI, 1938, pág. 14). Podía haberse ahorrado el esfuerzo de demostrar malamente esta regla de Cálculo; pues aun sin molestarse en leer memorias, pudo haber aprendido en libros didácticos ("Lehrbücher"), que ponemos a su disposición, la demostración perfecta, no para *dos*, sino para n variables; y no sólo para el modestísimo intervalo $(0, 1)$, sino para $(-\infty, \infty)$; y para funciones meramente sumables, y no sumables y *acotadas*, como supone cómodamente Vignaux.

Párrafos 11-12 (págs. 416-422):

Extiende los teoremas anteriores sobre suma y producto de integrales de Laplace ordinarias a las integrales de Laplace de variable compleja dual. Como estas integrales se reducen inmediatamente (según el mismo autor no puede menos de observar en la página 417), a un par de integrales de Laplace ordinarias, todos los teoremas que para ellas demuestra son tan triviales como los precedentemente reseñados. [*].

Párrafo 13 (págs. 422-423):

Propiedades de la integral doble de Laplace de variable compleja dual. Por la misma razón que los anteriores (reducción inmediata a integrales

---

(*) Por la sencillez del tema fué propuesto como ejercicio en el curso pasado a los alumnos del Seminario Matemático de la Facultad de Buenos Aires y algunos de ellos, dejando de lado las propiedades triviales, que son las mismas ya sabidas, encontraron algunas pequeñas novedades dignas de nota respecto del campo ordinario. Ninguna de estas propiedades se encuentra sin embargo en este capítulo, en el cual se aplican con asombroso coraje los clásicos teoremas de integración precisamente en los casos en que su uso está prohibido sin las precauciones que enseñan los textos. Lo muy poco que sería preciso demostrar no lo demuestra, admitiendo ciertas propiedades, como una gratuitamente atribuida a la Srta. Cibrario.

Sobre la exactitud de las citas y su ortografía podría escribirse otro folleto.

de Laplace ordinarias), estos teoremas son completamente triviales. Menos mal que el autor, en un arranque de sinceridad, lo confiesa (página 423): "Las propiedades de esta integral doble se deducen a partir de la expre-" sión (2), y razonando como en el caso de una variable".

Párrafo 14 (págs. 423-425):

Pintoresca noticia histórica (incluso por la ortografía) sobre el problema de los momentos.

Párrafo 15:

No existe.

Párrafo 16 (págs. 425-426):

Menciona el problema de los momentos de Cauchy, y aun cuando dice con mucha razón (nos place consignar que la memoria contiene esta afirmación rigurosa) que "cuando la curva c es cerrada, la solución es inme-" diata, y ella está contenida en los resultados fundamentales de Cauchy " sobre las series de potencias", después invierte dos largas páginas en reproducir cosas conocidas hace más de un siglo.

Párrafo 17 (págs. 426-428):

El problema que llama de los "momentos factoriales", sobre una curva cerrada, cuya solución ha anunciado alborozadamente en la página 425, no es tal problema. Esperemos que el autor se dé cuenta de su equivalencia con el de Cauchy leyendo el final de esta reseña.

Las fórmulas que figuran en la mitad superior de la página 427 tienen un parecido comprometedor con las de una clásica memoria de Frobenius (Crelle, vol. 73, 1871, pp. 1-30); parecido que se trasmuta en identidad si en las fórmulas de Frobenius de las páginas 5 y 6, se reemplaza la sucesión $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n \ldots$, que en ellas aparece, por la sucesión particular $0, 1, 2, 3, \ldots$ ¡Admirable retroceso al cabo de 67 años!

Página 428:

Las novedosísimas consideraciones anteriores culminan en el descubrimiento del siguiente teorema: "*Dada una función holomorfa en el exterior del contorno cerrado* c, *y continua sobre* c, *su desarrollo en serie de facultad convergente queda perfectamente determinado*". (*).

Las fórmulas anteriores tenían un peligroso parecido con las de Frobenius. El presente teorema, que data de los lejanos tiempos de la guerra franco - prusiana (1871), se llama también de Frobenius. Para mayor desgracia figura incluso en textos elementales, por ejemplo en el archiconocido de Pincherle, "Gli Elementi della Teoria delle Funzioni Analitiche", Bologna, Zanichelli, donde puede leerse, en la página 329: " ogni funzioni analitica regolare per $x \to \infty$ é sviluppabile in serie di fatto-" riali". El Prof. Vignaux, quién sabe con qué propósito, hizo el agregado, arbitrario e inútilmente restrictivo: "y continua sobre c", con tan mala fortuna que ha estropeado el teorema y no ha despistado a nadie.

(*) Subrayado por el autor. Sin duda ha querido decir serie de facultades.

Párrafo final Nº 18 (pág. 428):

El autor cierra dignamente esta segunda parte de la memoria con el siguiente párrafo que abre un horizonte de vastas proyecciones: "Por " ahora nos limitaremos a estas consideraciones, y dejamos planteada la " cuestión de los momentos factoriales sobre una curva abierta y el de los momentos factoriales de tipo Stieltjes, o del tipo Le Roy-Hausdorff o del " tipo Hamburger.

" Se puede generalizar también este problema considerando integrales de " Stieltjes". (*).

Este es el dificilísimo problema que el autor, tras inútiles esfuerzos para resolverlo se limita a enunciar, en la esperanza de que algún ilustre matemático le dedique sus desvelos y con su solución se inmortalice, inmortalizando de paso al que lo propuso.

Consideramos que vale la pena detenerse sobre este punto, pues ello va a permitirle al más profano apreciar cabalmente la extraordinaria originalidad de este problema, y la de su creador.

Un lector que sólo conozca las cuatro reglas y posea el concepto más elemental de integral puede comprender perfectamente lo que sigue.

El problema clásico de los momentos consiste en establecer las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una sucesión dada de números reales $m_0, m_1, m_2, m_3, \ldots m_n \ldots$, para que exista una función $f(x)$, perteneciente a una dada categoría, tal que se cumplan las infinitas igualdades:

$$m_0 = \int f(x)\, x^0\, dx$$

$$m_1 = \int f(x)\, x^1\, dx$$

$$m_2 = \int f(x)\, x^2\, dx$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_n = \int f(x)\, x^n\, dx \quad ,$$

entendiéndose que los límites de integración son a y b. (*)

El *nuevo* problema de los momentos factoriales, que plantea, orgulloso, el Prof Vignaux, consiste en averiguar las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una sucesión dada de números reales $c_0, c_1, c_2, \ldots$

(*) El autor le asigna a este resultado, con el cual corona su obra, especialísima importancia. Recalca, en efecto, en la página 404 (final del párrafo 2): "Finalmente, en " la tercera parte se estudia una **nueva** cuestión: la de los momentos factoriales". Y en su ansia muy loable de inmortalidad, firmemente empeñado en que su problema "el problema de Vignaux", sea bien conocido, lo antes posible, por todos los matemáticos del orbe, les lanza nuevamente su cartel de desafío, cual despiadada esfinge rediviva, recordándoles en otra publicación posterior (Anales de la Soc. Cient. Arg., marzo 1939, pág. 185), la deuda de honor que tienen contraída al no atacar la magna cuestión "que hemos denominado problema de los momentos factoriales".

(*) Si **a** y **b** son finitos, es el caso de Hausdorff; si $\mathbf{b} = +\infty$ el de Stieltjes; si $\mathbf{a} = -\infty$, $\mathbf{b} = +\infty$, el de Hamburger.

para que exista una función $f(x)$ tal que se verifiquen las infinitas ecuaciones

$$\int f(x)\,dx = c_0, \qquad \int x f(x)\,dx = c_1, \qquad \int x(x+1) f(x)\,dx = c_2, \ldots$$

Ahora bien: todo alumno de quinto grado de la escuela primaria entenderá las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ x &= x \\ x^2 &= x(x+1) - x \\ x^3 &= x(x+1)(x+2) - 3x(x+1) + x\,; \end{aligned}$$

y cualquier estudiante de arquitectura podrá multiplicar ambos miembros de estas igualdades por $f(x)$ e integrar luego sin mayor esfuerzo, obteniendo:

$$\int f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\,,$$

$$\int x f(x)\,dx = \int x f(x)\,dx\,,$$

$$\int x^2 f(x)\,dx = \int x(x+1) f(x)\,dx - \int x f(x)\,dx\,,$$

$$\int x^3 f(x)\,dx = \int x(x+1)(x+2) f(x)\,dx - 3\int x(x+1) f(x)\,dx + \int x f(x)\,dx;$$

o sea $m_0 = c_0$,

„ $m_1 = c_1$,

„ $m_2 = c_2 - c_1$

„ $m_3 = c_3 - 3c_2 + c_1$,

y así sucesivamente. (*).

Las sencillísimas restas que anteceden, demuestran de modo irrefutable que, si la función $f(x)$ es solución del problema de "momentos factoriales" de Vignaux para la sucesión (c_n), es también solución del problema clásico de momentos para la nueva sucesión (m_n) y recíprocamente.

Ergo, el "problema de Vignaux" es el *mismo* problema de Hausdorff, de Stieltjes o de Hamburger.

He aquí, pues, descifrado por un Edipo cualquiera, con una sencillísima operación de *resta*, el pavoroso enigma que el Prof. Vignaux, con religioso temor, no ha osado siquiera abordar.

Poincaré ha dicho en alguna parte que no era capaz de hacer una suma sin equivocarse. Bien podemos disculpar a su émulo platense que se haya atrancado en una resta.

(*) Es bien sabido como se llega a la expresión general de m_n mediante los famosos números de Stirling, conocidos hace más de 200 años.

J. C. VIGNAUX: "*Extensiones del teorema de Abel-Stolz y sobre algunas transformaciones funcionales lineales*" (conclusión); Anales de la Sociedad Científica Argentina, Tomo CXXVII, marzo de 1939, pp. 161-185).

Merece esta memoria por múltiples razones (tantas como teoremas), estudio aparte, que aparecerá en el próximo número del Suplemento. Con todo, no podemos resistir a la tentación de dar a conocer a nuestros lectores, para muestra, siquiera uno de los revolucionarios teoremas que contiene.

El Prof. Vignaux considera integrales del tipo siguiente, que llama de *Le Roy*:

$$\text{A)} \qquad f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)\, dx}{1 - xz},$$

donde $\varphi(x)$ es real, acotada e integrable Lebesgue en el intervalo $(0, 1)$, y z es un número complejo arbitrario, no perteneciente al intervalo $(1, \infty)$; y considera los "momentos" sucesivos de $\varphi(x)$:

$$1) \qquad a_n = \int_0^1 x^n \varphi(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots\ldots).$$

En la página 172 de la memoria figura el siguiente notabilísimo teorema con su demostración, no menos notable: "Si se da una función definida por su desarrollo de Taylor

$$2) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

" cuyo radio de convergencia se supone igual a la unidad, y sus puntos sin-
" gulares estén en el intervalo $(1, \infty)$; entonces la $f(z)$ puede expresarse
" en toda su estrella rectilínea por una integral de *Le Roy*. En efecto, dada
" la sucesión a_n se puede determinar una función $\varphi(x)$ solución de la (1)."

Después de este catastrófico descarrilamiento en la estación de salida, es inútil seguir copiando.

Basta aplicar, por vía de ejemplo, el teorema anterior a la sencillísima serie geométrica: $f(z) = \Sigma\, z^n$.

Esta satisface a todas las condiciones impuestas en el teorema, pues su radio de convergencia es 1, y su único punto singular es también el punto 1, perteneciente al semirayo $(1, \infty)$, según exige el teorema.

Como en este caso sencillísimo todos los a_n son iguales a 1, la correspondiente función $\varphi(x)$, deberá satisfacer, de acuerdo con la fórmula (1) del Prof. Vignaux, a la siguiente relación:

$$1 = \int_0^1 \varphi(x)\, x^n\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots\ldots).$$

Pero por las propiedades bien sabidas de las integrales, el límite del 2º miembro para $n \to \infty$ es 0, luego resulta la estupefaciente igualdad

$$\mathbf{1 = 0}.$$

He aquí una de las consecuencias menos sorprendentes del teorema del Prof. Vignaux.

(*Continuará*).

Después de visto y admirado el más valioso resultado original a que llega la memoria, procederemos al examen detenido de esta desconcertante producción. La cual comienza así:

"Aquí nos vamos a ocupar —dice el autor— del estudio de la correspondencia funcional que establece la integral de Le-Roy

$$f(z) = \int_C \frac{\varphi(x)}{1 - x z} \, d x \qquad [1]$$

" entre una función dada $\varphi(x)$ y la función $f(z)$ definida por la integral [1]. Luego propondremos algunas generalizaciones de la misma".

Hemos repasado cuidadosamente las 25 páginas de la memoria y en ellas no aparece el estudio de la integral curvilínea, ni mucho menos sus prometidas generalizaciones (*); y ésto a pesar de su anuncio:

"Trataremos *primeramente* el caso en que la [1] esté tomada sobre el " intervalo real (0,1)".

Y no cabe esperarlas en otro capítulo, que quizás podría aparecer en un próximo número de los "*Anales*"; pues éste ostenta el bien visible rótulo "Conclusión"; y no por error de imprenta, ya que en los sucesivos números cambia de tema.

Es muy posible que se trate de una de las tantas incumplidas promesas con que el autor matiza sus memorias; pero más favorable es otra explicación que surge al comparar ambos capítulos. El capítulo II trata, como ya hemos dicho, de la transformación

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(t) \, d t}{1 - z t} \qquad [1']$$

que el señor Vignaux llama de Le Roy y en el capítulo II trata de la transformación

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x) \, d x}{x - z}, \qquad [1'']$$

que Pincherle estudió en fecha remota (**), llamándola de Heine.

Una y otra son en el fondo una y misma transformación perfectamente conocida, y el lector notará inmediatamente que de una a otra se pasa por un simplicísimo cambio de la variable z; y que las conclusiones obtenidas para una se aplican a la otra *mutatis mutandis*. Algunos autores, como Bernstein, Hausdorff, Féjer,... prefieren la forma ['] mientras que

(*) Para ser exactos, declaremos haber encontrado cuatro líneas (números 1, 2, 3, 4, de página 173) en que se limita a decir que los resultados anteriores se *pueden* extender.

(**) La cita que hace el autor es, como de costumbre, inexacta. El libro que cita: *Funzione analitiche*, no dice lo que afirma el Sr. Vignaux.

otros como Stieltjes, Pincherle, Borel, Perron, Wintner, Titchmarsh... eligen por el contrario la forma [1"]. Lo nunca visto es tratarlas a la par como cosas esencialmente distintas y hasta con diferentes nombres de pila.

Siendo inverosímil que el autor no se haya dado cuenta de la identidad de esencia, es probable que después de desarrollar la teoría por ambos métodos, para elegir el mejor, un disculpable *lapsus* en la ordenación de originales, haya producido esta lamentable repetición, agravada con la no menos lamentable omisión de las dos promesas exactamente iguales en uno y otro capítulo. En efecto, dice así en pág. 157:

"Pincherle considera la integral

$$f(z) = \int_{\mathscr{C}} \frac{\varphi(t)\, dt}{t - z}$$

" sobre una curva C abierta o cerrada del plano, siendo $\varphi(t)$, una función " de la variable t sobre C. En este capítulo vamos a estudiar esta correspondencia funcional, dando algunas propiedades nuevas y estableciendo " su relación con el problema de la prolongación analítica. Finalmente *pro-* " *ponemos algunas generalizaciones*".

La frase subrayada es, como se ve, idéntica a la antes reproducida, salvo el cambio de adverbio; y el incumplimiento es también idéntico.

En efecto, ni da *propiedades nuevas, ni establece su relación con el problema de la prolongación analítica* (v. nuestro ejemplo de pág. 8) *ni propone generalizaciones.*

Siquiera en el capítulo II proponía una generalización, si no de la integral curvilínea, que olvida desde la primera página, al menos de la rectilínea; y hasta llegaba a inventar la *nueva* transformación:

$$f_a(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)\, dz}{(1 - x z)^a},$$

la cual, en uso del legítimo derecho que asiste a todo progenitor, bautizaba con el sonoro nombre de "*transformación* (R) *de orden* α".

Lo malo es que la neófita tenía ya dos siglos de vida y todo el mundo la conocía bajo el nombre de "*transformación de Euler*". Y peor todavía es que el único teorema (de trivialidad desconsoladora) descubierto por su padre adoptivo, era ya sabido en el S. XVIII.

Para reducir a la mitad el trabajo de algún problemático lector de la memoria que comentamos, damos una tabla de equivalencias entre los capítulos II y III, cuya identidad casi completa hemos explicado suficientemente.

Nótese que al final deja de ser exacta la coincidencia entre ambos capítulos, y ello es debido a la dualidad de fuentes en que se ha inspirado. Pero tanto los teoremas comunes como los no comunes a los dos capítulos, eran ya bien conocidos de todos los profesionales, y hasta figuran en libros de texto. Repetirlos dándolos como nuevos es ya un hecho insólito; pero repetirlos por duplicado en una misma memoria inutilizando la demostración original ajena con desdichados retoques propios, es ejemplo único en la literatura matemática.

Página	Línea	Página	Línea
161	9-11	177	19-22
161	15-21	178	1-4
162	1-5	178	5-11
,,	6-11	,,	12-20
,,	12-13	,,	21-22
,,	14-25	,,	23-30
162	26-29	179	1-4
163	1-10	,,	5-10
,,	11-21	,,	11-17
,,	22-25	,,	18-23
164-166	1-12	180-181	1-3
168	1-20	181	4-21

La repetición de cada teorema, dando nombres distintos a la variable, salta a la vista de cualquier lector, quien podrá comprobar el anterior cuadro de equivalencias. Que los dos ejemplares de cada teorema no son sino trascripciones desfiguradas de teoremas ajenos, resultará del análisis minucioso que haremos a continuación. Hay, sin embargo, alguna excepción: cuando se trata de propiedades tan triviales o archisabidas que los textos las dan por evidentes o ya conocidas de todos, mientras el Sr. Vignaux se complace en ocupar con ellas páginas y páginas.

Por ejemplo: el teorema del Cap. II, pág. 162:

La función f (z) *es holomorfa en todo el plano con la cortadura* $(+1, +\infty)$ o su equivalente de pág. 178 en el Cap. III, son casos particularísimos e insignificantes del bien conocido teorema de Stieltjes que data nada menos que de 1894, el cual es mucho más general, por ser infinito el intervalo y por la clase de integral; teorema que figura en textos tan conocidos como el de Perron sobre fracciones continuas (2ª ed., Leipzig, 1929, pág. 369), o el de Wintner sobre matrices (Leipzig, 1929, pág. 91); teorema que durante casi medio siglo ha sido utilizado frecuentemente por los matemáticos, sin molestarse siquiera en dar su demostración, por suponerla conocida de todos los lectores. Así por ej. Borel (*Leçons sur les Séries Divergentes*, IIª ed., 1928, pág. 67) dice: "L'intégrale J définit manifestement une fonction holomorphe dans tout le plan, sauf sur la partie négative de l'axe réel, qui est une coupure".

Y esto a pesar de que Borel considera intervalo infinito, para el cual la demostración no es trivial; y todavía es más general el caso tratado por Stieltjes.

Aunque lo expuesto es suficiente para que el lector forme juicio de la memoria, vamos a analizar párrafo por párrafo, todo su contenido:

Párrafo 19, pág. 163.—Afirma que las derivadas de la función $f(z)$ se calculan derivando bajo el signo integral; la propiedad es cierta en este caso, pero el autor no se preocupa de averiguar si se cumplen las condiciones requeridas; en cambio ocupa amplísimo espacio para escribir la función, su derivada primera, su derivada 2ª, su derivada enésima, y el valor de la derivada enésima para $z=0$, llenando así media página.

Párrafo 20, pág. 163.—Llegamos, por fin, a un resultado novedoso, que en esta memoria nos sorprende, pues tiene verdadero interés: "pro-" baremos ahora —anuncia el autor— que el producto de dos transforma-" das (R) es una transformada (R)".

El autor entiende por transformada (R) la definida por la integral

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)\, dx}{1 - z\,t},$$

" donde $\varphi(t)$ es una función *integrable* y *acotada* en $(0,1)$". Así la define el Sr. Vignaux, quien anuncia, en nota al pie, que seguirá un razonamiento *análogo* al de Borel (loc. cit., pág. 78) y este anuncio estimula nuestro interés, puesto que Borel supone las funciones *derivables.*

Desgraciadamente, esta esperanza se desvanece al cotejar la memoria del autor con el libro de Borel. En efecto, cualquier lector que sepa leer las fórmulas matemáticas, formará inmediatamente el siguiente cuadro de identidades:

Sr. Vignaux				**M. Borel**	
Capítulo II		*Capítulo III*		*Leçons sur les séries divergentes*	
Página	**Línea**	**Página**	**Línea**	**Página**	**Línea**
163	11-21	179	11-17	77	16-18
163	22-25	179 180	18-20 1-3	79	12-13
164	1-3	180	4-6	79	16-18
164	4-8	180	7-9	80	13-17
164	9-11	180	18-20	80	18-21
164	12-21	180	10-17	81	1-6(*)
165-166	1-12	180 181	21-23 1-3	81 82	3-23 1-6

¿Cómo es posible entonces que por una simple transcripción tan fiel de las páginas del conocido libro, con meras modificaciones de forma (todas infortunadas) logre demostrar un teorema mucho más amplio que el de Borel? (**). ¿Por qué arte mágico dos demostraciones esencialmente idénticas pueden dar teoremas tan distintos?

(*) Si el lector compara las fórmulas de Borel con las reproducidas por el autor, notará que en éstas falta excluir el intervalo $(v - \varepsilon,\ v + \varepsilon)$ en las integrales simples; pero esta *simplificación*, que disimula la fuente de sus cálculos, es inadmisible, como arriba se ha explicado, careciendo por tanto de sentido las fórmulas que no son idénticas a las de Borel.

Tampoco vale para las integrales simples la disculpa de que el autor sobreentiende que se tome el valor principal, pues como demuestra el ejemplo que arriba aducimos, tal valor principal no existe dentro de las hipótesis del Sr. Vignaux.

(**) Haciendo honor a la justicia, la transcripción no es completamente literal, pues hay algunas pequeñas modificaciones, desgraciadamente todas desafortunadas. En efecto, como dice muy exactamente Borel, (pág. 79) "l'intégrale J a un sens, malgré la présence du facteur v—u en dénomina-"teur, puisque ce facteur se retrouverait en numératur dans la paren-

La contestación está en una nota al pie de pág. 166, donde dice: "se ha supuesto que las funciones generatrices $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ sean derivables, *a fin de simplificar los cálculos*".

No deja de ser extraño que al ilustre profesor de la Sorbona se le haya escapado el hecho de que su teorema es válido sin necesidad de exigir que las generatrices sean derivables, mientras que lo ha visto, con aguda perspicacia, el distinguido profesor argentino. Pero este nuevo lauro de nuestro fecundo analista se desvanece inmediatamente apenas se piensa en cualquier función discontínua. He aquí la más sencilla de todas:

$$\psi(v) = 1 \text{ para } 0 \leqq v < u,$$

$$\psi(v) = 0 \text{ para } u < v \leqq 1.$$

Para esta función la integral del Sr. Vignaux:

$$\int_0^1 \frac{\psi(v)\,dv}{u-v} = \mathrm{T}(u)$$

(fórmula 4ª empezando por abajo, de la pág. 164), se reduce a la siguiente:

$$\mathrm{T}(u) = \int_0^1 \frac{\psi(v)\,dv}{u-v} = \int \frac{dv}{u-v},$$

y la primera fórmula de pág. 165 del Sr. Vignaux:

$$\mathrm{T}(u) = \lim_{\delta \to 0} \left[\int_0^{u-\delta} \frac{\varphi(v)\,dv}{u-v} + \int_{u-\delta}^{1} \frac{\varphi(v)\,dv}{u-v} \right]$$

nos da, para esta sencillísima función, *integrable y acotada*, según ha supuesto el mismo:

$$\mathrm{T}(u) \lim_{\delta \to 0} \int_0^{u-\delta} \frac{dv}{u-v} = \lim_{\delta \to 0} \left[\log\delta - \log u \right] = -\infty .$$

Resulta, pues, que la integral *carece de valor principal*, mientras que el señor Vignaux afirma rotundamente en la pág. 164: "*existe el valor principal en el sentido de Cauchy*".

Nos quedaba todavía la esperanza de que el autor estuviera en posesión de algún método para demostrar ese anunciado teorema, mucho más general que el de Borel, a pesar de haberse limitado a reproducir el de éste, pero como ve el lector, *lasciate ogni speranza*. El teorema es irremediablemente falso.

"thèse. Mais il n'en serait plus de même si l'on décomposait l'intégrale J "en deux autres, en séparant les deux termes de la parenthèse. Chacune de "ces intégrales serait dépourvue de sens".

El señor Vignaux se cree autorizado a calcular esta integral doble por medio de dos integraciones sucesivas, sin darse cuenta de que las fórmulas que escribe carecen totalmente de sentido.

Es muy probable que suceda lo mismo con aquellos teoremas que anunció el año 1932 asegurando estar en posesión de su demostración. Confiando en su formal aseveración: *"Nous avons démontré les théorèmes suivants"*, fueron publicados sus enunciados en los *Comptes rendus* (*), como es costumbre hacer con todo profesor universitario que hace bajo su palabra tal afirmación, a reserva de justificarla posteriormente; pero hasta la fecha seguimos esperando que pruebe la verdad de lo afirmado tan solemnemente.

En cuanto a la *comodidad* a que alude en su nota al pie de pág. 163, y que los lectores ingenuos le habrán agradecido, entiéndase que la comodidad es para el autor. Si el teorema lanzado a la ventura hubiese resultado providencialmente cierto, ¿quién habría osado discutirle su paternidad?

Es muy *cómodo* indudablemente enunciar teoremas al acaso, por si les favorece el azar, omitiendo por *comodidad* su demostración; pero este método aleatorio no está exento de peligros (**).

Pág. 166-167. Los dos teoremas que demuestra en ellas son de Pincherle, salvo el cambio $1/x$; véase, en efecto, su conocida nota en los Rendiconti Accad. Lincei, que el autor ha *olvidado* de citar.

Párrafo 21, pág. 168.—Otro *olvido* de citas. El desarrollo en serie de Taylor de la integral [1'] de Cap. II, o su equivalente de Cap. III, Nº 28, pág. 181, figura en textos tan conocidos como el de Wintner (loc. cit. pág. 101) y el de Pincherle (loc. cit. pág...), así como también las observaciones que hace a continuación (Wintner loc. cit. pág. 99).

Párrafo 22, pág. 168-169.—Cita el libro de Borel (sin decir la página) y sigue exactamente su mismo razonamiento.

Párrafo 23, pág. 170.—El autor representa la integral [1'] por medio de una integral de Borel, cosa ya sabida, incluso para el caso extraordinariamente más general de intervalo infinito y de integral de Stieltjes. Véase por ejemplo la memoria de *S. Bernstein.* (Acta math. tomo 32 (1929) pág. 58) donde figura fórmula idéntica a la [3] del señor Vignaux y también observaciones idénticas a las del mismo Vignaux. Igualmente sabido es el teorema análogo de cap. III., párrafo 29, pág. 182 para la integral de Heine.

Párrafo 23, pág. 171.—El Dr. Vignaux insiste, como ya viene haciendo desde hace mucho tiempo, en atribuirse la paternidad de la prolongación de la estrella de Borel, que dice haber logrado en 1924, "en el caso que la función definida por su desarrollo de Taylor, tiene *uno* o *dos* puntos singulares".

(*) Sur la méthode de sommation de Riemann. Vol. 195, pág. 750 y 751. LL

(**) En el teorema idéntico de cap. III supone derivable la generatriz, siguiendo paso a paso el libro de Borel. ¿Cabe quizás atribuir a olvido disculpable la omisión de tan indispensable condición en pág. 163? Desgraciadamente para su salvación, el mismo autor ha cerrado esta puerta de escape, atracándola con su nota ya citada de pág. 166; y por si esto fuera poco, agrega una explícita declaración en pág. 167 cuando al pasar a un nuevo teorema (que por cierto es de Pincherle y no del autor) dice: "consideremos nuevamente la relación [1] y supongamos *además* "que la generatriz $\varphi(x)$ sea derivable".

La verdad es otra. El Sr. Vignaux en una larga memoria en la Revista Matemática (Nos. 21, 22, 23) se limitó a *comprobar* para las más sencillas funciones *elementales* (logaritmo, progresión geométrica, ...) la prolongación del campo, sin atreverse siquiera con la modesta serie binómica.

En la memoria citada anuncia que abordará "en una próxima publicación" el caso de las funciones con "*uno* o *dos* puntos singulares situados sobre un diámetro del círculo de convergencia" sin atreverse ni aun a tocar el caso en que estos dos puntos son cualesquiera. Ahora, en cambio, lo da ya por resuelto con aquellos elementales ejercicios de cálculo. ¿Creerá acaso el Sr. Vignaux que las precitadas funciones elementales son las únicas funciones analíticas con *uno* o *dos* puntos singulares?

No le conviene volver sobre este punto, pues demasiado sabe a estas horas que ese modesto caso de dos puntos singulares es insignificante dentro del caso general, que está completamente resuelto muchos años antes de que él se ocupara de tales asuntos. Hoy no repetiría la frase final de su memoria:

"El problema general, sin duda de gran importancia para la teoría, ofrece grandes dificultades."

En efecto, tal problema, *ni tiene gran importancia ni ofrece dificultades, grandes ni medianas.* Es un sencillo ejercicio de cambio de variable.

Párrafo 24, pág. 172.—El método de prolongación analítica que propone el autor para extender el campo de convergencia de una serie de Taylor de radio 1, expresión de una función cuyos puntos singulares están en el intervalo $(1, \infty)$, es completamente ilusorio, como lo demuestra irrefutablemente el caso de la simplícísima serie geométrica

$$f(z) = \Sigma z^n$$

que cumple todas las condiciones impuestas por el profesor Vignaux. Véase la prueba contundente de nuestra aserción en la página 8 de este trabajo.

El lector quedará maravillado de la eficacia de un método que ya fracasa en la más simple de todas las series, y conduce al revolucionario resultado:

$$1 = 0 .$$

Párrafo 25, pág. 173.—Ya hemos dicho antes a lo que ha quedado reducida su anunciada generalización de la integral de Le Roy. Menos mal que compensa esta trivialidad con el planteo de una *nueva* teoría. Se trata, en efecto, con sus propias palabras, del estudio de "la transformada de "Le Roy, adoptando integrales en el sentido de Stieltjes, es decir:

$$f(z) = \int_0^1 \frac{d\,\varphi(x)}{1 - x z} ,$$

" que, llamaremos *transformación* de Le Roy-Stieltjes. Nos limitaremos " aquí a señalar estas *nuevas* cuestiones, que será tema de estudios pos- " teriores" (*).

(*) El subrayado es nuestro; la concordancia de sujeto y verbo es del autor.

Estas *nuevas* cuestiones, tienen ya medio siglo de vida. Conviene que el autor lea la famosísima memoria de Stieltjes (Ann. de Toulouse, 189b, pág. 1-122, Obras Completas, vol. II, pág. 125) donde hay todo un extenso capítulo, que se ha hecho célebre, consagrado al estudio que el señor Vignaux propone como nuevo en 1939. Con la agravante de que los problemas que desvelan al laureado analista argentino, están resueltos, no solamente para el minúsculo intervalo (0,1), objeto de sus afanes, sino también para (0, ∞), donde ya aparecen serias dificultades.

Por si esto fuera poco, el sencillo caso del intervalo (0,1), que nuestro autor no ha resuelto todavía, figura ya en el conocido texto antes citado de Wintner, pág. 101, y siguientes:

Párrafo 26, pág. 174-176.—Las consideraciones que hace sobre las transformadas dobles de Le Roy, son completamente triviales y valen lo mismo para cualquier número de variables. Véase lo ya dicho en la página 3 de nuestro trabajo.

Termina el capítulo proponiendo este problema:

" es necesario resolver el siguiente problema, que llamaremos de los *mo-*
" *mentos dobles de* Le-Roy-Hausdorff: *dada la sucesión doble* $a_{m,n}$ *deter-*
" *minar una función única* φ (x, y) *de dos variables reales, tal que*

$$a_{m,n} = \int_0^1\int_0^1 x^m\, y^n\, \varphi\,(x,y)\; d\,x\; d\,y \qquad (m,n = 0,1,\ldots)".$$

Este problema, tal como lo enuncia el autor, es insoluble; pero bien planteado ha sido ya resuelto hace tiempo. De la copiosa bibliografía, baste recomendar las memorias de Hallenbach, Schönberg, Haviland, Hildebrandt, ...

Aquí termina en realidad la memoria, aunque todavía siguen nueve páginas más, que componen el capítulo III; pero su contenido lo hemos ido analizando a la par del II puesto que la integral [1"] es la misma [1'] tratada en el capítulo II, cambiando el nombre de la variable.

No uno sino infinitos capítulos podría haber agregado el autor a su memoria, sin por ello haberla dotado de contenido apreciable; y así como ha fabricado el capítulo III sin más que cambiar el nombre de la variable z, podría haber fabricado infinitos otros, con otros tantos intrascendentes cambios. Y eso, sin tocar el intervalo de integración; pues así como ha embutido en su capítulo II la memoria de Pincherle, que considera el intervalo (1, ∞), cambiando meramente x por $1/x$, calcúlese cuantos nuevos capítulos podrían fabricarse con otros tantos intervalos. Con tales hinchazones, solamente se logra rebajar más y más el peso específico de la ya ingrávida memoria, cuyas 76 páginas, trabajosamente henchidas con nobles materiales ajenos burdamente desfigurados, agravian al lector sin lograr en cambio disimular la miseranda orfandad de ideas.

(Recibido el original en Agosto de 1939).