Fausto I. Toranzos

Sobre las singularidades de las curvas de Jordan

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación Núm. 13.

BUENOS AIRES

1939

SOBRE LAS SINGULARIDADES DE LAS CURVAS DE JORDAN

Por FAUSTO I. TORANZOS

Concepto de tangente.—No existe uniformidad de criterios respecto al concepto de tangente a una curva real, por lo que se hace necesario especificar la definición de tangente que se utiliza. Nosotros usaremos algunas veces el concepto de tangente a una curva de Jordan en el sentido dado por Rosenthal (*) y otras en el dado por Severi (**), por lo cual es necesario probar su equivalencia. El concepto de *semitangente* a una curva en el sentido dado por Rosenthal y aplicado a las curvas de Jordan es el siguiente: sea P_i una sucesión de puntos sobre una curva de Jordan, tales que, siendo t el parámetro se verifique:

$$t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n < \dots \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} t_n = t_0 .$$

Consideremos el haz de semirrectas $P_0 P_n$. Si existe una semirrecta límite del haz, diremos que es una *semitangente a la izquierda* en P_0 a la curva. Análogamente se define la semitangente a la derecha.

El concepto de tangente de Severi es el siguiente: "Sea P un punto de una línea l de Jordan plana (esto se extiende análogamente al S_n) y tomemos un entorno suyo, contorno incluso, en el cual habrá un conjunto de puntos de l, que es finito y limitado. Consideremos de todas las semirrectas de origen P que proyectan los puntos de l contenidos en el entorno, que también es finito y limitado. Hagamos decrecer el radio del entorno, de modo que tienda a cero. Cada entorno, hemos dicho, determina un conjunto de semirrectas finito y limitado, y como el conjunto de todos estos conjuntos *limitados* de semirrectas es finito (por pertenecer a un haz), en virtud del teorema de Bolzano generalizado, existe por lo menos una semirrecta de acumulación, que llamaremos *semirrecta* tangente a l en P. Toda recta que contiene la semirrecta tangente en P, se llama *recta tangente*."

(*) ROSENTHAL.—Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven. Mathematische Annalen-Band 73.

(**) SEVERI F.—Topología.—Buenos Aires, 1931, pág. 21.

Probaremos que si hay tangente en el sentido de Rosenthal, ésta lo será también en el de Severi; en efecto, basta elegir como radios de los entornos usados por Severi, las distancias $P_0 P_i$.

Recíprocamente probaremos que si hay tangente en el sentido de Severi, ésta lo es en el de Rosenthal; en efecto, elegimos como punto P_i de Rosenthal, aquel de los puntos de la curva pertenecientes al entorno de orden i de Severi, tal que el t_i correspondiente sea el extremo superior de los t del entorno.

Severi demuestra que una curva simple de Jordan tiene por lo menos una semi-tangente en cada punto. Recta tangente es toda recta que contenga una semi-tangente.

La función $\omega(t)$.—Sea P_0 un punto de una curva simple de Jordan que tomaremos como origen de coordenadas polares, y sea $\omega(t)$ el argumento de las cuerdas que pasan por P_0 y por un punto de la curva. Consideremos un intervalo del parámetro $t_1 \leqq t \leqq t_0$ (t_i corresponde al punto P_i). Probaremos el siguiente:

Teorema: $\omega(t)$ *es contínua en todo punto del intervalo distinto de* t_0.

En efecto, sea t un valor del intervalo y P el punto correspondiente, elegimos en el intervalo t_1, t un valor del parámetro t_2. Consideremos los triángulos P_2, P_0, P_1 y sea α el ángulo formado por $P_2 P_0$: $\alpha = | \omega(t) - \omega(t_2) |$.

Habremos probado la continuidad de $\omega(t)$ en t cuando para cada ε encontremos un t_2 tal que $\alpha < \varepsilon$.

Para eso trazaremos por P_0 y a ambos lados de $P_0 P$, rectas que formen con ella ángulos $\alpha < \varepsilon$, por la continuidad del arco P_0, P_1 una por lo menos de las rectas trazadas cortará a este arco en un punto P'; tomaremos $t_2 = t'$ con lo que tendremos $\alpha < \varepsilon$, lo que prueba la continuidad de $\omega(t)$.

Diremos que una recta que pasa por un punto P de una curva simple de Jordan es *infinitosecante* en este punto si el conjunto de los puntos de intersección de la recta con la curva tiene al punto P como punto de acumulación. Según la definición de tangente toda infinitosecante es una tangente.

Hemos visto que la función $\omega(t)$ estudiada en un intervalo $t_1 \leqq t \leqq t_0$ es continua para todo $t < t_0$; en el punto

$t = t_0$, no es necesariamente continua ni finita; pueden ocurrir los siguientes casos:

$\omega(t)$ continua a la izquierda en t.	$\omega(t_0 - 0)$ finita. Hay semitangente unicamente a la izquierda.	a) P punto aislado del conjunto de las intersecciones.	1er. caso
		b) P punto de acumulación de intersecciones, es decir la tangente es infinitosecante.	2º "
	$\omega(t_0 - 0)$ infinita.		3er. "
$\bar{\omega}(t)$ discontinua de segunda especie, de amplitud α, a la izquierda en t_0.	$\alpha \leqq 2\pi$		4º "
	$\alpha > 2\pi$ (finito)		5º "
	α (infinito)		6º "

Clasificación de los puntos de una curva de Jordan.—Adoptaremos como criterio el comportamiento de la función $\omega(t)$, siendo sosten del haz el punto que se estudia. Damos conjuntamente la interpretación geométrica de cada caso. Resultan los siguientes tipos de puntos:

Tipo I - $\omega(t)$ caso 1º.—Son los únicos que pueden pertenecer a curvas de orden finito, tienen una sola semitangente a la izquierda no infinitosecante.

Tipo II - $\omega(t)$ caso 2º.—Llamaremos a estos puntos *sinuosos de amplitud cero*; tienen una sola semitangente a la izquierda, que es infinitosecante.

Tipo III - $\omega(t)$ caso 4º.—Llamaremos a estos puntos *sinuosos de amplitud* α; en cada uno existe un ángulo $\alpha \leqq 2\pi$ de semitangentes a la izquierda del punto.

Tipo IV - $\omega(t)$ casos 3º, 5º y 6º.—Llamaremos a estos puntos *espirales*. Se caracterizan porque toda semirrecta que tiene como origen el punto es infinitosecante y por lo tanto es semitangente.

Daremos ahora algunos teoremas referentes al conjunto de singularidades de una curva de Jordan:

TEOREMA I.—*En toda curva* j *de Jordan hay puntos que no son espirales.*

En efecto, sea P_0 un punto del plano que no pertenezca a la curva j; si recorremos el segmento $P_0 P_1$ en el sentido P_0, P_1 por ser j un conjunto cerrado habrá un primer punto de intersección P' con j, el cual no puede ser espiral por definición, puesto que la semirrecta P_0, P' no es una infinitosecante.

TEOREMA II.—*En una curva de Jordan el conjunto* A *de valores del parámetro* t *para los puntos correspondientes no son espirales, es denso en cualquier intervalo.*

Demostraremos el teorema probando que en todo intervalo dl parámetro t hay algún punto del conjunto A. Sea t_1, t_2 un intervalo del parámetro t que tenga a t_0 como punto interior. Sea además σ un entorno circular suficientemente pequeño para que no contenga puntos de j que no sean del intervalo $P(t_1)$, $P(t_2)$. Sea M un punto de σ no perteneciente a j. El segmento $M P_0$ recorrido en el sentido M, P_0 encontrará la curva en un primer punto Q que pertenece al entorno $t_1 t_0$ y al conjunto A con lo que queda demostrado el teorema.

OBSERVACION 1ª.—*Hay curvas de Jordan tales que todos sus puntos sean del tipo III.*

Ejemplo: la curva de Koch se construye de la siguiente manera: se divide un segmento $a=MN$ en tres partes, sobre la segunda de ellas se construye un triángulo equilátero, suprimiéndose ese segmento, sobre cada uno de los restantes segmentos y sobre los otros dos lados del triángulo se repite la construcción, y así sucesivamente. Los vértices de ángulos formados con esta construcción son puntos definitivos. Tomemos uno de ellos, por ejemplo, el A vértice del primer triángulo construído. El ángulo NAM es de semitangentes; por lo tanto es un punto sinuoso de amplitud: $\alpha = 30^\circ$.

OBSERVACION 2ª.—*Hay curvas de Jordan en las que el conjunto de puntos espirales es denso en cualquier intervalo.*

Ejemplo: Consideremos la serie $0 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots$

Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ los términos de esa serie y $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ la sucesión de sumas de los $n+1$ primeros términos.

Consideremos los puntos:

$$A_n \begin{cases} x = \frac{5}{6} S_i, & Y = \frac{5}{9} a_i \quad \text{para } n = 2i \\ x = \frac{5}{6} S_{i-1}, & Y = \frac{5}{9} a_i \quad \text{para } n = 2i - 1, \end{cases}$$

y los puntos:

$$B_n \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3} S_i, & Y = -\frac{4}{9} a_i \quad \text{para } n = 2i \\ x = 1 - \frac{2}{3} S_{i-1}, & Y = -\frac{4}{9} a_i \quad \text{para } n = 2i - 1, \end{cases}$$

las dos sucesiones tienen como límite el punto: $M\,(^5/_9, 0)$; en efecto: $\lim\limits_{i\to\infty} S_i = \frac{2}{3}$, $\lim a_i = 0$ y reemplazando resulta lo que se quería demostrar.

Uniendo los puntos A_i ordenadamente por una poligonal lo mismo que los B_i, resulta un arco de Jordan que tiene el punto M como punto espiral y los mismos extremos A_0 y B_0 que el segmento $A_0 B_0$.

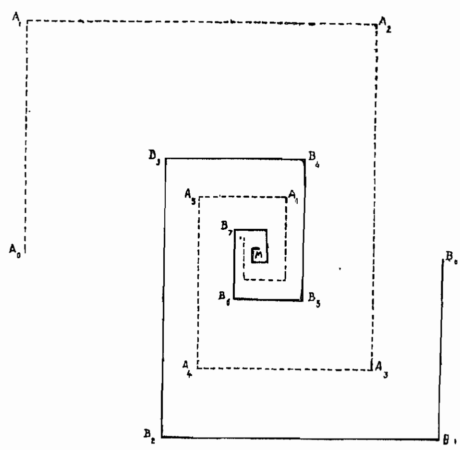
Aplicar la operación E a un segmento a, es reemplazar el segmento por una construcción semejante a la dada, en la que los extremos del segmento sean los homólogos de A_0 y B_0. Aplicar la operación E' a un segmento b es reemplazar este segmento por una construcción semejante a la indicada en la cual los extremos de b son homólogos, uno de M y otro de A_0 o de B_0.

Dividamos el segmento $A_1 A_2$ de la construcción en $9\,p. + 8$ partes; con las 4 primeras y las 4 últimas se forman dos segmentos a' y con cada 9 de los restantes otros p segmentos a. Apliquemos a los a' la operación E' y a los a la operación E. Queda así el segmento $A_1 A_2$ reemplazado por $p + 2$ arcos de Jordan, cada uno con un punto del tipo IV, que estará seguramente sobre el segmento $A_1 A_2$. Repitamos esta operación en todos los segmentos $A_i A_{i+1} > \frac{1}{10} A_0 B_0$ y llamaremos operación π (*). Apliquemos nuevamente la operación π a todos los segmentos mayores que $\frac{1}{10^2}$, luego a los mayores que

(*) Sólo habrá una pequeña variante en los segmentos como el $A_3 A_4$ en los cuales la división deberá hacerse en $9\,p + 12$ partes.

$\frac{1}{10^3}$ y así siguiendo obtenemos una sucesión de curvas. Demostremos que el límite es una curva de Jordan.

Construcción E



Modelo de construcción π

Para asegurarse de que las construcciones $A_4\, A_5$ por ejemplo no van a superponerse con las $B_3\, B_2$ que es el inmediato próximo, basta elegir p de manera que satisfaga a la desigualdad $\frac{8}{9\,p+8} < \frac{1}{16}$ como es inmediato demostrarlo.

Para demostrar el teorema habrá que probar que se puede elegir el parámetro de manera que el conjunto de valores correspondientes a puntos como el M es denso.

Para probarlo establecemos el siguiente homeomorfismo:

Sea la sucesión $S_0 = 0$, $\quad S_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}}$.

Hagamos corresponder a los puntos A_i los valores $t_i = S_i$ y a los puntos B_i, $t_i = 1 - S_i$, a los segmentos $A_i\, A_{i+1}$ el intervalo $t_i\, t_{i+1}$. Si para cada segmento de la construcción π repetimos este homeomorfismo, tendremos el homeomorfismo de todas las curvas. Se ve inmediatamente que el conjunto de puntos extremos de segmentos es denso.

(Original recibido en agosto de 1939).