MANUEL BALANZAT

Fórmulas Integrales de la Intersección de Conjuntos

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación Nº 14

BUENOS AIRES

1940

FORMULAS INTEGRALES DE LA INTERSECCION DE CONJUNTOS

Por MANUEL BALANZAT

Consideremos un conjunto de puntos C_1, medible en el sentido de Lebesgue y fijo. Supongamos además otro conjunto C_2 móvil en el mismo espacio de una manera rígida, es decir, sin que se pueda deformar. En algunos casos uno de estos conjuntos se puede reducir a un conjunto de un número finito de puntos.

La *posición* del conjunto móvil, vendrá determinada por un cierto número de parámetros, $t_1, t_2, t_3, \ldots t_r$ (a lo sumo serán $\frac{p(p+1)}{2}$, siendo p el número de dimensiones pero pueden ser menos si se trata de un conjunto infinito que admita desplazamientos que lo dejen invariable, como son las bandas de plano limitadas por rectas paralelas, las bandas de espacio limitadas por planos paralelos, la parte de espacio interior a un cilindro, etc...). Para cada posición del conjunto móvil C_2 su *intersección* con el fijo C_1 será otro conjunto, medible Lebesgue y cuya medida que representaremos por $m\,(C_1, C_2)$ será una función de la posición de C_2 o sea de $t_1, t_2, t_3, \ldots t_r$. Eligiendo convenientemente estos parámetros la integral

$$\int m\,(C_1, C_2)\, d\,t_1\; d\,t_2\; d\,t_3 \;\ldots\; d\,t_r$$

se puede calcular en función de las medidas de C_1 y C_2.

El objeto de este trabajo es la generalización para conjuntos cualesquiera de estas fórmulas integrales que, para casos más simples, han sido demostradas en diversos trabajos de Geometría Integral. Nosotros necesitaremos únicamente suponerlas conocidas para segmentos, cuadrados o cubos y de ahí pasaremos al caso general de ser conjuntos medibles cualesquiera.

I. PROBLEMAS SOBRE LA RECTA

1) Consideremos un conjunto de puntos L_1 fijo sobre la recta y otro L_2 móvil, ambos medibles Lebesgue y de medida *finita*. La posición del segundo queda determinada por la abscisa x de uno cualquiera de sus puntos; para cada valor de x consideremos la medida del conjunto intersección de L_1 y L_2. Representémosla por $m_1(L_1, L_2)$, es evidentemente una función de x y vamos a demostrar que

$$[1] \quad \int_{-\infty}^{+\infty} m_1(L_1, L_2)\, d\,x = m_1(L_1) \,.\, m_1(L_2).$$

En efecto, consideremos primeramente el caso en que ambos conjuntos sean acotados, en este caso si l' y l'' son los *diámetros*, bastará considerar la integral en un intervalo finito (a, b) de longitud a lo más igual a $l'' + l'$, ya que fuera de él $m_1(L_1, L_2)$ será siempre cero. La fórmula [1] se reduce a

$$[2] \quad \int_{a}^{b} m_1(L_1, L_2)\, d\,x = m_1(L_1) \,.\, m_1(L_2).$$

Para el caso en que L_1 y L_2 se reduzcan a dos segmentos la demostración se hace directamente sin dificultad:

En efecto, sean l_1 y l_2 las longitudes de los segmentos y supongamos por ejemplo $l_1 \gtreqless l_2$. Si α es el origen del segmento fijo, su otro extremo será $\alpha + l_1$ y si el segmento móvil tiene por extremos x y $x + l_2$, la integral buscada será:

$$\int_{a-l_2}^{a} (x+l_2-\alpha)\,dx + \int_{a}^{a+l_1-l_2} l_2\,dx + \int_{a+l_1-l_2}^{a+l_1} (\alpha+l_1-x)\,dx = l_1 \,.\, l_2 \,.$$

Consideremos ahora el caso en que L_1 sea un segmento y L_2 un conjunto cualquiera medible. Entonces existe un conjunto abierto O que contiene a L y cuya medida difiere de la de éste en menos de ε.

Como todo conjunto abierto es igual a una suma ΣE_i de segmentos sin parte común, se puede poner:

$$m_1(L_1, L_2) = m_1(L_1, O - E) = m_1(L_1\, O) - m_1(L_1\, E) =$$
$$= m_1(L_1, \Sigma E_i) - m_1(L_1\, E) = \Sigma\, m_1(L_1\, E_i) - m_1(L_1\, E),$$

donde los E_i son segmentos sin parte común y E es un conjunto de medida menor que ε.

Tenemos por tanto:

$$\int_b^a m_1(L_1, L_2)\,dx = \int_a^b [\Sigma m_1(L_1, E_i) - m_1(L_1, E)]\,dx =$$

$$= \sum \int_a^b m_1(L_1, E_i)\,dx - \int_a^b m_1(L_1, E)\,dx\,.$$

Como la fórmula [2] es válida para el caso de dos segmentos tenemos:

$$\sum \int_a^b m_1(L_1, E_i)\,dx = \Sigma m_1(L_1)\,.\,m_1(E_i) = m_1(L_1)\,.\,m_1(O) =$$

$$= m_1(L_1)\,.\,m_1(L_2) + m_1(L_1),\, m_1(E)\,.$$

y por tanto,

$$\int_a^b m_1(L_1, L_2)\,dx = m_1(L_1)\,.\,m_1(L_2) + m_1(L_1)\,.\,m_1(E) - \int_a^b m_1(L_1, E)\,dx$$

Ahora bien, *como* $m_1(E) < \varepsilon$ *y con igual razón lo será* $m_1(L_1, E)$, tendremos

$$m_1(L_1)\ m_1(E) < \varepsilon\, m_1(L_1)$$

y

$$\int_a^b m_1(L_1, E)\,d\,x < \varepsilon\,(b - a)\,,$$

y haciendo tender ε a cero deducimos:

$$[3] \qquad \int_a^b m_1(L_1, L_2)\,d\,x = m_1(L_1)\,.\,m_1(L_2)$$

para el caso en que L_1 es un segmento y L_2 es un conjunto cualquiera medible Lebesgue.

El paso de esta fórmula al caso general en que L_1 y L_2 son dos conjuntos cualesquiera, se hace análogamente, descomponiendo L_1 en la forma $L_1 = \Sigma E_i - E$ donde los E_i son segmentos sin puntos comunes y la medida E es menor que ε.

Siguiendo el mismo procedimiento anterior establecemos que

$$\int_a^b m_1(L_1, L_2)\,dx = \Sigma \int_a^b m_1(E_i L_2)\,dx - \int_a^b m_1(E_1 L_2)\,dx$$

y teniendo en cuenta la fórmula [3] deducimos igualmente

$$\int_b^a m_1(L_1, L_2)\,dx = m_1(L_1)\,.\,m_1(L_2) + m_1(E)\,.\,m_2(L_2) - \int_a^b m_1(E, L_2)\,dx\,.$$

Haciendo tender ε a cero se deduce

$$\int_b^a m_1\,(L_1, L_2)\,d\,x = m_1\,(L_1)\;\;m_2\,(L_2)$$

que puede ponerse en la forma

$$[4] \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} m_1\,(L_1, L_2)\,d\,x = m_1\,(L_1)\;\;m_2\,(L_2)$$

ya que $m_1\,(L_1, L_2)$ es nula en el exterior de (a, b) .

Hemos demostrado por consiguiente la fórmula para el caso en que los dos conjuntos son medibles y *acotados,* pasemos ahora al caso general en que pueden ser *no acotados,* aunque siempre de medida *finita.*

Podemos efectuar la descomposición de L_1 y L_2 en una infinidad numerable de conjuntos acotados y disjuntos E_i y F_j, tales que $L_1 = \Sigma\,E_i$ y $L_2 = \Sigma\,F_j$ y por tanto

$$m_1\,(L_1) = \Sigma\,m_1\,(E_i) \qquad m_1\,(L_2) = \Sigma\,m_1\,(F_j)$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m_1(L_1, L_2)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{ij} m_1(E_i, F_j)\,dx = \sum_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} m_1(E_i, F_j)\,dx$$

y teniendo en cuenta lo establecido en [4] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m_1(L_1, L_2)\,dx = \sum_{i,j} m_1(E_i)\,.\,m_1(F_j) = \sum_i m_1(E_i) \sum_j m_1(F_j)$$
$$= m_1(L_1)\,m_1(L_2)$$

como queríamos demostrar.

2) *Caso en que uno de los conjuntos se reduce a un número finito de puntos.*

Consideremos ahora el caso de un conjunto L medible Lebesgue, fijo sobre la recta y un conjunto móvil N compuesto de un número finito de puntos n. Consideremos para cada posición de L el número de puntos comunes a N y L. Representémosle por $m_0(N, L)$; vamos a demostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m_0(N, L)\, d\, x = n\, m_1(L)$$

donde $m_1(L)$ es la medida de Lebesgue de L.

En efecto consideremos primeramente el caso en que el conjunto N se reduzca a un solo punto, entonces $m_0(N, L)$ es la función característica del conjunto L y como sabemos que la integral de la función característica de un conjunto es la medida de éste, el teorema está demostrado.

Si el conjunto N se compone de un número finito de puntos n, consideremos las funciones $m_0{}^i(N, L)\,(1 \leqq i \leqq n)$ correspondientes a cada uno de los puntos del conjunto, tendremos

$$m_0(N, L) = \sum_1^n m_0{}^i(N, L)$$

y teniendo en cuenta que el teorema ha sido demostrado para el caso de un punto único deduciremos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m_0(N, L)\, d\, x = \sum_1^n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i\, d\, x = n\, m_1(L)$$

que es lo que queríamos demostrar.

3) Problemas análogos pueden estudiarse para conjuntos de puntos situados sobre la circunferencia (curva plana de curvatura constante) y la hélice (curva alabeada de torsión y curvatura constantes) sobre las que puede desplazarse un conjunto sin sufrir deformación alguna; para ello basta observar que tomando como equivalentes a los segmentos lineales, los arcos de circunferencia o hélice, puede construirse, para los conjuntos arbitrarios de puntos situados sobre dichas curvas una teoría de la medida lineal de Lebesgue; deduciéndose por consiguiente, proposiciones análogas a las anteriores sin más que cambiar en los enunciados la palabra conjunto lineal por la de conjunto sobre la circunferencia o sobre la hélice.

II. PROBLEMAS EN EL PLANO

1) Consideremos en el plano dos conjuntos A_1 y A_2 medibles-Lebesgue y de medida finita. Supongamos uno de ellos A_1 fijo y el otro A_2 móvil; la posición de este último vendrá determinada por las coordenadas, x, y, de uno de sus puntos y una rotación φ alrededor del mismo.

Para cada sistema de valores de estos parámetros determinemos la medida del conjunto intersección de los dos dados, sea $m_2(A_1, A_2)$, esta medida, es evidentemente una función de x, y, φ; consideremos la integral

$$\int m_2(A_1, A_2)\, d\, K\,;$$

a pesar de tratarse de una integral triple empleamos por brevedad un solo signo integral, y $d\,K$ en lugar de $d\,x\,d\,y\,d\,\varphi$; $d\,K$ es la llamada *densidad cinemática* en Geometría Integral (1).

Vamos a demostrar que

$$[1] \qquad \int m_2(A_1, A_2) dK = 2\pi m_2(A_1) \,.\, m_2(A_2)$$

En efecto, para el caso en que los conjuntos A_1 y A_2 sean dos cuadrados el teorema ha sido demostrado (2). Supongamos ahora que los dos conjuntos sean cualesquiera pero medibles y acotados; en ese caso podemos descomponerlos en la forma $A_1 = O_1 - E$, $A_2 = O_2 - F$ donde O_1 y O_2 son dos conjuntos abiertos, y E y F son dos conjuntos de medida menor que ε.

Por consiguiente tendremos

$$O_1 = A_1 + E,\ O_2 = A_2 + E \text{ y } O_1 \times O_2 = A_1 \times A_2 + A_1 \times F + A_2 \times E + E \times F$$

representado por el signo $\times$ la intersección de los conjuntos. De aquí deducimos:

$$[2] \quad \int m_2(A_1, A_2) dK = \int m_2(O_1, O_2) dK - \int m_2(A_1, F) dK - \int m_2(E, A_2) dK - \int m_2(E, F) dK$$

(1) Ver W. Blaschke "*Vorlesungen über Integralgeometrie I*", Hamburger Mathematische Einzelschriften. 1936. pág. 20.

(2) Ver Blaschke, loc. cit. o L. A. Santaló "*Geometría Integral* 4. *Sobre la medida cinemática en el plano*". Hamburg. Abhandlungen, 11.

pero por ser O_1 y O_2 conjuntos abiertos se pueden descomponer en la forma $O_1=\Sigma E_i, O_2=\Sigma F_j$ donde los E_i y F_j son respectivamente cuadrados rampantes. Por tanto y teniendo en cuenta que la fórmula [1] es válida para cuadrados, y que las fronteras comunes de éstos no influyen en m_2,

$$[3] \quad \int m_2\,(O_1, O_2)\,d\,K = \int \sum_{ij} m_2\,(E_i, F_j)\,d\,K =$$

$$\sum_{ij} \int m_2\,(E_i, F_j)\,d\,K = 2\,\pi \sum_{ij} m_2\,(E_i)\,.\,m_2\,(F_j) = 2\,\pi\,m_2\,(O_1)\,.\,m_2\,(O_2)$$

y teniendo en cuenta que

$$m_2\,(O_1) = m_2\,(A_1) + m_2\,(E) \quad \text{y} \quad m_2\,(O_2) = m_2\,(A_2) + m_2\,(F)$$

obtenemos

$$m_2(O_1)\,.\,m_2(O_2) = m_2(A_1)\,.\,m_2(A_2) +$$
$$m_2(E)\,.\,m_2\,(A_2) + m_2(A_1)\,.\,m_2(F) + m_2(E)\,.\,m_2(F)$$

y teniendo en cuenta [2] y [3]:

$$\int m_2(A_1, A_2)dK = 2\pi m_2(A_1)\,.\,m_2(A_2) + 2\pi m_2(E)\,.\,m_2(A_2) +$$
$$+ 2\pi m_2(A_1)\,.\,m_2(F) + 2\pi m_2(E)\,.\,m_2(F) - \int m_2(A_1, F)dK -$$
$$- \int m_2(E\ A_2)dK - \int m_2(EF)dK$$

Ahora bien, los términos segundo, tercero y cuarto del segundo miembro de la igualdad anterior son, respectivamente, menores que

$$2\,\pi\,m_2\,(A_2)\,.\,\varepsilon, \quad 2\,\pi\,m_2\,(A_1)\,\varepsilon \quad \text{y} \quad 2\,\pi\,\varepsilon^2\,.$$

Por otra parte, como los conjuntos A_1 y A_2 son acotados para valores de x e y mayores que dos números fijos a y b la intersección de ambos será un conjunto nulo, luego podemos limitar la integración al dominio de las variables x, y, φ ($O \leqq x \leqq a,\ O \leqq y \leqq b,\ \ O \leqq \varphi \leqq 2\,\pi$) de volumen finito $2\pi ab$; en este caso como las funciones que se integran en el quinto, sexto y séptimo términos, del segundo miembro de la igualdad anterior, son menores que ε, estos términos, por el teorema del valor medio serán menores que $\varepsilon\,.\,2\,\pi\,a\,.\,b$.

Por consiguiente haciendo tender ε a cero deducimos que

$$\int m_2 (A_1 A_2)\, d K = 2 \pi\, m_2 (A_1) \,.\, m_2 (A_2)$$

quedando por tanto, demostrada la fórmula para conjuntos acotados.

Para conjuntos no acotados descompongamos A_1 y A_2 en una suma numerable de conjuntos acotados, disjuntos y medibles, cosa siempre posible pues basta tomar M_i y N_j como intersecciones, de los conjuntos A_1 y A_2, respectivamente con la corona circular de radios n y $n - 1$, y tendremos

$$\int m_2 (A_1, A_2)\, d K = \int \sum_{ij} m_2 (M_i, N_j)\, d K$$

y como la fórmula [1] la hemos demostrado para conjuntos acotados tendremos

$$\int m_2(A_1,A_2) dK = 2\pi \sum_{ij} m_2(M_i) \,.\, m_2(N_j) dK = 2\pi m_2(A_1) \,.\, m_2(A_2)$$

que es lo que queríamos demostrar.

2) *Caso en que uno de los conjuntos se reduce a un número finito de puntos.*

Consideremos ahora un conjunto plano medible Lebesgue A, fijo, y un conjunto móvil N, compuesto de un número finito de puntos; la posición de este último quedará como en el caso anterior determinada por los tres parámetros x, y, φ; a cada sistema de valores de estos parámetros podemos hacer corresponder el número de puntos de N que son también puntos del conjunto A, representemos esta función de x, y, φ por $m_0 (N, A)$ y vamos a demostrar que

$$[4] \qquad \int m_0 (N, A)\, d K = 2 \pi\, n\, m_2 (A) \,.$$

En efecto consideremos primeramente el caso en que el conjunto N se reduce a un solo punto, en ese caso $m_0 (N, A)$ no depende de φ y podemos poner, por tanto,

$$\int\int\int m_0 (N, A)\, d x\, d y\, d \varphi = \int_0^{2\pi} d \varphi \int\int m_0 (N, A)\, d x\, d y$$

pero como $m_0 (N, A)$ es en este caso la función característica del conjunto A, se tendrá

$$\int\int m_0 (N, A) \, d\, x \, d\, y = m_2 (A)$$

y por tanto

$$\int_0^{2\pi} d\, \varphi \int\int m_0 (N, A) \, d\, x \, d\, y = \int_0^{2\pi} m_2 (A) \, d\, \varphi = 2 \, \pi \, m_2 (A)$$

que es lo que queríamos demostrar.

Para el caso en *que el conjunto* se componga de n *puntos* tendremos considerando las funciones $m_0^i (N, A)$ correspondientes a cada uno de los puntos del conjunto

$$m_0 (N, A) = \sum_1^n m_0^i (N, A)$$

y teniendo en cuenta que el teorema ha sido demostrado para el caso de un solo punto deduciremos:

$$\int m_0 (N, A) \, d\, K = \sum_1^n \int m_0^i (N, A) \, d\, K = 2 \, \pi \, n \, m_2 (A)$$

que es lo que queríamos demostrar.

(3) *Caso en que uno de los conjuntos es de extensión infinita.*

Hasta ahora hemos considerado figuras acotadas o no acotadas, pero de medida finita; vamos ahora a estudiar algunas fórmulas integrales en las que intervienen figuras de extensión infinita.

Sea, por ejemplo, un par de rectas paralelas situadas a una distancia constante l, supongamos esta figura móvil en el plano; su posición queda determinada conociendo la de la paralela que equidista de las dos dadas; la posición de esta queda determinada por los parámetros ϱ y θ siendo ϱ la distancia a la recta desde un origen fijo y θ el ángulo que forma la normal a la recta con una dirección fija.

Si A es un conjunto plano fijo, de medida finita $m_2 (A)$ y acotado, para cada posición de la banda determinemos la medida del conjunto intersección de A y la banda de plano limitada por las dos paralelas; llamemos $m_2(B, A)$ dicha medida y vamos a demostrar que

$$[5] \qquad \int m_2(B, A)\, dB = \pi\, l\, m_2(A)$$

esta fórmula, en la que es $dB = d\varrho\, d\theta$ la *densidad cinemática* para bandas paralelas, es válida para el caso de ser A un cuadrado. (3).

Descompongamos, de una manera análoga a lo hecho anteriormente, el conjunto A en la forma $A = O - E = \Sigma E_i - E$ donde los E_i son cuadrados no rampantes (aunque pueden tener fronteras comunes) y E es un conjunto de medida menor que ε.

Tenemos por consiguiente, ya que podemos considerar, para la medida superficial, los conjuntos E_i que tienen comunes partes lineales como si fueran conjuntos desunidos,

$$\int m_2(B, A)\, dB = \Sigma \int m_2(B, E_i)\, dB - \int m_2(B, E)\, dB$$

pero como la fórmula [5] es válida para cuadrados tenemos

$$\sum \int m_2(B, E_i)\, dB = \pi\, l\, \Sigma\, m_2(E_i) = \pi\, l\, m_2(0) =$$
$$= \pi\, l\, m_2(E) + \pi\, l\, m_2(A)\,.$$

donde $\qquad \pi\, l\, m_2(E) < \pi\, l\, \varepsilon\,.$

Por otra parte, si el conjunto es acotado, a partir de un cierto valor ϱ_0 de ϱ las bandas no cortan a A, luego podemos integrar entre cero y ϱ_0 para ϱ y entre cero y 2π para θ y por tanto

$$\int m_2(B, E)\, dB < 2\pi\, \varrho_0\, \varepsilon$$

y haciendo tender ε a cero, deducimos

$$\int m_2(B, A)\, dB = \pi\, l\, m_2(A)$$

(3) Ver L. A. Santaló, *Geometría Integral 7. Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinemática en el plano*". Rev. Ac. Ciencias de Madrid, 1936.

quedando por tanto demostrada la fórmula para conjuntos acotados.

Para los no acotados, aplicaremos el procedimiento anterior descomponiendo a A en una suma de una infinidad numerable de conjuntos acotados y disjuntos obteniendo así el resultado.

Si en lugar de considerar la banda consideramos un conjunto de rectas paralelas, cuya sección normal sea un conjunto de medida lineal l, descomponiendo análogamente dicho conjunto en una serie de bandas paralelas menos un conjunto de sección arbitrariamente pequeña, se demuestra la validez de la fórmula [5] para este caso más general.

4) *Caso en que uno de los conjuntos se reduce a una recta.*

Consideremos ahora una recta móvil en el plano y un conjunto de puntos A medible en el plano. La posición de la recta queda determinada por dos parámetros, ϱ que es la distancia a un punto fijo y θ, el ángulo que forma con una dirección fija.

Para cada posición de la recta determinemos la medida *lineal* de su intersección con A; sea $m_1\,(R, A)$ esta medida. Vamos a demostrar que:

$$[6] \qquad \int m_1\,(R, A)\; d\,G = \pi\, m_2\,(A)$$

donde $d\,G = d\,\varrho\; d\,\theta$, es la densidad para conjuntos de rectas en el plano.

La fórmula [6] ha sido demostrada para el caso en que A es un cuadrado (4), vamos a probarla ahora para un conjunto abierto 0; este puede en efecto descomponerse en una suma $\Sigma\, E_i$ de una infinidad numerable de cuadrados que pueden tener fronteras comunes; éstas serán también numerables, luego excluyendo del dominio de integración el conjunto numerable de puntos (ϱ, θ) que corresponde a las fronteras comunes tendremos

$$\int m_1(R, 0)dG = \int \Sigma m_1(R, E_i)dG = \Sigma \int m_1(R, E_i)dG = \pi\Sigma m_2(E_i) =$$
$$= \pi\, m_2\,(0)\;.$$

Descompongamos ahora el conjunto A en la forma $A = O - E$,

---

(4) Ver Deltheil, "*Probabilités géométriques*".

donde O es un conjunto abierto cuya medida difiere de la de A en menos de ε. Por tanto

$$[7] \quad \int m_1(R, A)dG = \int m_1(R, O)dG - \int m_1(R, E)dG = \pi m_2(O) - \int m_2(R, E)dG$$

para acotar el segundo miembro no podemos, como en los casos anteriores, acotar el valor de la función que se integra, ya que de que E sea de medida *superficial* menor que ε no se deduce que lo sea $m_1\ (R, E)$ que puede incluso ser infinita.

Pero observando que si E es medible existe un conjunto abierto O tal que $m\ (O) < 2\,\varepsilon$ y $O > E$ tendremos que como $R \times O > R \times E$,

$$m_1\ (R \times O) \gtreqless m_1\ (R, E)$$

y por tanto

$$\int m_1\ (R, E)\ d\,P \leqq \int m_1\ (R, O)\ d\,P = \pi\ m_2\ (O) \leqq 2\,\pi\,\varepsilon$$

luego haciendo tender ε a cero en la fórmula [7] queda demostrada la proposición.

III. PROBLEMAS EN EL ESPACIO

1) Consideremos en el espacio dos conjuntos V_1 y V_2 móvil el primero y fijo el segundo. La posición de aquél queda determinada por seis parámetros, a saber: las tres coordenadas x, y, z de uno de sus puntos, más las coordenadas esféricas θ y φ de una dirección por este punto, más una rotación τ alrededor de esta dirección; si para cada posición determinamos la medida del conjunto de intersección de V_1 y V_2, esta medida será una función de los seis parámetros y vamos a demostrar que

$$[1] \quad \int m_3\ (V_1, V_2)\ d\,K = 8\,\pi^2\ m_3\ (V_1)\ m_3\ (V_2)$$

donde se ha puesto $d\,K = \text{sen}\ \theta\ d\,\theta\ d\,\varphi\ d\,x\ d\,y\ d\,z\ d\,\tau$ expresión diferencial que es la llamada *densidad cinemática del espacio* en Geometría Integral. Es sabido que esta fórmula es válida para el caso de ser los conjuntos dos cubos (5).

Para estudiar el caso general supongamos que los conjuntos sean acotados, ya que la generalización para los no acotados

(5) Blaschke: loc. cit. II, pág. 103.

sería análoga a la que se hizo en el caso del plano. Por ser los conjuntos acotados la integración puede limitarse a un dominio determinado por las condiciones

$$x' \leq x \leq x'',\ y' \leq y \leq y'',\ z' \leq z \leq z'',\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \tau \leq 2\pi,$$

y por tanto su volumen en el espacio de seis dimensiones es igual a $4\pi^3 (x'' - x') \times (y'' - y') \times (z'' - z')$, igual a un número finito H.

Como la fórmula [1] es válida para el caso en que los dos conjuntos sean cubos, nosotros vamos a considerar primeramente el caso en que uno de ellos V_1 sea un cubo y el otro un conjunto medible acotado cualquiera. En ese caso descompongamos V_2 en la forma $V = 0 - E = \Sigma E_i = E$ donde 0 es un conjunto abierto y por tanto los E_i son cubos no rampantes, con fronteras comunes o no. Por tanto obtendremos

$$\int m_3 (V_1, V_2)\, d K = \sum \int m_3 (V_1, E_i)\, d K - \int m_3 (V_1, E) d K$$

Ahora bien, como la fórmula ha sido demostrada para el caso de dos cubos, tendremos:

$$\sum \int m_3(V_1, E_i) dK = \Sigma 8\pi^2 m_3(V_1) . m_3 (E_i) = 8\pi^2 m_3(V_1) . m_3(0)$$
$$= 8\pi^2 m_3(V_1) . m_3(V_2) - 8\pi^2 m_3(V_1) . m_3(E)$$

y por tanto

$$\int m_3(V_1, V_2) dK = 8\pi^2 m_3(V_1) . m_3(V_2) - 8\pi^2 m_3(V_1) . m_3(E) -$$
$$- \int m_3(V_1, E) dK$$

y como

$$8\pi^2 m_3(V_1) m_3(E) < 8\pi^2 m_3 (V_1) \varepsilon\, , \quad \int m_3(V_1, E) dK \leq \varepsilon H$$

haciendo tender ε a cero quedará demostrada la fórmula [1] para el caso en que uno de los conjuntos sea un cubo.

En el caso general en que V_1 y V_2 son conjuntos cualesquiera, descomponiendo V_1 en la forma $\Sigma E_i - E$ tendremos:

$$\int m_3 (V_1, V_2)\, d K = \sum \int m_3 (V_1, E_i)\, d K - \int m_3 (V_1, E)\, d K$$

y como la fórmula [1] acabamos de demostrarla para el caso de un conjunto cualquiera y un cubo, tendremos:

$$\int m_3\,(V_1,\,V_2)\;d\,K = \sum 8\pi^2\,m_3\,(V_1)\,.\,m_3\,(E_i) - \int m_3(V_1\,E)\;d\,K$$

$$= 8\,\pi^2\,m_3\,(V_1)\,.\,m_3\,(V_2) + 8\,\pi^2\,m_3\,(V_1)\,.\,m_3\,(E) - \int m_3\,(V_1\,E)\;d\,K$$

y haciendo tender ε a cero, como el segundo y tercer miembro del último término son respectivamente menores que $8\,\pi^2\,m_3\,(V_1)\,\varepsilon$ y $\varepsilon\,H$ tendremos demostrada la fórmula [1] para el caso general.

2) *Caso en que uno de los conjuntos se reduce a un número finito de puntos.*

Consideremos ahora un conjunto V medible Lebesgue fijo, y un conjunto móvil N compuesto de un número finito de puntos; la posición de este último quedará como en el caso anterior determinada por los seis parámetros $x,\, y,\, z,\, \theta,\, \varphi,\, \tau$; si para cada sistema de valores de estos parámetros, esto es para cada posición del conjunto N, determinamos el número de puntos del conjunto A que son también puntos de N, obtenemos una función de los seis parámetros, representémosla por $m_0\,(N,\,V)$ y vamos a demostrar que

$$[2] \qquad \int m_0\,(N,\,V)\;d\,K = 8\,\pi^2\,n\,m_3\,(V)$$

En efecto: consideremos primeramente, el caso en que el conjunto N se reduce a un solo punto, en ese caso $m_0\,(N,\,V)$ no depende de θ, φ, τ y podemos poner por tanto

$$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int m_0(N,V)\,\mathrm{sen}\theta\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz\,.\,d\theta\,.\,d\varphi\,.\,d\tau =$$
$$\int\!\!\int\!\!\int m_0(N,V)\,dx\,.\,dy\,.\,dz \int_0^{\pi} \mathrm{sen}\theta\,.\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\tau$$

pero como $m_0\,(N,\,V)$ es en este caso la función característica del conjunto V se tendrá:

$$\int\!\!\int\!\!\int m_0\,(N\,V)\;d\,x\,d\,y\,d\,z = m_3\,(V)$$

y por tanto

$$\int m_0(NV)\,dK = \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\tau.m_3(V) = 8\pi^2 m_3(V)$$

que es lo que queríamos demostrar.

Si el conjunto N se compone de un número n de puntos entonces m_0 (N, V) es la suma de las funciones $m_0{}^i$ que se obtendrían considerando aisladamente cada uno de los puntos del conjunto N, y por tanto obtendríamos

$$\int m_0(N,V)dK = \sum \int m_0{}^i(N,V)dK = 8\pi n m_3(V)$$

que es lo que queríamos demostrar.

3) *Caso en que uno de los conjuntos es de extensión infinita.*

Del mismo modo que consideramos en el plano una banda formada por dos rectas paralelas, podemos considerar ahora una banda formada por dos planos paralelos; la posición de ésta, supuesta móvil, queda determinada por la posición del plano paralelo a las bases y equidistante de ambas. Esta posición queda determinada por los tres parámetros ϱ, θ, φ siendo ϱ su distancia a un punto fijo y θ, φ las coordenadas esféricas de su normal. Sea V un conjunto medible y fijo y determinemos para cada posición de la banda la intersección de ésta con V; sea m_3 (B, V) dicha medida, vamos a demostrar que

$$[4] \qquad \int m_3\,(B\,V)\; d.B = 2\,\pi\, l\, m_3\,(V)$$

donde $d\,B = \operatorname{sen}\theta\; d\,\theta\, d\,\varphi\, d\,\varrho$ es la llamada *densidad cinemática* para franjas de planos paralelos, y l es la distancia entre las bases.

Esta fórmula ha sido demostrada para el caso en que V es un cubo (6). En el caso general descomponiendo V en la forma $V = O - E = \Sigma\, E_i - E$ donde los E_i son cubos no rampantes y E es de medida menor que ε; de igual manera que en el caso anterior tendremos:

$$\int m_3(BV)dB = \sum \int m_3(BE_i)dB - \int m_3(B,E)dB =$$
$$= 2\pi\Sigma l\,.\,m_3(E_i) - \int m_3(B,E)dB = 2\pi\, l m_3(O) - \int m_3(B,E)dB\,.$$

El primer término del segundo miembro, al tender ε a cero tiende a $2\,\pi\, l\, m_3\,(V)$ y el segundo, si V es acotado, es menor que $\varepsilon\, H$ siendo H un número finito igual al volumen del dominio

(6) Ver L. A. Santaló, loc. cit.

de integración que por ser V acotado lo podemos tomar de dimensiones finitas; como el primer miembro no depende de ε se deduce

$$\int m_3 (B, V)\, d\, B = O$$

como queríamos demostrar.

La generalización para conjuntos no acotados se hace idénticamente que en los casos anteriores.

Si consideramos el conjunto de planos paralelos tales que su sección por una recta normal sea un conjunto de medida l, un razonamiento análogo al hecho en el caso de las bandas planas, nos demostraría la validez de la fórmula [4] en esta hipótesis.

4) Podemos, en el espacio, considerar otra figura de extensión ilimitada, el cilindro; suponiéndolo móvil su posición queda determinada por los cinco parámetros $x, y, \theta, \varphi, \tau$ que son: x e y las coordenadas planas de la intersección de una generatriz con un plano normal, θ, φ las coordenadas esféricas de la dirección de la generatrices y τ un giro alrededor de la misma. Consideremos un conjunto medible V, que podemos suponerlo acotado ya que la generalización para los no acotados se obtendrá de manera idéntica a los casos anteriores. Determinemos la medida de la intersección del cilindro con V; sea $m\ (C, V)$ la medida de esta intersección vamos a demostrar que:

$$[5] \qquad \int m_3\ (C, V)\ d\ C = 8\ \pi^2\ S\ m_3\ (V)$$

donde S es el área de la sección recta del cilindro y $d\,C =$ sen $\theta\, d\, \theta\, d\, \varphi\, d\, x\, d\, y\, d\, \tau$ es la *densidad para conjuntos de cilindros* (7).

La demostración, por ser la fórmula cierta para el caso de ser V un cubo, es análoga a la del caso anterior; descomponiendo V en la forma $O - E = \Sigma E_i - E$ tendremos de igual manera que en el caso anterior:

$$\int m_3(C,V)dC = \sum \int m_3(C,E_i)dC - \int m_3(C,E)dC =$$
$$= 8\pi^2 S \Sigma m_3(E_i) - \int m_3(C,E)dC = 8\pi^2 S m_3(O) - \int m_3(C,E)dC\ .$$

(7) Ver L. A. Santaló, *"Integralgeometrie* 5. *Uber das kinematische Mass in Raum"*. París, 1935. (Colección "Actualités scientifiques et industrielles").

Haciendo tender ε a cero el primer término del segundo miembro tiende a $8\,\pi^2\,S\,m_3\,(V)$.

Por ser V acotado podemos limitar la integración a un dominio determinado por las condiciones

$$x' \leqq x \leqq x'', \quad y' \leqq y \leqq y'', \quad O \leqq \varphi \leqq 2\pi, \quad O \leqq \theta \leqq \pi, \quad O \leqq \tau \leqq 2\pi\,.$$

Su volumen en el espacio de cinco dimensiones será $\Delta = 4\,\pi^3\,(x'' - x')\,(y'' - y')$, y por tanto tendremos

$$\int m_3\,(C, E)\;d\,C \leqq \Delta\,\varepsilon$$

luego esta integral tiende a cero al tender ε a cero.

Por tanto, deducimos:

$$\int m_3\,(C, V)\;d\,C = 8\,\pi^2\,S\,m_3\,(V)$$

que es lo que queríamos demostrar.

El cilindro considerado aquí puede estar determinado por un conjunto plano medible cualquiera y por consiguiente estará formado por el conjunto de rectas paralelas a una dirección dada que pasan por los puntos de dicho conjunto plano. La generalización del resultado anterior para este caso se obtendría descomponiendo el conjunto plano en la misma forma que lo hicimos anteriormente, quedando el cilindro descompuesto en prismas cuadrangulares, menos un cilindro tal que la medida de su sección sea arbitrariamente pequeña; la repetición del razonamiento empleado para el caso anterior nos daría el resultado.

5) *Caso en que uno de los conjuntos se reduce a un plano.*

Supongamos ahora un plano móvil; su posición quedará determinada por tres parámetros: ϱ distancia a un punto fijo y θ y φ coordenadas esféricas de su normal. Consideremos un conjunto medible V y para cada posición del plano móvil determinemos la medida plana de su intersección con V; sea $m_2\,(P, V)$ esta medida, vamos a demostrar que

$$[6] \qquad \int m_2\,(P, V)\;d\,E = 2\,\pi\,m_3\,(V)$$

donde $d\,E = sen\,\theta\;\;d\,\theta\,d\,\varphi\,d\,\varrho$ es la *densidad* para conjuntos de planos.

En efecto, esta fórmula es válida para cuadrados (8), y vamos a demostrarla ahora para conjuntos abiertos; para ello basta tener en cuenta que con un razonamiento análogo al empleado en el caso de la recta y un conjunto plano, podemos despreciar las fronteras comunes a los cubos en que podemos descomponer O, haciendo luego un razonamiento análogo se obtiene la demostración. Ahora bien, poniendo V en la forma $O - E$ tendremos:

$$\int m_2(P,V)dE = \int m_2(P,O)dE - \int m_2(P,E)dE = 2\pi m_3(V) - \int m_2(P,E)dE .$$

Puesto que E es medible podemos encontrar un conjunto abierto O' tal que $O' > E$ y $m_3(O') < 2\varepsilon$ y por tanto $m_2(P,E) \leqq m_2(P,O')$, luego

$$\int m_2 (P, E)\, d\, E \leqq \int m_2 (P, O')\, d\, E \leqq 4\, \pi\, \varepsilon$$

y haciendo tender ε a cero deducimos

$$\int m_2 (P, V)\, d\, E = 2\, \pi\, m_3\, (V)$$

como queríamos demostrar.

6) *Caso en que uno de los conjuntos se reduce a una recta.*

Si en lugar de un plano tomamos una recta móvil y consideramos la medida lineal $m_2\ (R, V)$ de su intersección con un conjunto medible en el espacio, V tendremos que se verifica también:

$$[7] \qquad \int m_1\ (R, V)\ d\ G = 2\ \pi\ m_3\ (V)$$

donde $d\ G = sen\ \theta\ d\ \theta\ d\varphi\ d\ x\ d\ y$ es la *densidad* para conjuntos de rectas en el espacio (las rectas vienen determinadas por las coordenadas x, y de su intersección por un plano normal y por sus coordenadas esféricas θ y φ).

La fórmula es válida para cubos (9); consideremos un conjunto abierto O, éste puede descomponerse en la forma $\Sigma\ E_i$ don-

(8) Ver Deltheil, "*Probabilités Géometriques*".

(9) Ver Deltheil, "*Probabilités Géometriques*".

de los E_i son cubos que pueden tener fronteras comunes, pero la integral de la fórmula [7] es nula para el caso en que V sea un cuadrado, luego como el conjunto numerable de los cuadrados (o partes de cuadrados) que forman las fronteras comunes no interviene en la integral, tendremos por tanto:

$$\int m_1(R,O)\,dE = \int \Sigma\, m_1(R,E_i)\,dE = \sum \int m_1(R,E_i)\,dE = 2\pi \Sigma m_3(E_i) =$$
$$= 2\pi m_3(O).$$

Para pasar de este caso al caso de un conjunto cualquiera V se hace el mismo razonamiento que en el caso anterior obteniendo la fórmula [7].

Todos los resultados obtenidos en este trabajo no varían al invertir el movimiento, esto es al tomar como fijo el conjunto móvil e inversamente el móvil como fijo, con la condición de que las posiciones de ambos conjuntos vengan determinadas por los *mismos parámetros*, así, por ejemplo, se puede invertir el movimiento en el caso de un conjunto medible y de un conjunto de un número finito de puntos y no se puede invertir al considerar bandas o cilindros y conjuntos. Si en lugar de considerar conjuntos totalmente móviles consideramos conjuntos que estén solo sujetos a traslaciones, las fórmulas que hemos obtenido se siguen verificando, sin más diferencia que en el segundo miembro desaparecen los coeficientes por ser todos iguales a la unidad; así en el caso de dos conjuntos planos se obtiene $m_2(A_1) \times m_2(A_2)$, en el caso de una recta y un conjunto se obtiene $m_2(A)$ etc....

Instituto de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Febrero de 1940