V. y A. FRAILE y C. CRESPO

EL LUGAR GEOMETRICO Y LUGARES DE PUNTOS AREAS EN EL PLANO

UNION MATEMATICA ARGENTINA
Publicación N.º 23

BUENOS AIRES
1942

EL LUGAR GEOMETRICO Y LUGARES DE PUNTOS AREAS EN EL PLANO

Por V. y A. FRAILE y C. CRESPO

I. - TEORIA GENERAL

1. — El concepto de lugar geométrico lleva en sí el de pluralidad.

Vamos a empezar sirviéndonos de unos ejemplos sumamente elementales que nos permitirán obtener una clasificación de los lugares y establecer algunas conclusiones.

Dados los puntos A y B, existe solamente un punto de su recta que equidista de ambos, siendo finita la distancia. Existen dos que cumplen esta condición situados en la circunferencia de diámetro A B; y existen infinitos situados en un plano que contenga a A y a B. He aquí otra forma de expresar estos tres casos: dos puntos de un espacio E_1 se reproducen aplicando un criterio y originan un nuevo punto; originan simultáneamente dos introduciendo otro espacio E'_1; crean simultáneamente una infinidad continua de puntos si se introduce un espacio E_2. En el primer caso no hay lugar geométrico, por no existir pluralidad de soluciones. En los otros dos sí hay lugar geométrico. Sin embargo, sólo cuando se trata de una infinidad continua de soluciones al problema suele aplicarse el nombre *lugar*.

Si en el primer ejemplo consideramos un haz plano de rectas de vértice A que contenga a la recta A B, y en cada una de ellas aplicamos aquel criterio de equidistancia, referido a los puntos A, fijo, y B_i de la circunferencia de centro A y radio A B, obtenemos una infinidad continua de soluciones, y, por lo tanto, un l. g.; pero esta infinidad de puntos no se produce simultáneamente, como en el ejemplo tercero, sino que se obtiene aplicando infinitas veces el criterio dado en distintos espacios E_i; es decir, por generación. Podemos generalizar diciendo que hay dos formas de enunciar lugares geométricos: establecer un criterio sobre entes fijos de un espacio E_n, de manera que haya una infinidad continua de nuevos entes que le satisfacen simultáneamente; aplicar infinito número de veces un mismo criterio sobre entes dados, parte de los cuales son fijos y variables los demás, cuando de este criterio se obtiene cada vez un

nuevo ente, o un conjunto numerable de nuevos entes, con la condición al menos de ser continuos los sistemas en los que se mueven los entes dados variables. Hay, pues, lugares que podremos llamar por *síntesis* y por *generación*.

En el último de los tres ejemplos que hemos establecido se trata de un lugar por síntesis. Puede obtenerse también de esta otra manera: sean los puntos A, B y una recta r que contiene a A. Sobre r existe un sólo punto, propio o impropio, que equidista de A y B. Apliquemos ahora este criterio de equidistancia en cada una de las rectas del haz de vértice A y plano (r, B), con lo cual obtenemos la mediatriz del segmento A B, lo mismo que antes, pero esta vez por generación. En esencia, no hemos hecho sino restringir la dimensión del espacio selectivo y, por medio de éste, generar el otro.

Cuando se trata de lugares de puntos es muy fácil probar que todo lugar por síntesis lo es también por generación. En efecto: supongamos que en un espacio lineal E_n, de dimensión mínima n, obtenemos, por síntesis, un lugar de puntos de m dimensiones $(n > m)$. Un cierto hiperplano G_{n-1} de E_n corta al lugar según una o más variedades de dimensión $m-1$; otro hiperplano G_{n-2} de G_{n-1} lo corta según variedades de $m-2$ dimensiones; etc. Finalmente, un último hiperplano G_{n-m} de G_{n-m+1} corta al lugar en un punto o un conjunto numerable de puntos. Enunciemos ahora el lugar primitivo con la condición de estar las soluciones situadas en la variedad lineal G_{n-m} y hagamos lo mismo para todas las variedades de un haz $(G_{n-m})_i$ de G_{n-m+1}. Con ello habremos obtenido, por reiteración del criterio, la parte del lugar interferida en G_{n-m+1}. Así sucesivamente hasta E_n. De esta forma, por sucesivas generaciones, nos viene dado el lugar primitivo.

Por lo tanto, en adelante, nos referimos sólo a lugares de puntos por generación, y todo ello será general.

2. — Proponer un lugar geométrico es cosa, pues, bien fácil: basta plantear un problema cualquiera en un espacio E_n sobre entes dados, A, B, C, ..., N, de modo que la solución sea un punto o un conjunto numerable de puntos. Hagamos ahora que A pertenezca a un sistema ∞^α de entes A; B a otro ∞^β de entes B; ...; N a un sistema ∞^ν de entes N. Tomemos en dichos sistemas sendos elementos, y resolvamos sobre ellos el problema dado, haciendo lo mismo para todos los grupos A, B, C, ..., N. El conjunto de todos

los puntos obtenidos constituirá o no una o más variedades continuas de E_n, y será un lugar.

No es necesario asignar a cada ente primitivo un sistema para obtener un lugar geométrico: basta hacerlo con uno de ellos. Supongamos que son p los entes primitivos, de los cuales q tienen sistema. Puede suceder que, al resolver el problema matriz, no sea arbitraria la elección de elementos en los q sistemas, sino que, habiendo tomado arbitrariamente sendos entes en k de ellos, queden unívocamente determinados los $q - k$ elementos restantes en sus sistemas respectivos. Llamaremos *conjuntos-variables* a los sistemas en los que es arbitraria la elección de elementos.

En el tercero de los tres ejemplos puestos al principio, enunciado por generación, son entes dados constantes A y B; el haz plano de rectas de vértice A es conjunto-variable; el criterio de equidistancia referido a A y a B sobre cada recta r es el problema matriz, y E_2 el espacio lineal donde se sitúa el lugar.

Sea G el problema matriz de un l. g. en E_n y $A_1, A_2, \ldots, A_p$ los entes primitivos dados, de los cuales los q primeros pertenecen respectivamente a sistemas $S_{A_1}, S_{A_2}, \ldots, S_{A_q}$, que, para simplificar, suponemos que todos ellos son conjuntos-variables. Hemos de repetir G sobre cada grupo A_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$, tomando para esto de un modo arbitrario q elementos en los sistemas S. Si consideramos los grupos A_i de modo que no varíe sino A_1 en S_{A_1}, dejando fijos en sus sistemas respectivos a $A_2, A_3, \ldots, A_q$, el conjunto de los puntos obtenidos constituye un lugar parcial correspondiente al conjunto-variable S_{A_1}. El lugar total está formado, pues, por q sistemas incidentes de lugares parciales.

Cuando este lugar total es una variedad continua V de E_n, es claro que la dimensión de V será como máximo $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q$, siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ las dimensiones de los sistemas S_{A_i}. Entonces ha de acontecer dos cosas: 1.ª G es de tal índole que no reduce el número de dimensiones de los lugares parciales, es decir, éstos son variedades continuas cuyo número de dimensiones es igual a la dimensión de sus conjuntos-variables correspondientes. 2.ª La incidencia de los q sistemas de lugares parciales es de dimensión *cero*.

Las proposiciones contrarias constituyen las dos únicas causas que reducen el número de dimensiones del lugar geométrico total. Tenemos un caso particular de la segunda cuando es $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q > n$, o sea, cuando la dimensión del espacio E_n es insuficiente para contener la del lugar, no existiendo la causa primera.

La interpretación analítica de ambas causas que restringen la dimensión de V es también sumamente sencilla: sean $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots y_{\alpha_1}^{(1)}, y_1^{(2)}; y_2^{(2)}, \ldots, y_{\alpha_2}^{(2)}; \ldots; y_1^{(q)}, y_2^{(q)} \ldots, y_{\alpha_q}^{(q)}$ los parámetros arbitrarios esenciales que definen, respectivamente, los elementos o entes primitivos en los sistemas S_{A_1} $S_{A_2}, \ldots, S_{Aq}$. Las coordenadas (no homogéneas) de los puntos del lugar V serán funciones

$$x_\mu = \varphi_\mu \ (y_1^{(1)} \ldots, y_{\alpha_1}^{(1)}; y_1^{(2)} \ldots, y_{\alpha_2}^{(2)} \quad y_1^{(q)}; \ldots; y_{\alpha_q}^{(q)}) \qquad [1],$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, n,$$

y constituyen las ecuaciones paramétricas de dicho lugar.

Si existe la primera de las causas enunciadas respecto de S_{A_1}, por ejemplo, es que en las funciones φ no son esenciales los parámetros $y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(1)}$, siendo, pues, posible sustituir todos o parte de ellos por otros parámetros en número menor.

2.ª La incidencia de los q sistemas de lugares parciales es de dimensión r, mayor que *cero*. Supongamos, para simplificar, que es r precisamente la dimensión de la incidencia de los sistemas de lugares parciales correspondientes a S_{A_1} y S_{A_2} . Entonces no cabe otra cosa que ser sustituibles los $\alpha_1 + \alpha_2$ parámetros $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ de [1] por $\alpha_1 + \alpha_2 - r$ *nuevos* parámetros, ya que el lugar parcial superior que resulta de considerar variables sólo a los entes primitivos A_1 y A_2 ha de ser una variedad de dicha dimensión $\alpha_1 + \alpha_2 - r$.

Vemos, por lo tanto, la existencia única de las causas referidas: que en las funciones φ no sean esenciales parte o todos los parámetros y de una misma serie; que no lo sean parte o todos los de series distintas, aun siéndolo los de cada serie.

En el primer caso, si llamamos $y'_1, y'_2, \ldots, y'_\beta$ $(\beta < \alpha_1)$ a los parámetros que sustituyen a los $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_{\alpha_1}^{(1)}$ en las φ, es, en general, posible sustituir también el sistema ∞^{α_1} S_{A_1} de entes A_1 por otro ∞^β de los mismos entes, definido con los y', de manera que junto con los q—1 sistemas restantes y los p—q elementos fijos se obtenga la misma variedad lugar. Es decir, los conjuntos-variables son reducibles a otros de dimensión menor.

Este caso encierra la posibilidad de quedar eliminados en las ecuaciones [1] algunos parámetros $y^{(J)}$.

La segunda causa de restricción del número de dimensiones del lugar V se produce cuando las posiciones relativas de los sistemas S_{A_1} en E_n no son genéricas y sí particulares. Al establecer las ecuaciones paramétricas [1] aparecen entonces, en cada una de las φ,

funciones idénticas de los mismos parámetros *y* de series diferentes; y estas funciones, claro es, constituyen nuevos parámetros, en número menor.

Si se trata de la primera causa referida, por ejemplo, al conjunto-variable S_{A_1}, a todo punto de un lugar parcial respecto de S_{A_1} corresponde uno o más subsistemas de entes A_1 de dicho conjunto-variable. En cuanto a la segunda hay también correspondencias parecidas.

Si el lugar V tiene la máxima dimensión $\sum_{j=1}^{q} \alpha_j$, la correspondencia recíproca no es de puntos de V a continuos de entes primitivos.

3. — Para que un lugar de puntos sea una variedad continua de E_n, su dimensión m ha de cumplir $m \leqq n - 1$. Por otra parte, sabemos que el número de dimensiones de un lugar depende de la multiplicidad o dimensión de los sistemas de entes primitivos arbitrarios. Es posible, pues, proponer lugares de puntos que sean n-dimensionales en E_n, o sea, que constituyan recintos del espacio selectivo total.

Como vemos, el concepto de lugar geométrico es muy general, y, sin embargo, en geometría plana sólo es corriente estudiar aquellos lugares que son líneas o elementos de líneas. Es cierto que se puede proponer inmediatamente lugares de puntos que constituyen recintos del plano; pero son tan triviales que no merecen siquiera ser enunciados. A pesar de ello enunciemos dos:

1.º «L. g. de los puntos del plano cuya distancia a uno fijo es mayor que r y menor que k $(k > r)$».

2.º «L. g. de los puntos del plano homotéticos de los de un círculo dado C respecto de un punto fijo V (razón k)».

La puerilidad de estos lugares de puntos áreas en el plano consiste, para el primer ejemplo, en los conceptos *mayor* y *menor* que intervienen en el enunciado. Toda selección de puntos de un plano condicionada por varias limitaciones a un concepto simple de distancia, o a otro análogo simple, define, en efecto, un recinto, finito o infinito, de ese plano.

Este lugar lo es por síntesis. Si el campo selectivo lo restringimos a una recta del plano que pasa por el punto fijo obtenemos también otro *recinto* de ella.

En cuanto al segundo de los ejemplos, se trata, desde luego, de un lugar por generación: a cada punto del círculo dado corresponde

ano homotético de razón k. Los datos para engendrar este lugar son el centro de homotecia — ente primitivo fijo — y el punto genérico del círculo — ente primitivo que pertenece a un sistema ∞^2 de ellos —. El problema matriz es el criterio de homotecia referido a cada ente de C respecto de V. Sabemos ya que el lugar ha de ser bidimensional, y, por lo tanto, un recinto del plano.

Cualquier lugar área de puntos en el plano que se genera aplicando un problema matriz sobre un grupo de p entes, de los cuales p—1 son fijos y el otro varía en un campo ∞^2 de ellos; es, casi siempre, trivial. Pero, en cambio, no suelen ser ya pueriles los lugares, si, en vez de hacer variar a un ente primitivo sobre un campo o sistema ∞^2 de ellos, hacemos variar a dos arbitrariamente sobre sendos sistemas ∞^1. En nuestro último ejemplo, basta que el punto móvil de C varíe sólo en una circunferencia, y que el centro de homotecia se elija también arbitrariamente en otra línea cualquiera, para que el lugar área que resulte deje de ser trivial.

Es claro que, si un problema matriz en el plano se refiere a p puntos-datos, y hacemos variar sobre sendas líneas genéricas a más de dos de ellos de un modo arbitrario, se obtiene un lugar área de puntos; pero en los sistemas de lugares parciales ha de haber forzosamente incidencia de dimensión mayor que *cero*, por ser aquí $q > 2$ ($q =$ número de líneas conjuntos-variables); esto es, el lugar parcial superior que resulta de considerar variables sólo a dos puntos datos, y otro parcial correspondiente a otra de las líneas dadas, inciden según una línea.

En definitiva: la regla que nos permite proponer lugares de puntos áreas en el plano, exentos en general de trivialidad, consistirá, pues, en elegir un problema gráfico cuya solución sea un punto o conjunto numerable de puntos, y cuyos datos sean puntos (líneas) no inferiores a dos en número. Luego, haremos variar a dos de estos datos de una manera arbitraria, sobre sendas líneas (haces), repitiendo el problema elegido en cada nuevo grupo de datos.

Sean A y B los entes primitivos que son variables sobre los conjuntos ∞^1 S_A y S_B respectivamente. Un lugar parcial L_A correspondiente a S_A se obtendrá cuando B queda fijo en S_B y sólo varía A en S_A. L_A es un lugar línea corriente, y está perfectamente definido por el valor o posición que tiene B en S_B. A cada valor de B corresponde un L_A; de modo que si hallamos ahora el lugar geométrico de L_A, cuando B varía en su sistema, obtenemos el lugar total.

Resolver un lugar área de puntos en el plano equivale, pues, a resolver dos lugares sucesivamente: uno de puntos y otro de líneas, siempre que sean dos los entes primitivos que varían, y simplemente infinitos los sistemas que los contienen. En último caso, el segundo de estos lugares se reduce a determinar la envolvente de esas líneas que, en general, limita al lugar área.

Este procedimiento de resolución de los lugares áreas es, sin duda, el más natural. Sin embargo, utilizando siempre los recursos de la Geometría elemental, suele ser más simple y más elegante la solución sintética, prescindiendo de todo proceso de generación.

Por último, las coordenadas de los puntos de un lugar área son funciones

$$x = f(\lambda, \lambda') \qquad y = \varphi(\lambda, \lambda')$$

de dos parámetros, λ, λ', independientes, no siendo posible, por lo tanto, la eliminación de ellos. Cuando el número de conjuntos-variables excede a dos, las funciones x, y lo son de más de dos parámetros que, de hecho, están sustituídos por dichas funciones.

A continuación exponemos una serie de problemas elementales de lugares de puntos áreas en el plano, en los que hemos utilizado con preferencia la solución sintética.

II. - Aplicaciones

1. — *Superficies medias y baricéntricas de las curvas.* — Tratándose de curvas alabeadas, son ya conocidas las superficies medias: lugar de los centros de las cuerdas de una curva. Si se considera curvas planas, sus superficies medias constituyen lugares áreas de puntos en el plano.

Naturalmente, cuando una curva plana es cerrada y convexa, su superficie media es la región del plano no exterior a la curva. La de una circunferencia es su círculo.

Es sumamente sencillo hallar la superficie media de un arco de circunferencia: En la circunferencia de centro O (fig. 1) consideremos el arco A B' B, y tracemos los arcos A M, B M homotéticos del A B' B respecto de los centros A y B respectivamente, de razón 1/2. La superficie rayada sobre la cuerda A B es el lugar. Basta trazar un radio cualquiera O N y observar que P — punto de intersección de O N y el arco B P M — es centro de la cuerda B B'. Todo punto

P' de O N exterior al trozo rayado no es del lugar, por ser centro de una cuerda paralela a la B B' que no puede ya estar inscrita en el arco A B' B. Sí lo están, en cambio, las cuerdas cuyos centros son los puntos del segmento P N.

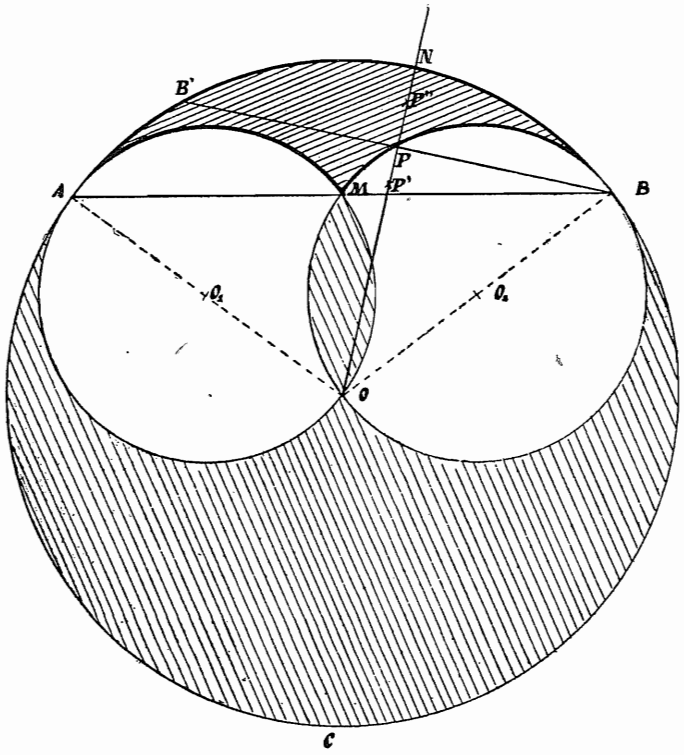

Fig. 1

El recinto rayado debajo de la cuerda A B es la superficie media del arco A C B.

Superficie baricéntrica es el lugar de los centros de gravedad de los arcos de una curva alabeada. Si la curva fuese plana, dicha superficie baricéntrica constituiría un lugar área de puntos en el plano.

Ambas clases de superficies son lugares por generación, cuyos puntos quedan unívocamente determinados eligiendo arbitrariamente dos en la curva. Esta es, pues, conjunto-variable común a los dos entes primitivos.

Puede generalizarse la superficie media estableciendo el lugar

de los puntos que dividen a las cuerdas de una curva en segmentos que están en una relación λ.

Si se trata de un arco de circunferencia (fig. 2) A V' B el lugar es la superficie rayada sobre la cuerda A B. Está limitada por el arco dado y cuatro arcos más: dos de ellos pertenecen a las circunferencias de centros O_1, O_2 homotéticas de la dada de razón

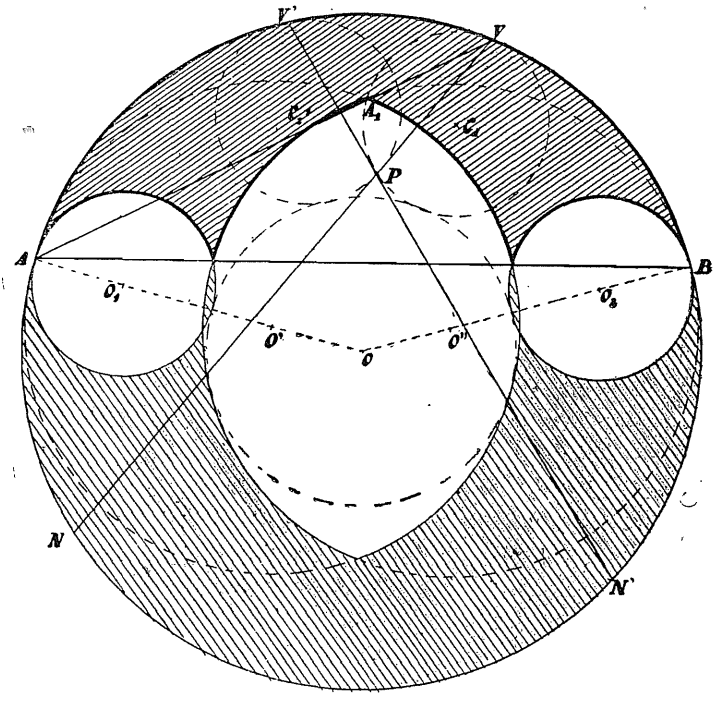

Fig. 2

λ respecto de los centros A y B; los otros dos arcos pertenecen a las circunferencias de centros O', O'', homotéticas de la dada de razón $\frac{1}{\lambda}$ respecto de A y B como centros de homotecia.

Se desprende, desde luego, que todo punto no contenido en la corona circular limitada por la circunferencia dada y la que es tangente exterior a las O_1, O_2 no es del lugar. Ahora bien: un punto P de esta corona, pero exterior a la superficie rayada, tampoco es del lugar. Basta observar que este punto pertenece a dos circunferencias C_1, C_2 inscritas en la corona. Sea V el punto de tangencia de C_1 con el arco dado, y A_1 el de contacto con el arco de cir-

cunferencia de centro O'. La recta $V A_1$ ha de pasar por A, y es $\frac{A_1 V}{A_1 A} = \lambda$. La recta V P produce una cuerda V N tal que es $\frac{PV}{PN} = \lambda$; pero que no está, pues, inscrita en el arco dado. Tampoco puede estarlo la cuerda V' N' que resulta de considerar la circunferencia C_2. Del mismo modo se comprende que los puntos comunes a las circunferencias C y a la superficie rayada pertenecen a cuerdas inscritas en el arco A V B y las dividen en segmentos cuya razón es λ.

El mismo lugar para el arco A N' B lo indica el rayado inferior.

2. — *Lugar de los centros de los segmentos inscritos en dos segmentos dados* A B, C D. (*Superficie media de dos segmentos*). —

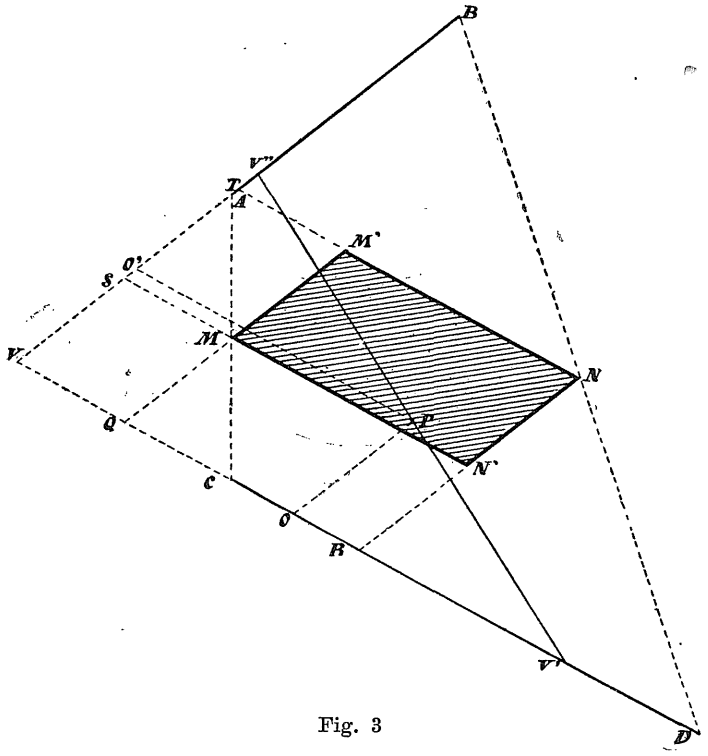

Fig. 3

Conviene antes recordar cómo se inscribe un segmento en los lados de un ángulo dado B V D de manera que su centro sea un punto P también dado (fig. 3). Sabemos que basta trazar, por ejemplo, P O, paralela al lado V B, tomar V', simétrico de V respecto de O y unir P y V'. V' V'' es la solución.

En la misma figura, A B y C D son los segmentos dados. Construyamos el paralelogramo M M' N N' cuyos lados son paralelos a dichos segmentos y donde M y N son centros, respectivamente, de A C y E D. Este paralelogramo es el lugar: Todo punto P de él es centro de un segmento inscrito en A B y C D, y no lo es cualquier punto que no pertenece al paralelogramo. Para probarlo prolongaremos los lados M' M hasta Q, N N' hasta R y tracemos P O paralela a ellos. C es simétrico de V respecto de Q, y D lo es también respecto de R. El punto simétrico de V respecto de O está, pues, en C D. De igual modo, si trazamos P O', paralela a V D, el simétrico de V respecto de O' está en A B.

Si se trata de un punto que no pertenece al paralelogramo, alguno de los centros de simetría O, O', o ambos, no están respectivamente en Q R y S T, y dicho punto no es, por lo tanto, del lugar.

La solución es también sencillísima utilizando el recurso de los lugares parciales: Para obtener un punto del lugar basta tomar arbitrariamente sendos puntos en A B y C D (fig. 4). A B y C D

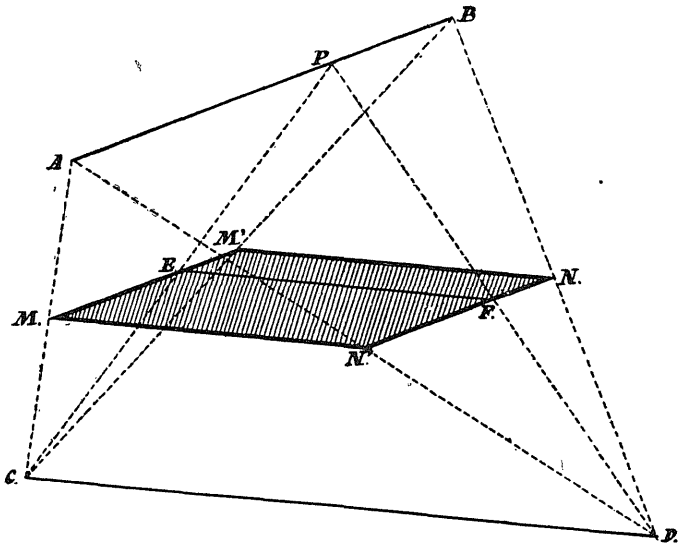

Fig. 4

son, pues, conjuntos-variables unidimensionales, y el lugar es, naturalmente, bidimensional. Un lugar parcial correspondiente a C D se obtiene si consideramos fijo un punto P de A B y variable otro en C D. Este lugar parcial es el segmento E F, paralelo a C D

e igual a su mitad. Haciendo variar ahora a P en AB, varía también EF y engendra el lugar total. EF es siempre paralelo a CD y de longitud constante 1/2 CD. Se trata, pues, de una traslación, y la dirección de ella es precisamente AB, como se deduce de ser MM' lugar de los extremos E. El lugar total es el paralelogramo MM'NN'.

Si AB y CD son paralelos, dicho lugar degenera en un segmento (paralela media del trapecio ABDC). La incidencia de los sistemas de lugares parciales es de dimensión i; las coordenadas de los puntos del lugar total son funciones de un solo parámetro que sustituye a una cierta función de los dos genéricos. Sean

$$AB \equiv \begin{cases} x = x' + a\mu \\ \\ y = y' + b\mu \end{cases}, \quad u \lessgtr \mu \lessgtr v,$$

$$CD \equiv \begin{cases} x = x_1 + m\rho \\ \\ y = y_1 + n\rho \end{cases}, \quad u' \lessgtr \rho \lessgtr v',$$

las ecuaciones paramétricas de los segmentos AB y CD. Las ecuaciones del lugar propuesto son

$$\begin{aligned} x &= 1/2\,[(x' + x_1) + (a\mu + m\rho)] \\ y &= 1/2\,[(y' + y_1) + (b\mu + n\rho)] \end{aligned} \qquad [1]$$

Si AB y CD son paralelos ha de ser $\frac{b}{a} = \frac{n}{m}$. Poniendo en las [1] $m = \frac{na}{b}$, $n = \frac{mb}{a}$, se obtiene

$$x = 1/2\,(x' + x_1) + 1/2\,a\,(\mu + \frac{n}{b}\,\rho)$$

$$y = 1/2\,(y' + y_1) + 1/2\,b\,(\mu + \frac{m}{a}\,\rho),$$

donde los paréntesis que multiplican respectivamente a 1/2 a y 1/2 b son iguales en virtud de $\frac{n}{b} = \frac{m}{a}$. Haciendo, pues, $\mu + \frac{n}{b}\,\rho = \lambda$, tenemos en definitiva

$$x = 1/2\,(x' + x_1) + 1/2\,a\,\lambda$$

$$y = 1/2\,(y' + y_1) + 1/2\,b\,\lambda.$$

Es fácil acotar λ. Estas son las ecuaciones del lugar total que, ahora, representan un segmento, paralelo a A B y C D (coeficiente angular $\frac{a}{b}$) y equidistante de ellos. A cada valor de λ corresponden infinitos pares (μ, ρ), es decir, a cada punto del lugar corresponden infinitos pares de puntos entre A B y C D.

3. — *Lugar de los centros de los paralelogramos inscritos en un cuadrilátero dado* (M. A. Longchamps). — Al resolver este problema se ha considerado siempre los paralelogramos de lados paralelos a las diagonales del cuadrilátero. De este modo la solución es el segmento cuyos extremos son los centros de dichas diagonales; pero se comprende que el lugar es más general prescindiendo de tal restricción impuesta por el paralelismo. Entonces se trata de un lugar área.

Sea A B C D el cuadrilátero dado (fig. 5). Tomamos arbitrariamente en los lados A B, A D sendos puntos E, F. A partir

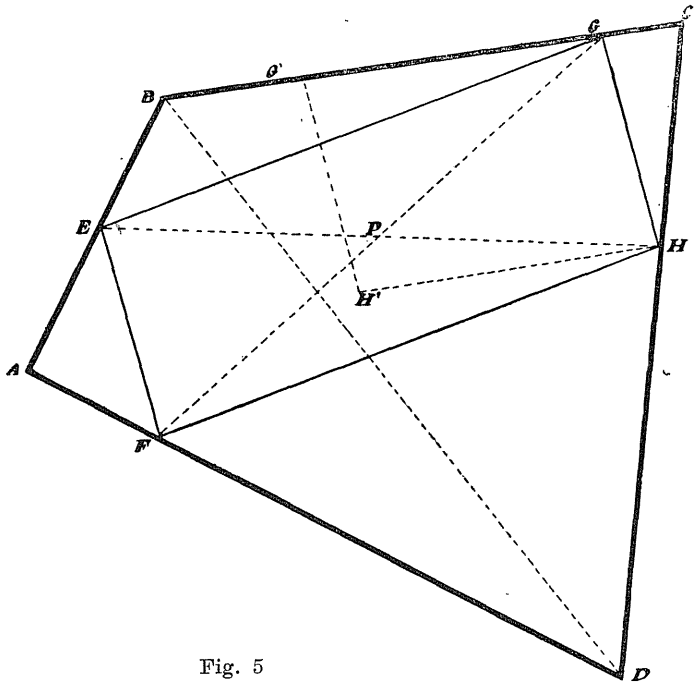

Fig. 5

de un punto cualquiera G' de B C, por ejemplo, tracemos un segmento G' H' igual y paralelo al E F, y por H' la paralela a B C

hasta H. El segmento, H G, paralelo e igual a G' H', y el E F determinan, pues, un paralelogramo inscrito en el cuadrilátero dado y, por lo tanto, un punto del lugar. De esta construcción se deduce: 1º. Un punto del lugar queda unívocamente determinado eligiendo arbitrariamente sendos puntos en dos lados adyacentes del cuadrilátero; 2º. Elegidos los puntos anteriores quedan determinados los otros dos en el otro par de lados; 3º. Pueden no existir estos últimos puntos, y, por lo tanto, la elección arbitraria de E y F está acotada.

De todo esto resulta que los entes primitivos del lugar propuesto son cuatro puntos, E, F, G, H, vértices de un paralelogramo, que producen un punto P del lugar. Cada uno de estos cuatro puntos se mueve sobre una línea; pero este movimiento sólo es arbitrario para dos de ellos. El lugar ha de ser, pues, un área, en general. Los lados A B, A D del cuadrilátero dado, o mejor, los *recintos* acotados en ellos, son conjuntos-variables.

Como vemos, no es necesario el paralelismo de B D y E F.

Todo punto del lugar ha de ser centro de dos segmentos (diagonales) inscritos uno en A B y C D (fig. 6) y otro en A D y B C, luego ha de pertenecer a los paralelogramos Q M R N y S M T N,

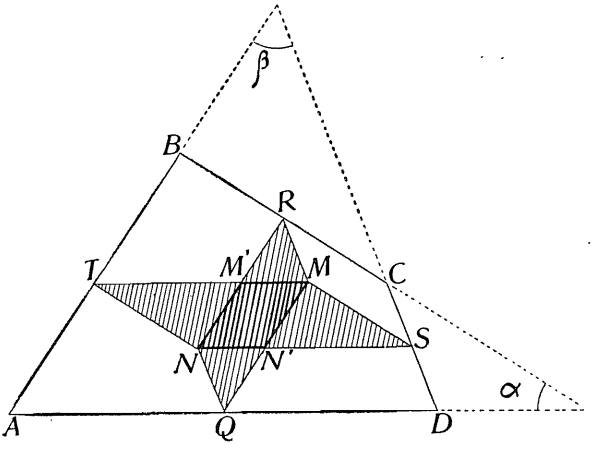

Fig. 6

superficies medias de ambos pares de lados opuestos. El lugar es, por lo tanto, la parte común a dichos paralelogramos. Es fácil ver que esta parte común es otro paralelogramo M M' N N'. N y M son centros, respectivamente, de las diagonales A C y B D del cua-

drilátero, y los lados del lugar son paralelos a los A B y A D envolventes del cuadrilátero completo.

Si el cuadrilátero dado es trapecio el lugar degenera en un segmento, y si es paralelogramo, en un punto.

4. — *Lugar de los centros de los segmentos inscritos en una circunferencia y una recta.* — Es, pues, otra superficie media.

Sea O la circunferencia y r la recta (fig. 7). Reconoceremos cuándo un punto P es del lugar trazando la recta simétrica r' de r

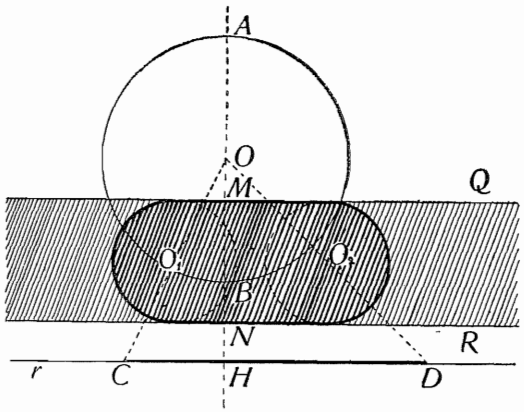

Fig. 7

respecto de P (hágase la figura). Si r' tiene con la circunferencia O puntos propios comunes, P es del lugar, y no lo es en caso contrario, puesto que si F y G son esos puntos comunes, uniéndolos con P y prolongando los segmentos hasta r, ambos segmentos cumplen las condiciones del enunciado.

Las rectas M Q y N R, paralelas a la r, donde M y N son, respectivamente, los centros de A H y B H, limitan este lugar área, que es la franja rayada: las rectas simétricas de r respecto de los puntos de dicha franja cortan o son tangentes a la circunferencia O; y no la cortan las simétricas de r respecto de los demás puntos del plano.

r y O son conjuntos-variables. El sistema de lugares parciales correspondiente a r lo constituyen todas las rectas de esta franja paralelas a r. Y el sistema de los correspondientes a O todas las circunferencias inscritas en dicha franja.

Si en vez de considerar la recta r se trata de un segmento C D, es claro que el lugar será la parte de la franja doblemente rayada, donde las circunferencias O_1, O_2 son las posiciones límites del lugar parcial correspondiente a O.

5. — *Lugar de los centros de los segmentos inscritos en dos circunferencias.*

Sean O_1, O_2 las circunferencias dadas, de radios r_1, r_2 respectivamente. Reconoceremos si un punto P de su plano es o no del lugar trazando la circunferencia O'_1, simétrica de la O_1, por ejemplo, respecto de P. Si O'_1 y O_2 tienen puntos comunes reales, S, T, y son S', T' sus simétricos respecto de P, los segmentos S S', T T' están inscritos en O_1 y O_2, y es P su centro.

Construyamos las circunferencias concéntricas de centro O (fig. 8), punto medio del segmento O_1 O_2, cuyos radios son, respectivamente, $1/2\,(r_1 + r_2)$ y $1/2\,(r_1 - r_2)$. Es fácil probar que las circunferencias simétricas de una de las dadas respecto de los

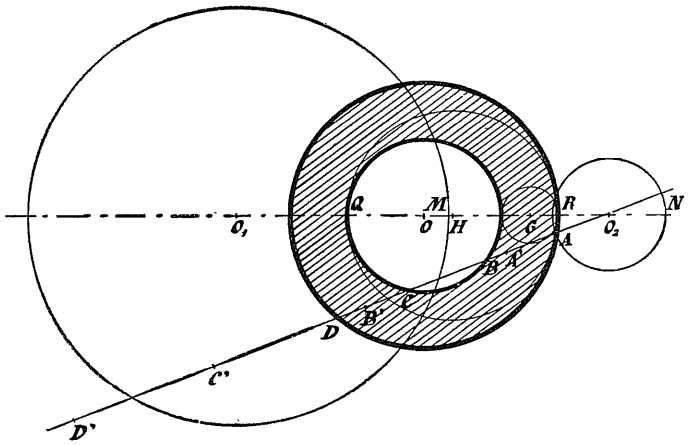

Fig. 8

puntos de la de radio $1/2\,(r_1 + r_2)$ son tangentes exteriormente a la otra; y lo son interiormente si se toma como centros de simetría los puntos de la circunferencia de radio $1/2\,(r_1 - r_2)$. Tracemos una recta cualquiera O_2D' que corte a ambas circunferencias concétricas. Los puntos de intersección son A, B, C, D, y A', B', C', D' los simétricos de O_2 respecto de aquéllos. En virtud de lo dicho, las circunferencias de radio r_2 y centros D' y C' son, res-

pectivamente, tangentes exterior e interiormente a la O_1, con lo cual los puntos del segmento D' C' — y, por igual razón, los de B' A' — son centros de circunferencias de radio r_2 que tienen con la O_1 puntos comunes reales; y no los tienen las circunferencias de radio r_2 cuyos centros no están en los segmentos D' C', B' A', para la recta genérica considerada O_2D'. Por lo tanto, en dicha recta, sólo son puntos del lugar los de los segmentos A B y C D. Y, en definitiva, todo punto de la corona circular rayada es, pues, del lugar, y no lo son los demás puntos del plano. El lugar propuesto es esta corona.

Considerando los segmentos inscritos de extremos M, fijo en O_1, y X, variable en O_2 obtenemos un lugar parcial que es la circunferencia de centro G, inscrita en la corona, y que engendra el lugar total cuando M varía en O_1. Del mismo modo, un lugar parcial correspondiente a la circunferencia O_1 respecto de un punto fijo, N, de la O_2, es la circunferencia de centro H, tangente en Q y R a las de la corona.

6. — El l. g. de las polares de los puntos de la cuerda A B de una cónica φ (fig. 9) respecto de φ es la parte de haz rayada, donde P, vértice del haz, es polo de A B. Este haz acotado de polares es un lugar de rectas, y también lo es de puntos. Basta, para

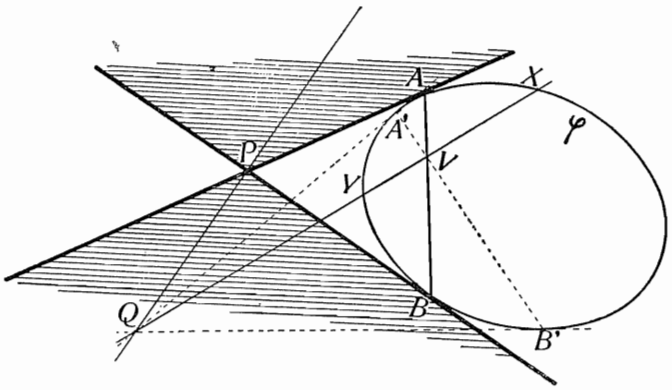

Fig. 9

verlo, enunciarlo así: «Dada una cónica φ y una cuerda A B, tómese *arbitrariamente* dos puntos, uno, X, en uno de los dos arcos en que la cuerda divide a la cónica, y otro, Y, en el otro arco. La recta X Y corta en V a la cuerda A B. Lugar de los conjugados ar-

mónicos de los puntos V respecto de todos los pares (X, Y)». Todo punto, Q, del lugar ha de pertenecer a la polar de V, y, por ser V de la cuerda A B, dicha polar es del haz acotado.

También puede verse que la condición necesaria y suficiente para que un punto Q sea del lugar es que su polar A' B' respecto de φ corte a la *cuerda* A B, condición que cumplen solamente los puntos del recinto infinito rayado.

Los puntos del lugar quedan unívocamente determinados eligiendo una terna (X V Y); pero sólo es arbitraria la elección de X e Y; es decir, entre las tres líneas a que pertenecen, respectivamente, los puntos de la terna, sólo son conjunto-variables los arcos A X B y A Y B de la cónica dada φ.

7. — *Lugar de los centros de las circunferencias que tienen puntos comunes con dos dadas.*

Los puntos del lugar quedan unívocamente determinados eligiendo arbitrariamente tres: dos en una de las circunferencias dadas y otro en la otra. Ambas circunferencias son, pues, conjuntos-variables; pero como una de ellas contiene dos puntos arbitrarios hay, en total, tres conjuntos-variables. Las coordenadas de los puntos de este lugar son, por lo tanto, funciones de tres parámetros independientes, y ha de haber forzosamente entre los sistemas de lugares parciales incidencia de dimensión 1, siendo $3 - 1 = 2$ la dimensión del lugar total.

En la figura 10 son O_1 y O_2 los centros de las circunferencias dadas, cuyos radios van a ser, respectivamente, r_1 y r_2. Vamos a proceder del modo siguiente: Entre todas las circunferencias que cortan o son tangentes a las dadas, O_1, O_2, nos referiremos primero a aquellas cuyas cuerdas comunes con las O_1, O_2 concurren en un mismo punto P del eje radical P O de dichos círculos dados, y hallaremos el lugar de sus centros. Se comprende que, al considerar todos los puntos del eje radical, este lugar restringido — no *parcial* — engendra el lugar propuesto.

Supongamos trazadas desde P dos secantes a O_1, O_2 respectivamente y sean c_1, c_2 las cuerdas interceptadas. Es claro que las mediatrices de c_1 y c_2 se cortan en un punto que es del lugar. El l. g. de los centros de todas las cuerdas c_1 es el arco F O_1 E que pertenece a la circunferencia de diámetro O_1 P. Análogamente, el l. g. de los centros de las cuerdas c_2 es el arco H O_2 J que pertenece a la circunferencia de diámetro O_2 P. Las mediatrices

de todas las cuerdas c_1 se obtienen, pues, trazando las rectas que pasan por el punto O_1 y por todos y cada uno de los puntos del arco $F\,O_1\,E$, y están contenidas, por lo tanto, en el ángulo α. Del mismo modo, todas las mediatrices de las cuerdas c_2 forman el ángulo β. La parte de plano común a ambos ángulos, que es el cuadrilátero $V\,S\,L\,T$, constituye el lugar restringido.

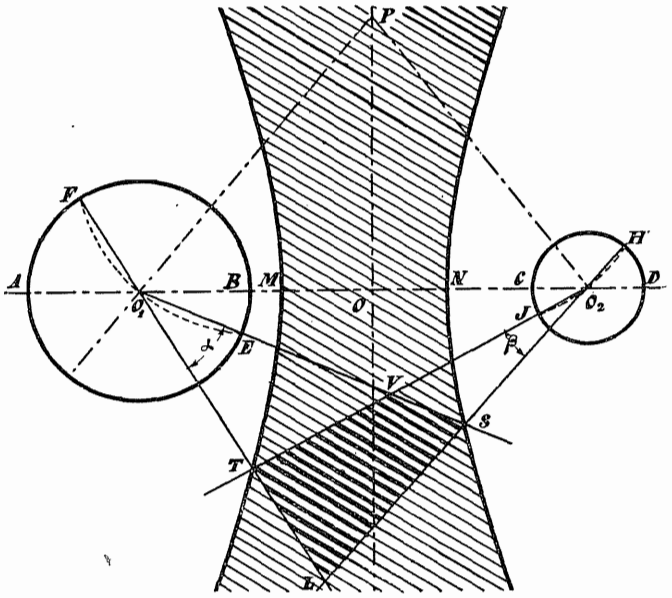

Fig. 10

Estudiemos ahora las trayectorias de los puntos S, T, V, L cuando P recorre el eje radical. Para ello hemos de advertir que, por ser $P\,E = P\,H$ y rectos los ángulos $P\,E\,S$ y $P\,H\,S$, es $S\,E = S\,H$. De igual manera es también $T\,F = T\,J$. De aquí se obtiene sucesivamente:

$$S\,O_1 - r_1 = S\,O_2 + r_2 \;;\; S\,O_1 - S\,O_2 = r_1 + r_2.$$

$$T\,O_1 + r_1 = T\,O_2 - r_2 \;;\; T\,O_2 - T\,O_1 = r_1 + r_2.$$

Esto prueba que los puntos S y T pertenecen a sendas ramas de la misma hipérbola cuyos focos son los puntos O_1, O_2 y cuya constante es $r_1 + r_2$.

Escribiendo relaciones parecidas para L y V veremos que ambos puntos se mueven sobre sendas ramas de otra hipérbola, homofocal a la anterior, de constante $r_1 - r_2$, lo cual nos indica que dichas ramas de esta última hipérbola quedan entre las de la primera.

De todo se deduce que el lugar propuesto es la parte de plano comprendida entre las ramas sobre las cuales se encuentran S y T. El cuadrilátero V S L T se desplaza en ella variando de forma, cuando P recorre el eje radical. Si P es el punto impropio de dicho eje el cuadrilátero degenera en el segmento M N, cuyos extremos son los centros de los segmentos A C y B D respectivamente.

La hipérbola de constante $r_1 + r_2$ es lugar de los centros de las circunferencias tangentes a las dadas, quedando éstas en distinta región del plano respecto de aquéllas. La hipérbola de constante $r_1 - r_2$ es lugar de los centros de las circunferencias tangentes a las dadas, y éstas quedan en igual región del plano.

Cuando una de las circunferencias dadas es un punto, el lugar de los centros de las que pasan por dicho punto y cortan o son tangentes a la otra es también la región del plano no interior a una hipérbola cuyos focos son el punto conocido y el centro del círculo dado, y cuya constante es el radio de este círculo. En este caso particular no existe, naturalmente, la hipérbola homofocal del problema general, puesto que aquí el lugar restringido es un segmento rectilíneo y no un cuadrilátero.

Es trivial el caso de ser puntos los dos círculos dados. El lugar es, entonces, la mediatriz del segmento que determinan, y el restringido es un punto genérico de esa mediatriz.

8. — *Lugar de los centros de las circunferencias que tienen puntos comunes con otra circunferencia y una recta.*

La recta dada es la M T (fig. 11), y la circunferencia es la que tiene O como centro y a cuyo radio vamos a designar por r.

Análogamente a como hemos hecho en el ejemplo anterior consideremos primero todas las circunferencias que cortan o son tangentes al círculo y a la recta dados de modo que las cuerdas comunes con la circunferencia O concurran en un mismo punto P de la recta M T que es, en este caso, el eje radical del par dado. Hallaremos el lugar de los centros de estas circunferencias. Este lugar restringido engendra el total cuando P recorre el eje radical M T.

Sea C_j una circunferencia cuyo centro O_j pertenece al lugar restringido correspondiente a P. O_j es la intersección de las perpendiculares a la cuerda común U V en su punto medio μ — dicha perpendicular pasa por O — y a la y — x, también en su punto

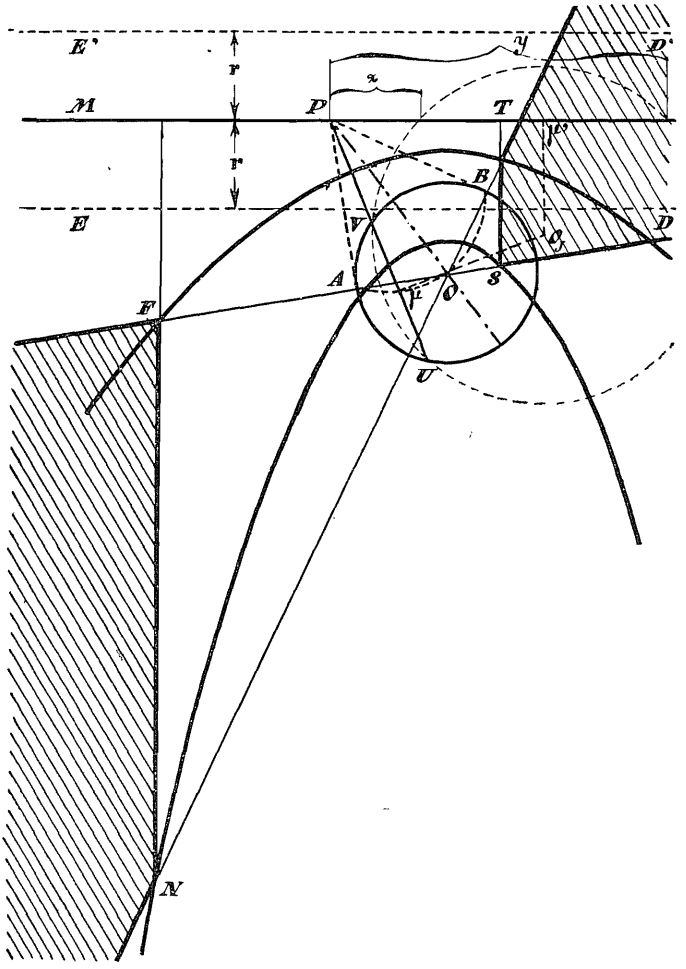

Fig. 11

medio μ'. Para todas las circunferencias C_j correspondientes a P el lugar de los puntos μ es el arco A O B de la circunferencia de diámetro O P. Veamos el lugar de los puntos μ', situados todos ellos en la recta dada M T. Estos puntos tienen la abscisa $\pm$ 1/2 (x + y) respecto de P. Además se verifica $\overline{A P}^2 = P V . P U = x y$;

$AP = \pm \sqrt{xy}$. Y se sabe que es $1/2\ (x+y) \geqq \sqrt{xy}$. Lo que nos dice que si llevamos la longitud AP sobre la recta dada por encima y por debajo de P obtendremos dos puntos, M y T, que son mínimas abscisas de los μ'. El lugar geométrico de éstos está constituído, pues, por las semirrectas de extremos M y T no continentes de P.

El lugar restringido que tratamos de encontrar será, por lo tanto, el conjunto de las intersecciones de las perpendiculares a estas semirrectas en todos sus puntos y de las rectas del haz acotado $O - \alpha$; es decir, las partes infinitas rayadas en la figura.

Cuando P recorre el eje radical, el lugar restringido se desplaza asimismo sobre el plano y engendra el total. Hallemos las trayectorias de los vértices S y R.

Por ser rectos los ángulos PTS y PAS y ser $PA = PT$, es también $AS = ST$. O sea, $ST - SO = r$; luego S pertenece a una parábola de foco O y directriz ED. Análogamente, el punto R pertenece a otra parábola homofocal a la anterior de constante $-r$, es decir, de directriz E'D'. Estas parábolas pasan, respectivamente, por N y F. El lugar propuesto es, por lo tanto, la región del plano no interior a la parábola de directriz ED.

Ambas cónicas son l. g. de los centros de las circunferencias tangentes a la dada y a la recta MT.

En el caso particular de ser un punto el círculo dado, el lugar propuesto es, naturalmente, la región del plano no interior a la parábola que tiene a dicho punto como foco y a la recta dada como directriz.

9. — *Lugar de los centros de las circunferencias que tienen puntos comunes con tres dadas.*

Sean C_1, C_2, C_3 estas últimas circunferencias, cuyos centros son O_1, O_2, O_3, y a cuyos radios designaremos por r_1, r_2, r_3, respectivamente (fig. 12). Resolvamos el problema correspondiente al número 7 para los pares de circunferencias (C_1, C_2), (C_1, C_3), (C_2, C_3), y obtendremos así tres recintos del plano no interiores, respectivamente, a las hipérbolas de constantes $r_1 + r_2$, $r_1 + r_3$, $r_2 + r_3$, cuyos focos son los pares de puntos (O_1, O_2), (O_1, O_3), (O_2, O_3). La parte común M a estos tres recintos del plano es el lugar propuesto. En efecto, todo punto, P, de M ha de ser centro de tres coronas circulares $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, de manera que cada corona $\alpha_{i,j}$ está formada por todas las circunferencias de centro P

que cortan y son tangentes a cada par (C_i, C_j). Si, por ejemplo, la circunferencia C_3 no tuviese ningún punto en la corona $\alpha_{1,2}$ no podría haber tampoco ninguna circunferencia de centro P que tuviera puntos comunes reales con alguno de los pares (C_1, C_3), (C_2, C_3), contra la hipótesis, puesto que $\alpha_{1,2}$ está limitada por circunferencias que han de ser tangentes a alguna de las C_1, C_2. Luego existe una corona circular de centro P que es común a las tres coronas $\alpha_{i,j}$. De igual modo, todo punto que no pertenece a M no es centro de ninguna circunferencia que corta o es tangente a la terna dada.

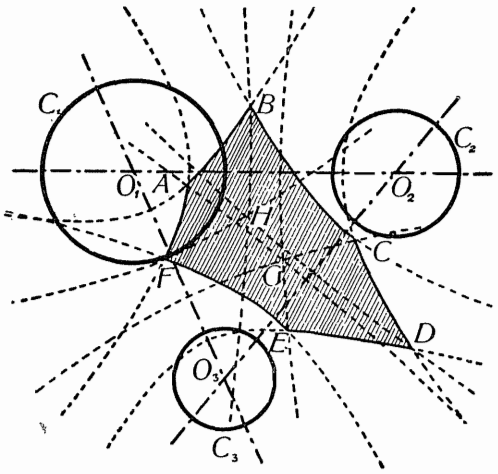

Fig. 12

Es curioso ver qué forma tiene este lugar. Si todos los puntos de intersección son propios, las hipérbolas que limitan los tres recintos mencionados producen seis vértices, A, B, C, D, E, F, y, por consiguiente, M es una parte de plano comprendida entre seis arcos de hipérbola.

En el problema del número 7 vimos cómo, además de la hipérbola de constante $r_1 + r_2$, obteníamos también otra homofocal de constante $r_1 - r_2$. Pues bien, es elemental probar que por cada vértice del exágono curvilíneo A B C D E F pasa una rama de hipérbola de constante genérica $r_i - r_j$. Para el vértice A, por ejemplo, se verifica:

$$A O_3 - A O_1 = r_3 + r_1 \; ; \; A O_2 - A O_1 = r_2 + r_1,$$

y, restando, $A O_3 - A O_2 = r_3 - r_2$. Puede verse también que en el lugar M hay dos puntos, G y H, comunes a tres ramas de estas hipérbolas homofocales a las que limitan M. Naturalmente, estos puntos y los seis vértices del exágono son las ocho soluciones del problema de Apolonio relativo a tangencia.

10. — El problema precedente puede originar nueve casos particulares, cuando una, dos o las tres circunferencias dadas degeneran en puntos y rectas. En todos ellos han de figurar las soluciones del problema de Apolonio como puntos notables de estos lugares áreas.

En la figura 13 está representado el lugar correspondiente al caso de ser dos circunferencias γ_1, γ_2 y una recta ρ la terna dada. Dicho lugar consta de dos recintos infinitos del plano: Uno

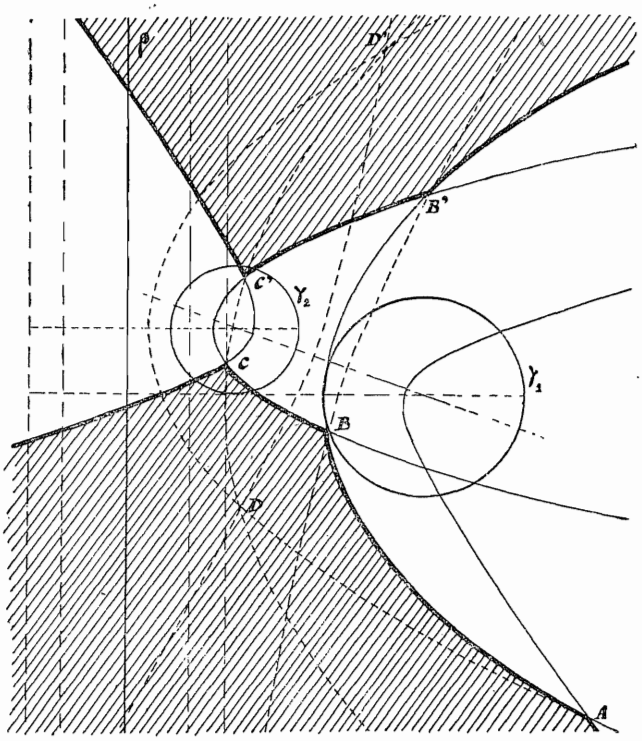

Fig. 13

de ellos tiene como vértices los puntos A, B y C, y posee un punto interior D común a tres curvas: una hipérbola y dos parábolas.

El otro recinto tiene por vértices los puntos A', B' y C' (el A' falta en la figura), y posee también un punto interior D', común a las mismas curvas que pasan por D.

Estos ocho puntos son las soluciones de Apolonio.

11. — *Lugar de los puntos cuya suma de distancias a dos arbitrariamente elegidos en sendas rectas es una constante* k *finita y no nula.*

Sean x e y las rectas dadas (fig. 14), y ρ una recta cualquiera del haz de vértice O. Sobre ρ sólo existen dos puntos P, P', simétricos respecto de O, que cumplen la condición de ser k la suma de sus distancias respectivas a x e y. Cualquier punto de ρ exterior al segmento P P' no puede ser del lugar propuesto, por-

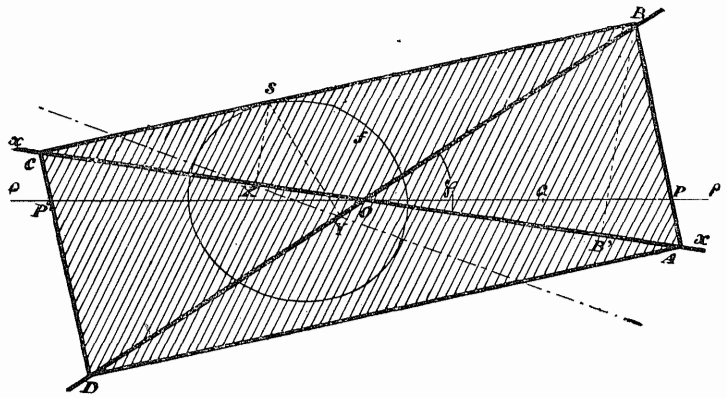

Fig. 14

que la suma de sus distancias a los puntos más próximos a él, uno de x y otro de y, es ya superior a k. En cambio, los puntos del segmento P P' son del lugar, puesto que, si es Q uno genérico, es siempre posible trazar desde Q sendas oblicuas a x e y de manera que sea k la suma de ellas. Se desprende asimismo que las cordenadas oblicuas (x, y) de P varían linealmente con ρ. Finalmente, siendo ρ una recta genérica del haz de vértice O, deducimos de todo lo expuesto: 1º. El lugar es un área finita del plano; 2º. La línea que limita esta área es poligonal, y O es su centro de simetría; 3º. Dicha línea es, a su vez, l. g. de los puntos cuya suma de distancias a las rectas dadas es la constante k propuesta.

Para acabar de determinar el lugar basta observar que las rec-

tas dadas pertenecen también al haz considerado, y que llevando sobre cada una de ellas a partir de O, a uno y otro lado, distancias iguales a $\frac{k}{\text{sen } \varphi}$, los puntos extremos A, B, C, D son límites del lugar en dichas rectas, ya que, por ejemplo, es

$$B\,B' = B\,O \operatorname{sen} \varphi = k,$$

y como P se mueve linealmente en el plano en cada «cuadrante» de los ejes (x, y), el lugar es, en definitiva, el rectángulo A B C D.

Una variación del ángulo φ o de la constante k acarrearía también variación de perímetro y área del rectángulo hallado; pero la propiedad que sintetiza los puntos del contorno subsistiría.

Las ecuaciones de los cuatro lados del rectángulo son

$$\pm x \pm y = \frac{k}{\text{sen } \varphi} \qquad [1];$$

pero, sin embargo, no todos los puntos de estas rectas son del lugar. Es preciso acotar las variables.

Pues bien: así como los puntos del perímetro A B C D, formado por cuatro *segmentos*, tienen una propiedad que los unifica, debe existir también una sola expresión analítica que sólo quede verificada por los puntos del perímetro de referencia. Puede conseguirse esto introduciendo valores modulares de las variables. En efecto: la aparente contradición [1] nace de no tener en cuenta que, en nuestro problema, el concepto de distancia es elemental, independiente de la orientación, o sea, es un valor absoluto, y que la palabra *suma* tiene, pues, el significado primitivo que excluye a la suma algébrica. Es fácil probar que, como consecuencia de esto, los valores absolutos de x y de y han de ser iguales o inferiores a $\frac{k}{\text{sen } \varphi}$ (fracción siempre positiva).

Por lo tanto, considerando las rectas x, y como ejes oblicuos, la suma de los módulos de las coordenadas de un punto genérico S del contorno ha de ser igual a la semidiagonal del rectángulo, es decir,

$$|x| + |y| = \frac{k}{\text{sen } \varphi},$$

ecuación que sólo satisfacen las coordenadas — positivas o negativas — de los puntos del contorno. Poniéndola en forma explícita es

$$|y| = \frac{k}{\operatorname{sen} \varphi} - |x|,$$

lo cual expresa que la diferencia del segundo miembro ha de ser siempre positiva, o lo que es lo mismo: $|x| \leqq \frac{k}{\operatorname{sen} \varphi}$. Y, con el fin de no excluir las coordenadas negativas, puede ponerse

$$y = \pm \left(\frac{k}{\operatorname{sen} \varphi} - |x| \right).$$

Por lo tanto, a cada valor, positivo o negativo, de una de las variables corresponden dos opuestos de la otra.

El área del rectángulo lugar, en función de k y φ, es $\frac{2\,k^2}{\operatorname{sen} \varphi}$ como fácilmente se deduce.

En el caso particular de ser $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la ecuación obtenida es $|x| + |y| = k$, y representa los cuatros lados de un cuadrado cuya semidiagonal es k. El área es $2\,k^2$.

El l. g. de que estamos tratando tiene doble motivo para ser un lugar área: Por una parte, existen dos rectas, x e y, que son conjuntos-variables; por otra, a cada par de puntos elegidos arbitrariamente, uno en x y otro en y, corresponden todos los puntos de una elipse cuyos focos son X e Y y k la constante. O sea, el problema matriz de este lugar, referido sólo al par (X, Y) de entes primitivos produce ya un l. g. unidimensional. Podemos sustituir este problema matriz por otro en el que figure un ente primitivo más, de manera que su solución sea uno o varios puntos, y que resolviéndolo reiteradamente genere el lugar propuesto. Basta para ello considerar como entes primitivos a los de la terna (X, Y, ρ), y como cuestión encontrar los puntos P_i de ρ que cumplen $P_i X + P_i Y = k$. Haciendo después que estos entes pertenezcan, respectivamente, a las rectas x, y y al haz de rectas de vértice O obtendremos el rectángulo lugar. Se desprende, pues, que los sistemas de lugares parciales inciden según líneas.

Hemos dicho que a cada par de puntos X, Y tomados en x e y arbitrariamente corresponde una elipse f, cuyos puntos han de ser todos del rectángulo hallado. No siempre ocurre que f es tangente a los lados del rectángulo, como se ve, por ejemplo, tomando X e Y de manera que sea $XY = k$; pero existen elipses que tienen un punto límite S. Los focos de estas elipses tangentes al contorno se hallan tomando en éste un punto S arbitrario — que es el

de tangencia — y trazando las perpendiculares S X, S Y a x e y. Los pies de ellas son dichos focos.

Si X, Y coinciden en O, la elipse degenera en la circunferencia de centro O y radio 1/2 k, y ningún punto de ella es límite, porque O no puede ser pie de dos perpendiculares a x e y trazadas desde un mismo punto.

Finalmente, si a uno de los dos entes primitivos X, Y se le considera fijo y el otro varía en su recta obtenemos un lugar parcial que es también un área, y que vamos a resolver a continuación.

12. — *Lugar de los puntos cuya suma de distancias a uno fijo* F *y a otro variable sobre una recta* r *es una constante* k *finita.*

La generación de este lugar puede hacerse así: Supongamos dos puntos X y F y una recta ρ que pasa por el último. Ahora cabe el problema de hallar sobre ρ los puntos P_i tales que $P_i X + P_i F = k$. El lugar propuesto queda generado asignando a los entes primitivos X y ρ sendos conjuntos-variables: una recta r al primero y el haz de rectas de vértice F a la segunda. El otro ente primitivo F permanece fijo. Y siendo lineales ambos conjuntos-variables es claro que el lugar ha de ser una área.

Dejando fijo X y considerando todas las rectas del haz tendremos un lugar parcial correspondiente a dicho haz, que es la elipse de focos X y F y constante k. Del mismo modo, un lugar parcial correspondiente al conjunto-variable r es un segmento rectilíneo que contiene a F. La incidencia de ambos sistemas de lugares parciales es forzosamente de dimensión *cero*.

He aquí cómo puede obtenerse el lugar total: Tracemos las parábolas de foco común F (fig. 15), cuyas directrices d y d' distan k de la recta r. Se ven fácilmente dos cosas: 1ª. Estas parábolas tienen comunes dos puntos reales M, N que pertenecen también a r, y son simétricos, claro es, respecto del eje común a ambas curvas. 2ª. Los arcos M S N, M Q N de estas dos parábolas tienen la propiedad de que la suma de las distancias de sus puntos a F y a r es k; luego tales arcos son del lugar propuesto.

Todo punto P del recinto M S N Q M es también del lugar, y los P', exteriores a él, no lo son. Basta, en efecto, observar que es $PX + PF < k$ y $P'X + P'F > k$. En el primer caso siempre existen dos oblicuas a r desde P cuyas longitudes respectivas sumadas a P F dan k.

No puede darse el caso que estas oblicuas corten a r fuera del segmento M N, puesto que F M = F N = k.

El recinto citado es, pues, el lugar pedido.

De las últimas igualdades se deduce además que la elección arbitraria de X está acotada, ya que sólo varía en el segmento M N.

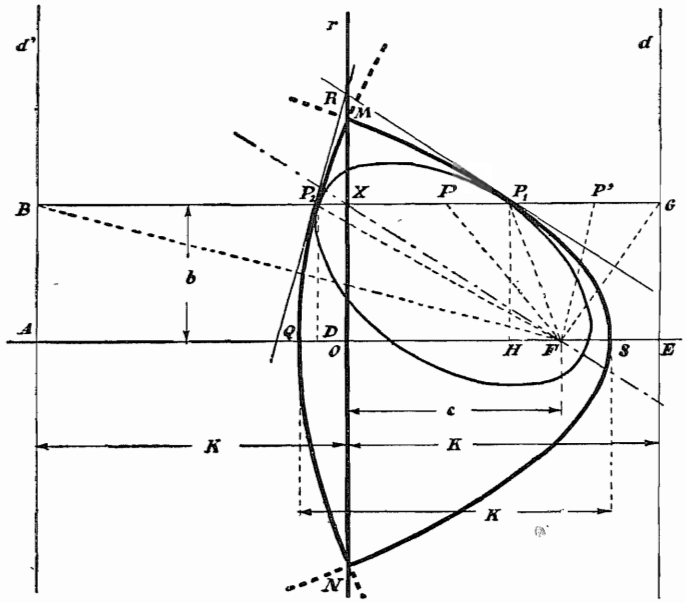

Fig. 15

A cada foco X corresponde una elipse lugar parcial, que tiene dos puntos de tangencia P_1, P_2 con la curva límite compuesta M S N Q M. Esta curva es, por lo tanto, la envolvente de las elipses lugares parciales. Es fácil ver también que los puntos P_1, P_2 tienen igual ordenada.

Cuando el foco móvil X es cualquiera de los puntos singulares M, N las elipses degeneran en los segmentos F M, F N.

Puede probarse fácilmente que las tangentes a los arcos que forman la curva límite en los pares de puntos (P_1, P_2) concurren en la recta r. Sea b la ordenada de P_2 (y de P_1), y vamos a hallar la ordenada de R, intersección de r y la tangente en P_2 al arco M Q N. De la semejanza de los triángulos R X P_2 y F A B resulta:

$$\frac{OR - b}{P_2X} = \frac{k + c}{b}\,; \quad OR = P_2X\,\frac{k + c}{b} + b\,;$$

pero del triángulo $P_2 D F$ se deduce:

$$(k - P_2 X)^2 = b^2 + (P_2 X + c)^2 \; ; \; P_2 X = \frac{k^2 - b^2 - c^2}{2 (k+c)},$$

valor que sustituído en el de $O R$ nos da:

$$O R = \frac{k^2 + b^2 - c^2}{2 b}.$$

Escribiendo relaciones análogas deducidas de la semejanza de los triángulos $R X P_1$ y $G E F$ se obtiene el mismo valor último para la ordenada de la intersección de r y la tangente en P_1 al arco $M S N$, c. s. q.. d.

Los puntos de la curva $M S N Q M$ tienen una propiedad que los sintetiza, y vamos a encontrar la expresión analítica que representa esa propiedad.

La abscisa x de un punto genérico de la curva compuesta, sumada al radio vector ρ de dicho punto, ha de dar la constante prefijada k, teniendo en cuenta sólo el valor absoluto de x. Es decir, $|x| + \rho = k$. Pero $\rho = \sqrt{y^2 + (c - x)^2}$, donde y es la ordenada del punto genérico. Obsérvese que la x del radicando no está modulada. Sustituyendo y elevando al cuadrado resulta

$$y^2 = 2 c x - 2 k |x| + k^2 - c^2 \qquad [1],$$

ecuación que nos permite hallar la ordenada (positiva o negativa) de un punto de abscisa $\pm$ x.

Comprobemos algunos valores: Desde luego, la ecuación [1] indica simetría de la curva respecto del eje x, como así es, en efecto. Si hacemos $x = 0$, es $y = \pm \sqrt{k^2 - c^2}$, lo cual indica que el radio vector de los puntos M y N es k, de acuerdo con la figura. Haciendo $y = 0$, ha de ser $2 k |x| - 2 c x = k^2 - c^2$. El primer término es siempre positivo, y el segundo será positivo cuando x sea negativo, y recíprocamente. Por lo tanto, $2 x (k \mp c) = k^2 - c^2$;

$$x' = 1/2 (k + c) \; ; \; x'' = - 1/2 (k - c),$$

valores que tienen los segmentos $O S$ y $O Q$ respectivamente.

Sustituyendo el valor x' en [1], y se anula. Si hacemos $x > 1/2 (k + c)$, como es siempre $k > c$, la diferencia $2 c x - 2 k |x|$ sería

entonces inferior $c^2 - k^2$, y el segundo miembro de la ecuación [1] se haría negativo. Análogamente puede decirse cuando $x < -1/2\ (k - c)$. Por consiguiente, la curva límite del lugar propuesto sólo está definida en el intervalo $-1/2\ (k - c) \leqq x \leqq 1/2\ (k + c)$.

Por último, cuando es $y > \sqrt{k^2 - c^2}$, o $y < -\sqrt{k^2 - c^2}$ resulta $2\,c\,x - 2\,k|x| > 0$, y no existen valores reales de x que verifican esta última desigualdad. La curva queda, pues, definida, como ya sabíamos, sólo en el intervalo $-\sqrt{k^2 - c^2} \leqq y \leqq \sqrt{k^2 - c^2}$.

Si en vez de ser una recta el conjunto-variable r fuese un segmento, el lugar estaría limitado por arcos de parábola y elipse.

Cuando el punto dado F pertenece a la recta r, la curva límite tiene como centro de simetría dicho punto, y M N es igual a 2 k; los puntos de ordenada nula tendrían la abscisa $\pm 1/2\,k$.

13. — *Lugar de los puntos cuya suma de distancias a otros dos arbitrariamente elegidos respectivamente en una circunferencia y una recta es una constante* k.

Este lugar es una generalización del correspondiente al número 11, y presenta tres casos, según sea $k \gtrless c + r$, donde c es la distancia entre el centro del círculo y la recta dados, y r el radio de dicho círculo.

1er. caso: $k > c + r$.

Tracemos las parábolas de foco común O (fig. 16) y directrices ρ', ρ'', ambas paralelas a la recta dada ρ y distantes de ella $k + r$. Se ve inmediatamente que los arcos D G F y D E F tienen comunes dos puntos reales D y F situados en ρ y simétricos respecto del eje común E G a ambas curvas. Cualquier punto P del arco D G F verifica:

$$P\,O + P\,A = k + r,$$

y otro punto N genérico del arco D E F verifica también:

$$N\,O + N\,A = k + r.$$

Por lo tanto,

$$P\,M + P\,A = k = N\,S + N\,A;$$

luego los puntos de la curva φ compuesta de ambos arcos son del lugar, y tienen la propiedad de que la suma de sus distancias a la circunferencia y a la recta dadas es k.

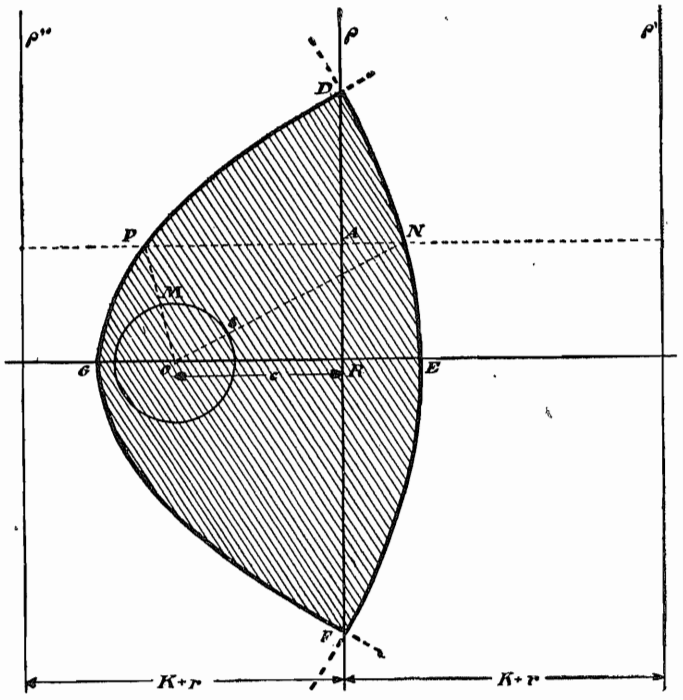

Fig. 16

Del mismo modo como se hizo en el problema anterior, puede probarse que todo punto del recinto de φ es también del lugar, y no lo son los puntos restantes del plano. El lugar es, pues, dicho recinto con la curva φ.

Como es $k > c + r$, todos los puntos de la circunferencia dada son del lugar, y ninguno de ellos pertenece a φ.

2do. caso: $k = c + r$.

Sabemos que es $GR + GO = k + r = c + 2r$; o sea, $GO = r$. En este caso la parábola de directriz ρ'' es, pues, tangente a la circunferencia, y, por consiguiente, $RE = r$.

3er. caso: $k > c - r$, y $k < c + r$.

Si hacemos la construcción como en los casos anteriores veremos (fig. 17) que el arco C V D de la parábola de foco O y di-

rectriz d' ha de cortar forzosamente (o ser tangente exterior cuando es $k = c - r$) a la circunferencia dada. Pues bien, la curva φ compuesta que limita el lugar en este caso es la misma que en los precedentes, excepto el arco E V F interceptado en la circunferencia. Basta ver que los puntos E y F distan k de ρ; y menos de k los de los arcos E C y F D. En cambio, los puntos del arco E V F tienen abscisa superior a k, y no pueden ser ya del lugar.

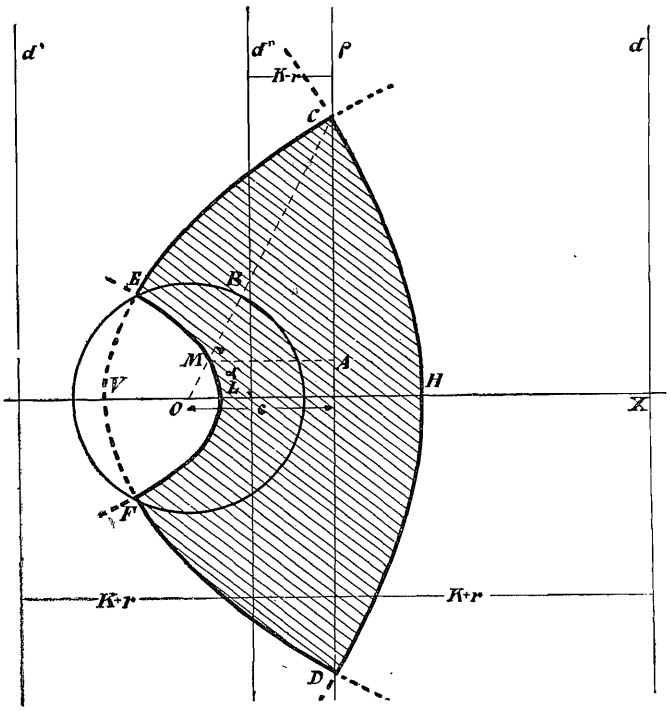

Fig. 17

Sea M un punto genérico de φ entre E y F; trazando M A, perpendicular a ρ, y el radio O B que pasa por M, ha de ser:

$$MA + MB = k;\ MA + r - MO = k;\ MA - MO = k - r;$$

luego M es de la parábola de foco O y directriz d'' (paralela a ρ y distante de ella $k - r$).

La curva φ de los casos anteriores sufre ahora una *refracción* en el círculo dado.

Tratemos de hallar la ecuación polar del conjunto de arcos de φ, siendo 0 el polo, y α el ángulo formado por el eje polar O H y el radio vector genérico μ. La distancia ϑ desde un punto de φ a la circunferencia dada sumada al módulo de la abscisa de dicho punto (en el sistema de ejes O H, ρ) ha de ser k. Es decir,

$$\vartheta + |x| = k \qquad [1].$$

Si el punto de φ no pertenece al círculo dado, es $\vartheta = \mu - r$, y si pertenece a este círculo, $\vartheta = r - \mu$, con lo cual es siempre $\vartheta = |\mu - r|$. El valor $|x|$ es la distancia del punto de φ a la recta dada ρ. Sea λ la proyección de μ sobre O H. Si el punto se toma en el arco C H D, es $|x| = \lambda - c$, y en caso contrario $|x| = c - \lambda$ — obsérvese que si el punto tiene una abscisa $|x| > c$, como es $\lambda = \mu \cos \alpha$ y $\frac{3\pi}{2} > \alpha > \frac{\pi}{2}$, el coseno es negativo, y $|x| = c + \lambda$ —. Para todos los puntos de φ resulta, pues $|x| = |c - \lambda| = |c - \mu \cos \alpha|$. Sustituyendo en [1] estos valores tendremos:

$$|\mu - r| + |c - \mu \cos \alpha| = k \qquad [2],$$

y, sucesivamente,

$$|c - \mu \cos \alpha| = k - |\mu - r|;$$

$$c^2 + \mu^2 \cos^2 \alpha - 2\, c\, \mu \cos \alpha = (k - |\mu - r|)^2;$$

$$\cos \alpha = \frac{c \pm (k - |\mu - r|)}{\mu} \qquad [3],$$

ecuación que permite representar gráficamente el conjunto de arcos de parábola que limita al lugar con sólo dar valores a μ; el valor máximo de μ es $k + r$, pues si fuese $|\mu - r| > k$ tendríamos $|c - \mu \cos \alpha| < 0$, como se deduce de [2], lo cual es absurdo.

El doble signo de [3] indica que $\cos \alpha$ ha de tener dos valores diferentes para cada valor de μ, cosa que no es cierta sino cuando $1/2\,(c + k + r) \leqslant \mu < k + r$. Y, en efecto, si en [3] damos a μ valores más pequeños, uno de los dos de $\cos \alpha$ resulta mayor que 1, y debe despreciarse.

En la figura vemos que $O L = 1/2\,(r + c - k)$, y sustituído en [3] nos da para el coseno un valor igual a la unidad, y otro mayor, que se desprecia. Para valores $\mu < 1/2\,(r + c - k)$ los dos

del coseno son mayores que la unidad, con lo cual la curva φ está definida en el intervalo $1/2\,(c+r-k) \leqslant \mu \leqslant k+r$.

14. — Si en el problema anterior consideramos fijo un punto en la recta dada ρ y variable a otro en la circunferencia, obtenemos un lugar parcial, que es, a su vez, un área, y que vamos a determinar.

Sea r el radio de la circunferencia, O su centro y P el punto fijo (fig. 18). Puede ocurrir tres casos: $k \gtreqless OP+r$.

1er. caso: $k > OP+r$.

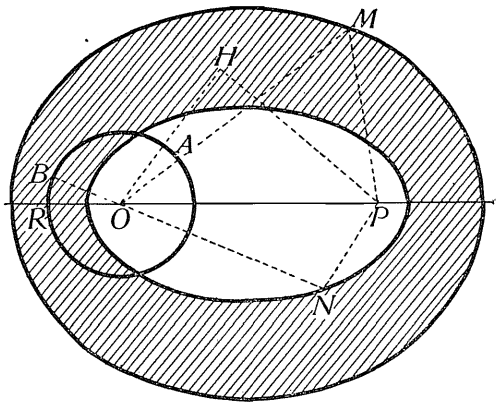

Fig. 18

Los puntos de una elipse de constante $k+r$ y focos O y P son del lugar, pues si M es uno genérico se tiene:

$$MO+MP=k+r;\ MA+MP=k.$$

Todo punto exterior a esta elipse no es del lugar, por ser MA la menor distancia desde M a la circunferencia.

Tracemos otra elipse de constante $k-r$ homofocal a la anterior. Un punto N genérico de ella verifica:

$$NO+NP=k-r;\ NB+NP=k;$$

luego N es también del lugar propuesto, y no lo son los puntos interiores a esta elipse, porque NB es la distancia máxima desde N a la circunferencia.

Todo punto H de la corona elíptica determinada por ambas elipses es del lugar, pues

$$k - r < HP + HO < k + r,$$

es decir, siempre existen dos vectores desde H a la circunferencia que sumados separadamente a PH dan k.

El lugar es, por lo tanto, la corona elíptica dicha.

2º. caso: $k = OP + r$.

Las elipses que limitan la corona tienen, en este caso, por constantes $k - r = OP$ y $k + r = OP + 2r$ respectivamente. El lugar es, pues, toda el área no exterior a la elipse de constante $k + r$, ya que la otra degenera en el segmento OP. La elipse límite de este lugar es tangente en R a la circunferencia dada.

3er. caso: $k < OP + r$, y $k > OP - r$.

La elipse de focos O y P y constante $k + r$ corta entonces, forzosamente, a la circunferencia, y, lo mismo que en los casos anteriores, pertenece y limita al lugar, excepto el arco MTH (fig. 19) interceptado en la circunferencia: Basta ver, en efecto, que los puntos de este arco distan de P más de k.

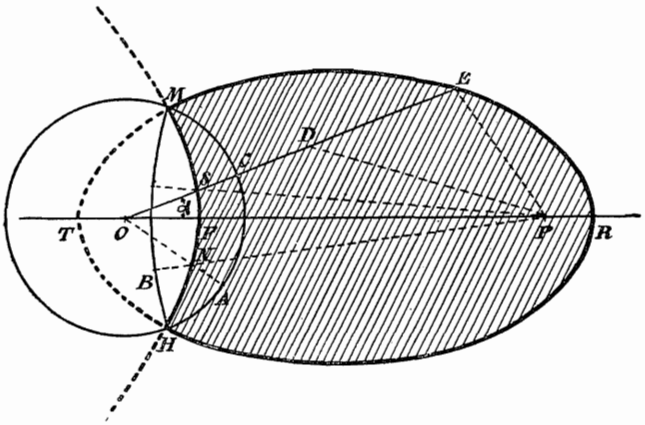

Fig. 19

Tracemos con centro en P y radio k un arco de circunferencia MBH, y sea PB un radio genérico de este arco. Sobre PB existe siempre un solo punto N tal que, trazando ON, es $NB = NA$;

y este punto N es del lugar y corresponde a la curva que lo limita, por ser N A la menor distancia desde N a la circunferencia.

Se verifica:

$$r - NO = k - NP;\ NP - NO = k - r.$$

El lugar geométrico de los puntos N es, pues, el arco M N H de la hipérbola de focos O, P y constante $k - r$.

Todo punto D no exterior al recinto M N H R M es del lugar propuesto, por ser

$$DO + DP < k + r;\ DC + DP < k;$$

y si unimos M y D será $DM + DP > k$, luego han de existir forzosamente en el arco M C H de la circunferencia dada dos puntos, X_1, X_2, para los cuales sea $DX + DP = k$. El lugar es, por lo tanto, la superficie rayada en la figura.

Cuando $r = k$, el arco M N H degenera en un segmento rectilíneo, que pasa a ser eje menor de la elipse, en tal caso de constante $2k$.

Los puntos de la curva compuesta que limita al lugar están ligados por la propiedad de ser k la suma de sus distancias a la circunferencia dada y a un punto P exterior a ella. A esta propiedad que los unifica corresponde una sola expresión analítica con módulos, que podemos obtener en coordenadas polares: Hagamos $OP = c$, y sea O el polo. Desde él tracemos una secante cualquiera, que cortará a la curva límite en puntos S, E.

Sabemos que es

$$SC + SP = EC + EP = k,$$

y llamando d a cualquiera de los radios vectores correspondientes a los pares de puntos S, E, la distancia de todo punto de la curva a la circunferencia quedará expresada siempre por $|d - r|$. La distancia de un punto genérico de la curva a P viene dada por

$$EP = \sqrt{d^2 + c^2 - 2dc\cos\alpha},$$

siendo en este caso $d = OE$. Para el punto S sería $d = OS$, y la distancia, S P. La ecuación que traduce la propiedad que sintetiza a

los puntos de la curva compuesta toma, pues, la forma.

$$|d - r| + \sqrt{d^2 + c^2 - 2dc\cos\alpha} = k;$$

y, sucesivamente,

$$\sqrt{d^2 + c^2 - 2dc\cos\alpha} = k - |d - r|,$$

$$\cos\alpha = \frac{c^2 - k^2 - r^2 + 2dr + 2k\,|\,d - r\,|}{2\,d\,c}$$

A cada valor de d corresponden dos opuestos y admisibles de α, con lo cual la curva es simétrica respecto del eje polar. En virtud del término $2\,k\,|d - r|$ existen dos valores para d, tales como los correspondientes a los puntos S y E, que verifican [1], para un mismo ángulo.

De la figura se deduce que el radio vector de R vale $1/2\,(r + c + k)$; sustituído en [1], y teniendo en cuenta que la diferencia $1/2\,(r + c + k) - r$ es positiva, obtenemos $\cos\alpha = 1$. Un valor mayor de d nos conduciría a la desigualdad $\cos\alpha > 1$, por ser $k + r > c$. El radio vector ha de cumplir de momento la limitación $d \leqslant 1/2\,(c + r + k)$.

El d correspondiente a F vale $1/2\,(c + r - k)$, y la diferencia $1/2\,(c + r - k) - r$ es negativa; pero podemos cambiar los signos, por estar modulada en [1], y entonces dicha expresión es $\cos\alpha = 1$.

Un valor $d < 1/2\,(r + c - k)$ aumentaría el módulo $|d - r|$, y, por lo tanto, $\cos\alpha$, que llegaría a valer más de la unidad. Luego debe ser

$$1/2\,(c + r - k) \leqslant d \leqslant 1/2\,(c + r + k).$$

Dando a d valores que cumplen esta limitación, sustituídos en [1], encontraremos ángulos $\pm\alpha$ que permiten representar la curva límite.

15. — *Lugar de los puntos cuya suma de distancias a dos elegidos arbitrariamente en sendas circunferencias es* k.

Sean O y O' los centros de las circunferencias, y r y r' sus radios (fig. 20), suponiendo $r' > r$.

1er caso: $k > O\,O' - r + r'$.

Con focos O, O' tracemos dos elipses φ, φ' de constantes $k + r + r'$ y $k - r - r'$ respectivamente. Es fácil ver que los puntos P, de la primera, y M, de la segunda, son del lugar, y pertenecen también: P a la elipse de focos A, B y constante k, y M a la de focos F, H e igual constante.

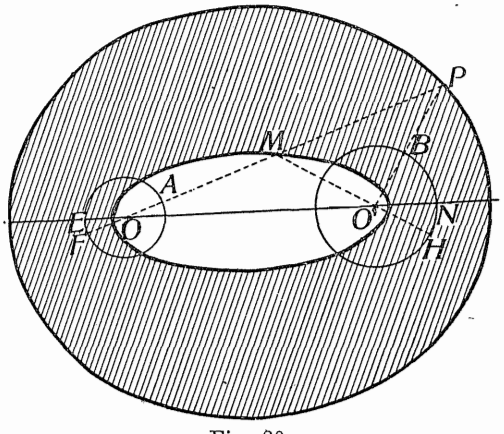

Fig. 20

Todo punto exterior a φ no es del lugar propuesto, como tampoco lo son los puntos interiores a φ'. Todo punto Q de la corona limitada por φ y φ' es del lugar, pues

$$k + r + r' > Q\,O + Q\,O' > k - r - r';$$

luego siempre existen dos oblicuas a las circunferencias que sumadas dan k.

El lugar es dicha corona elíptica; y los círculos dados quedan dentro de φ.

2º. caso: $k = O\,O' - r + r'$.

Sumando ambos radios a los miembros de esta igualdad es $k + r + r' = O\,O' + 2\,r'$. La elipse envolvente del lugar es tangente en N a la circunferencia de radio r'. Restando la suma de los radios es $k - r - r' = O\,O' - 2\,r$, o sea, que el lugar es la elipse φ y su recinto. Cuando $E\,N = k$, φ' degenera en un segmento rectilíneo. Si es $r = r'$ y $k = O\,O'$, la elipse φ (en este caso constante $k + 2\,r$) es tangente a ambas circunferencias en E y N.

3er. caso: $k < OO' - r + r'$ y $k > OO' - (r + r')$.

En estas condiciones, la elipse φ ha de cortar por lo menos a la circunferencia de radio r' (cuando es $OO' - r' + r < k < OO' - r + r'$), y corta a las dos circunferencias dadas si es $k < OO' - r' + r$. Supongamos que ocurre esto último. La elipse φ limita, como en los casos anteriores, al lugar propuesto, excepto los arcos DSG y BTE interceptados en los círculos conocidos, como es fácil probar (fig. 21). Se ve también fácilmente que los puntos B y E de la elipse φ los son asimismo de una rama de hipérbola

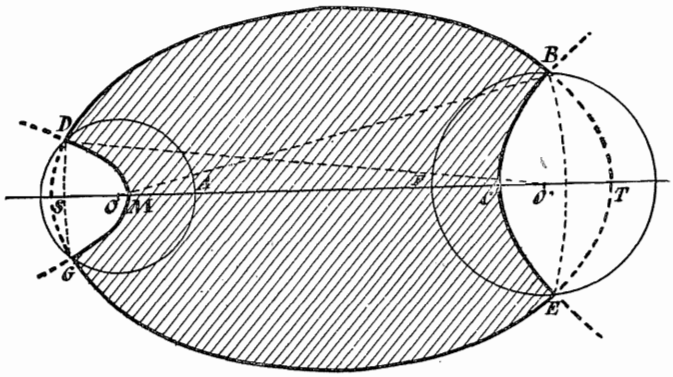

Fig. 21

homofocal a φ de constante $k + r - r'$; y que los puntos D y G pertenecen a una rama de otra hipérbola homofocal a φ, de constante $k + r' - r$. Los arcos BCE y DMG de estas hipérbolas mencionadas sustituyen, respectivamente, a los BTE y DSG de φ; es decir, que la curva que limita al lugar es la BDMGECB. Todo punto H del recinto de esta curva es del lugar propuesto, cosa bien fácil de reconocer.

Si es $r = r'$ la figura tiene dos ejes de simetría.

16. — Tomemos un segmento rectilíneo AB de longitud k (fig. 22), y con centro en uno de sus extremos — B, por ejemplo — tracemos una circunferencia genérica C del haz de las de radio x que verifica $0 \leqslant x \leqslant k$, y centro B. Esta circunferencia corta en X al segmento AB. Hallemos el conjugado armónico Y de X respecto de AB, y desde Y tracemos todas las secantes y tangentes a C. Hallar el l. g. de los centros Z de todas las cuerdas γ intercep-

tadas por las secantes y tangentes en todas las circunferencias C del haz mencionado (*).

Para la circunferencia C considerada el lugar de los centros Z es el arco P B Q que pertenece a la circunferencia de diámetro B Y. Veamos cuál es el l. g. de los puntos P y Q de tangencia en todos los círculos del haz.

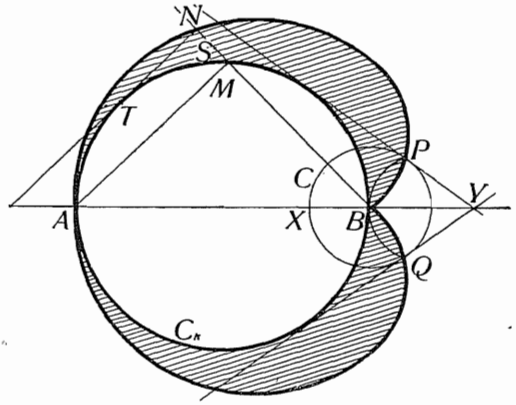

Fig. 22

Es fácil observar que las tangentes Y P, Y Q lo son asimismo a la circunferencia fija C_k de diámetro A B. Por lo tanto, los puntos P_i y Q_i genéricos son pies de las perpendiculares trazadas desde B a todas las tangentes a C_k. El lugar P_i y Q_i es, pues, una podaria de C_k; y por ser B de C_k dicha podaria es cardioide de C_k.

Tenemos así una figura constituída por la circunferencia C_k y su cardioide respecto de B. Vamos a probar que el lugar propuesto es el área comprendida entre estas dos curvas. En efecto: reconoceremos que un punto S del plano es del lugar cuando unido con B, la perpendicular en S a B S no corta al segmento A B, o lo corta en A. Mas no basta esto: es preciso, además, que dicha perpendicular tenga algún punto común con la circunferencia C_k. Tracemos por B una recta arbitraria B N, y dos perpendiculares a ella: una en M (punto de intersección con C_k) y otra en N (punto de intersección con la cardioide). La primera perpendicular corta en A al segmento A B, y la otra es tangente a C_k. Luego en

(*) Propuesto por Carlos R. de las Cuevas.

la semirrecta B N sólo son puntos del lugar los del segmento M N interceptado en el área dicha.

Si, dada una circunferencia C, trazamos además la que es tangente exterior a ella de centro A, vemos que el punto Y ya aludido es centro de semejanza directa de ambas circunferencias C, C'. Podemos considerar entonces, no sólo las cuerdas γ interceptadas en C por las secantes desde Y, sino también las γ' correspondientes a C' sobre las mismas secantes, y hallar el l. g. de los pares de puntos Z, Z', centros respectivos de esas cuerdas cuando se traza todos los pares de circunferencias tangentes C, C'. Obtendríamos el área limitada por Cγ y sus dos cardioides φ, φ' simétricas respecto de O (fig. 23).

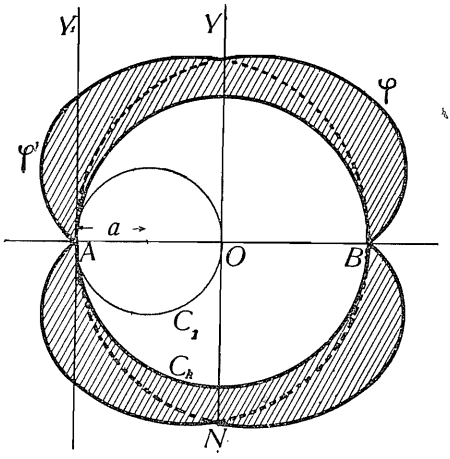

Fig. 23

Si en una función $y = f(x)$, uniforme, continua, etc., con puntos reales en el primer cuadrante, modulamos la variable x, a cada par de valores opuestos de x corresponderá uno mismo para y. Representará, pues, una línea simétrica respecto del eje O Y: los valores negativos de x en la función f (x) proporcionaban puntos a la izquierda de O Y, que, en general, no existirán después de introducir $|x|$, a cambio de obtener otros simétricos de los situados a la derecha. Cosa análoga acontece en la función $x = \varphi(y)$. Si en la función $F(x, y) = o$ modulamos ambas variables desaparecerán todos los puntos no situados en el primer cuadrante, a cambio de los simétricos de éstos respecto de los ejes coordenados y el origen.

La ecuación de la cardioide φ' referida a los ejes (X, Y_1) es

$$(x_1^2 + y^2 - 2\,a\,x_1)^2 = 4\,a^2\,(x_1^2 + y^2),$$

siendo a el radio de la circunferencia C_1. Referida al sistema (X, Y) será $x_1 = x + 2\,a$, y se trasforma en

$$[(x + 2\,a)^2 + y^2 - 2\,a\,(x + 2\,a)^2] = 4\,a^2\,[(x + 2\,a)^2 + y^2],$$
$$(x^2 + y^2 + 2\,a\,x)^2 = 4\,a^2\,[x^2 + y^2 + 4\,a\,(a + x)].$$

Poniendo $-x$ en vez de x se obtiene la ecuación de la cardioide φ:

$$(x^2 + y^2 - 2\,a\,x)^2 = 4\,a^2\,[x^2 + y^2 + 4\,a\,(a - x)]$$

y modulando x, la ecuación resultante representa el conjunto de los cuatro arcos que limitan el lugar, de una parte:

$$(x^2 + y^2 - 2\,a\,|x|)^2 = 4\,a^2\,[x^2 + y^2 + 4\,a\,(a - |x|)],$$

simétrica respecto de los dos ejes.

Es claro que lo dicho de la modulación de las variables en una función plana es aplicable al espacio ordinario E_3.

* * *

He aquí algunos enunciados de lugares de puntos áreas en el plano:

Superficies medias:

De las ramas de una hipérbola.

De una circunferencia y los lados de un cuadrado. Casos particulares.

De la lemniscata.

De la podaria de una curva. Etc., etc.

Otros lugares:

Sea V el punto base de un haz de circunferencia C_i, todas tangentes en V, cuyos diámetros $+x$ cumplen la limitación $o \leqslant x \leqslant k$. Tracemos todas las cuerdas VX de las C_i, y a partir de los extremos X tomemos segmentos $X P_i$ de modo que sea $VX + X P_i = k$.

Los segmentos $X P_i$ son exteriores a sus circunferencias C_i y se construyen de forma que las tangentes en los X a las C sean bisectrices de los ángulos $V X P_i$. Hallar el lugar de los puntos P. Es decir, las cuerdas quedan *refractadas*.

Sean dos rectas r, r' que se cortan en O. Tomemos arbitrariamente sendos puntos X, Y en esas rectas. Hallar el lugar de los baricentros y ortocentros de los triángulos $O X Y$.

Lugar de los puntos P tales que sea $\overline{PX}^2 + \overline{PY}^2 = k$, siendo X e Y puntos arbitrarios de sendas rectas dadas.

Lugar de los puntos P que cumplen $PX + PY = k$ (X e Y son puntos arbitrarios de sendas ramas de una hipérbola). Casos particulares.

Lugar de P cuando es $PX \cdot PY = k$. X e Y puntos de sendas rectas. Casos particulares.