ELBA R. RAIMONDI

# UN PROBLEMA DE PROBABILIDADES GEOMETRICAS SOBRE LOS CONJUNTOS DE TRIANGULOS

UNION MATEMATICA ARGENTINA
Publicación N.º 25

BUENOS AIRES
1942

Al unir los puntos medios $A'$, $B'$, $C'$ de los lados del triángulo $ABC$ se obtiene el triángulo $A'B'C'$ dentro del cual debe estar $I$ para que con los segmentos $x, y, z$ se pueda formar un triángulo, pues solamente en ese caso se verifica que: $x < y + z$, $y < x + z$ y $z < x + y$.

El punto $I$ representa al par de puntos interiores al segmento dado y que lo dividen arbitrariamente en tres segmentos con los cuales se puede formar siempre un triángulo.

2°. Study representa (en Abh. d. math. phys. Kl. d. Kgl. sächs. ges. d. Wissensch. Leipzig 1893) cada triángulo por el punto de $E_3$ cuyas coordenadas son los tres lados del mismo.

Este es el método seguido por Wolff en el «Journal für die reine und angewandte Mathematik» Band 153 s. 66.

3°. Utilizando un interesante teorema de Pompeiu (1) nos proponemos representar cada triángulo por un punto del plano de la manera siguiente:

Sea el triángulo $ABC$ equilátero e $I$ un punto cualquiera del plano (Fig. 2); si unimos $I$ con los vértices del triángulo dado obtenemos los tres segmentos $IA$, $IB$, $IC$ con los cuales podemos siempre formar un triángulo.

Objeto de esta nota es el estudio de estos métodos de representación y su comparación entre sí, aplicando todos ellos al problema concreto de calcular la probabilidad de que un triángulo del cual se dan arbitrariamente los tres lados, sea acutángulo u obtusángulo (2).

2. — Problema previo es el siguiente: 1°. En cada uno de los tres métodos citados ¿aparecen todos los triángulos? 2°. ¿Aparece cada uno más de una vez?

Inmediatamente se observa que en el método usado por Poincaré solamente se obtienen los triángulos de perímetro prefijado y cada uno de ellos una sola vez si se tiene en cuenta el orden de los lados, o bien seis veces si se prescinde de él, tres si es isósceles, una si es equilátero.

Como cualquier triángulo es semejante a alguno de éstos, la familia de todos ellos queda normalizada por esta condi-

(1) "Bulletin de Mat. et de Ph. pures et appl. 1935.

(2) Este problema, para el primer método de representación, se encuentra ya resuelto por E. Lemoine, *Quelques questions de probabilités resolues géométriquement.* Bull. Soc. Math. France t. 11.

ción de perímetro prefijado, que permite representar todos los semejantes entre sí por un mismo punto.

En el método de Study, por el contrario, triángulos semejantes están representados por puntos de una semirrecta de origen $O$ y se logra normalización análoga considerando como en el método de Poincaré los triángulos de perímetro $a+b+c=1$ los cuales están representados por la superficie del octaedro cuyos semiejes $x, y, z$, valen $1$ (normalización *octaédrica*).

Otro modo de normalización sería éste: sustituir cada triángulo por otro triángulo semejante que cumple la condición $a^2+b^2+c^2=1$, es decir, basta dividir los lados $a, b, c$, de cualquier triángulo por $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; claramente se ve que los puntos representativos forman en este caso la superficie esférica de centro $O$ y radio $1$ (normalización *esférica*).

También con este método se obtiene cada triángulo una sola vez si se tiene en cuenta el orden de los lados o bien seis veces si se prescinde de él.

En el método que proponemos, basado en el teorema de Pompeiu, se observa desde luego que los triángulos muy pequeños no están representados; basta observar en efecto que en un triángulo equilátero el centro tiene la propiedad de hacer mínima la suma de distancias a los tres vértices. En efecto, recordemos que el punto de Fermat (o de Steiner) de cualquier triángulo, esto es, aquel cuya suma de distancias a los vértices es mínima, es el punto desde el cual se ven sus tres lados bajo ángulo de $120^\circ$ y este punto coincide con el centro, si el triángulo es equilátero.

No hay, en cambio, cota superior para las dimensiones de los triángulos definidos con este método, puesto que existen puntos en el plano cuyas distancias a los tres vértices del triángulo equilátero superan a cualquier número.

También se ve inmediatamente que cada triángulo tiene en la representación que estudiamos dos semejantes; en efecto: para obtener un punto $P$ que cumpla las condiciones $\frac{PA}{\alpha}=\frac{PB}{\beta}=\frac{PC}{\gamma}$ basta construir dos de los lugares geométricos definidos por dos de estas igualdades; considerando, por ejemplo, la primera, resulta una circunferencia cuyo diámetro está situado en la recta $AB$ y separa armónicamente al par $AB$. Análogamente considerando la segunda: $\frac{PB}{\beta} = \frac{PC}{\gamma}$ resulta una circunferencia cuyo diámetro está situado en $BC$ y separa al par $BC$. Hay, por tanto, a lo sumo dos puntos $P_1$, $P_2$ intersecciones de ambas circunferencias, que representan dos triángulos semejantes al de lados $\alpha, \beta, \gamma$; si las circunferencias son tangentes, los puntos son coincidentes; si no se cortan, no hay solución.

Veamos en qué condiciones se verifican cada una de estas soluciones. Para ello resolvamos el siguiente problema:

Dadas tres circunferencias concéntricas de radios $\alpha < \beta < \gamma$ construir un triángulo equilátero cuyos vértices estén en ellas (Fig. 3).

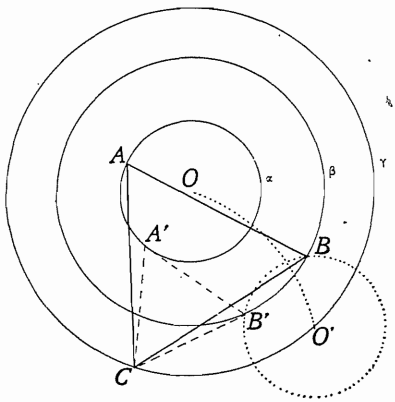


Fig. 3

Elegimos un punto cualquiera en la circunferencia de radio $\gamma$ como vértice $C$; con centro en dicho punto hacemos girar $60^{o}$ la circunferencia de radio $\alpha$ la cual puede cortar a la circunferencia de radio $\beta$ en dos puntos $B$ y $B'$. Construyendo sobre $BC$ (o $B'C$) un triángulo equilátero tenemos el triángulo pedido.

Según sea

$$\beta - \alpha < OO' < \beta + \alpha; \quad OO' = \beta + \alpha; \quad OO' > \beta + \alpha,$$

es decir,

$$\beta - \alpha < \gamma < \beta + \alpha; \quad \gamma = \beta + \alpha; \quad \gamma > \alpha + \beta$$

habrá respectivamente dos soluciones distintas, dos coincidentes o ninguna, por tanto siempre que sea $\beta - \alpha < \gamma \leq \beta + \alpha$ es decir, siempre que los segmentos dados formen triángulo, habrá dos puntos distintos cuyas distancias a los vértices de un triángulo equilátero son proporcionales a $\alpha, \beta, \gamma$; cuando sea $\gamma = \alpha + \beta$ (pudiendo ser o no $\alpha = 0$) es decir, los segmentos dados forman un triángulo degenerado, habrá dos soluciones coincidentes y finalmente cuando sea $\gamma > \alpha + \beta$, o sea, cuando los segmentos no forman triángulo no habrá ninguna solución.

Hemos comprobado que hay dos puntos que representan, triángulos semejantes al de lados $\alpha, \beta, \gamma$, pero, ¿cómo están situados respecto de la circunferencia circunscripta al triángulo equilátero? Consideremos uno de ellos y su inverso respecto de la circunferencia circunscripta; estos dos puntos definen triángulos semejantes, según la conocida propiedad: «Dos puntos inversos respecto de la circunferencia circunscripta al triángulo equilátero definen triángulos semejantes» (1), luego el segundo punto buscado debe coincidir con el inverso del primero.

Por tanto, como todos los puntos interiores a la circunferencia tienen sus inversos fuera de ella, los triángulos que definen los puntos interiores son semejantes a los que definen los exteriores.

En este método de Pompeiu cada triángulo propiamente dicho y todos sus semejantes están representados en el plano por seis puntos y sus seis inversos respecto de la circunferencia

---

(1) Dos puntos inversos respecto de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero definen triángulos semejantes (fig. 4).

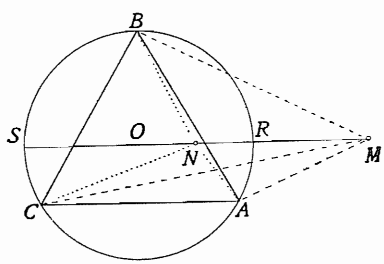


Fig. 4

Los puntos $M$ y $N$ por el teorema de Pompeiu definen triángulos, y también dividen armónicamente al diámetro $ROS$ pues se tiene:

$$OM.\ ON = \overline{OR}^2$$

luego, la circunferencia de centro $O$ es el lugar de los puntos:

$$\frac{AM}{AN} = \frac{MR}{RN} = \frac{BM}{BN} = \frac{CM}{CN} = Cte.$$

por tanto, los triángulos definidos por dos puntos inversos son semejantes.

*Nota*: Si el triángulo $ABC$ no es equilátero pueden los dos inversos no determinar triángulo, pero si uno lo determina, también su inverso, y los triángulos obtenidos son semejantes.

circunscripta al triángulo, número que se reduce a tres si el triángulo dado es isósceles y a uno si es equilátero.

3. — Calculemos ahora la probabilidad de los triángulos acutángulos y obtusángulos en cada uno de los métodos citados.

1°. *Método de Poincaré.* Solamente los puntos interiores al triángulo cuyos vértices son los puntos medios del triángulo equilátero y cuya altura es el perímetro dado, determinan triángulos; los puntos de los lados de dicho triángulo determinan triángulos impropios, pues ellos tienen un lado igual a la suma de los otros dos.

Para encontrar el lugar de los puntos que determinan triángulos rectángulos, acutángulos y obtusángulos, considere-

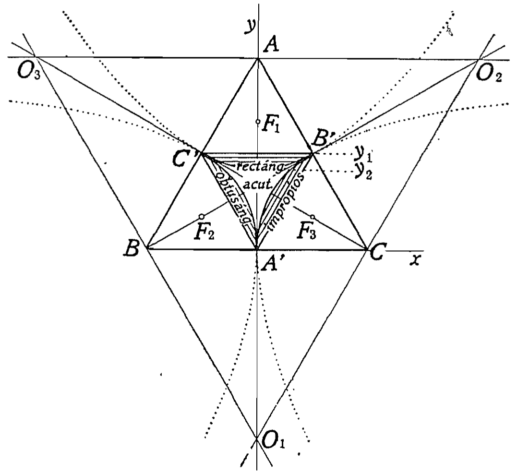


Fig. 5

mos los ejes rectángulares $OA$ y $OC$ y busquemos las distancias de un punto $I(xy)$ a los lados $a, b, c$ (Fig. 5), un cálculo fácil conduce a este resultado: *Los triángulos serán acutángulos, rectángulos u obtusángulos según que se verifique*:

$$\frac{4x^2}{l^2} - \frac{4}{3l^2}y^2 - \frac{4}{l\sqrt{3}}\,y^2 + 1 \gtreqless 0$$

o sea

$$\frac{4x^2}{l^2} - \left(\frac{2y}{l\sqrt{3}} + 1\right)^2 + 2 \gtreqless 0$$

En forma análoga procedemos con los otros dos lados y encontramos que los puntos que determinan triángulos rectángulos se hallan sobre una de las ramas de cada una de las tres hipérbolas cuyos centros están en las alturas correspondientes al lado considerado como eje de las $x$, y que pasan por los vértices del triángulo interior al de altura prefijada; los puntos que determinan triángulos obtusángulos y acutángulos son los interiores y exteriores respectivamente a las hipérbolas anteriores.

El área del recinto cuyos puntos determinan triángulos es:

$$A = \frac{1}{4}\,\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4\sqrt{3}} = 0{,}14434$$

Para hallar el área del recinto cuyos puntos determinan triángulos obtusángulos se calcula una integral doble que se reduce a la integral simple de una expresión irracional cuadrática y resulta finalmente

$$\frac{A_{ob}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{4} - lg\,2\right) = 0{,}03282$$

o sea

$$A_{ob} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{9}{4} - 3\,lg\,2\right) = 0{,}09846$$

Finalmente, el área del recinto cuyos puntos definen triángulos acutángulos la obtenemos por diferencia entre las dos halladas y es:

$$A_{ac} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(3\,lg\,2 - 2) = 0{,}04588$$

Luego, la probabilidad de los triángulos obtusángulos en el triángulo parcial es:

$$P_{ob} = \frac{0{,}09846}{0{,}14434} = 0{,}682$$

la de los acutángulos:

$$P_{ac} = \frac{0{,}04588}{0{,}14434} = 0{,}318$$

Si consideramos el triángulo total tenemos:

$$P_{ob} = \frac{9}{4} - lg\,2 = 0{,}17055$$

$$P_{ac} = 3\,lg\,2 - 2 = 0{,}07945.$$

La probabilidad de formar triángulo con los tres segmentos obtenidos se sabe que es *1/4*, si consideramos el triángulo total, o bien *1* si consideramos el triángulo central *A' B' C'*.

2°. *Método de Study*

a) *Normalización octaédrica* (Fig. 6).

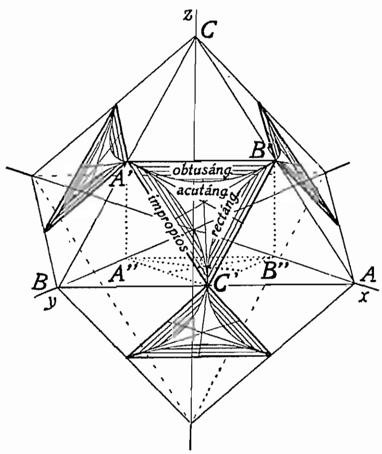


Fig. 6

Con este método, si deseamos triángulos de lados positivos, debemos considerar la cara $a+b+c=1$ del octaedro, y en dicha cara los puntos interiores al triángulo *A' B' C'* cuyos lados son las intersecciones del plano $a+b+c=1$ con los $a+b-c=0$, $a-b+c=0$, $-a+b+c=0$, son los únicos que determinan triángulo; los puntos situados en los lados de dicho triángulo dan triángulos impropios; los triángulos rectángulos están determinados por los puntos situados en las intersecciones del plano $a+b+c=1$ con los conos $c^2=a^2+b^2$, $b^2=a^2+c^2$, $a^2=b^2+c^2$; los puntos comprendidos entre dichas intersecciones y los lados del triángulo $A' B' C'$ dan triángulos obtusángulos y los restantes puntos determinan triángulos acutángulos.

Como el área de la cara $A B C$ del octaedro es:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}86602, \text{ por ser } l = \sqrt{2},$$

y la del triángulo donde se encuentran los puntos que determinan triángulos es un cuarto de la del total, es decir *0,21650*, la probabilidad de que exista triángulo dentro del triángulo $A B C$ es *1/4*, y en el triángulo central es *1*

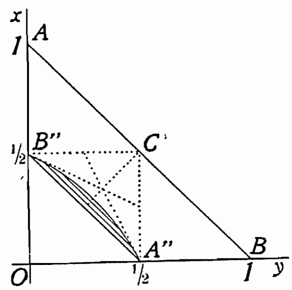


Fig. 7

Calculemos el área de la superficie cuyos puntos determinan triángulos obtusángulos; para ello hallamos el área de la proyección de dicha superficie calculando la integral correspondiente y obtenemos:

$$A_p = 9/8 - 3\, lg\, 2/2 = 0{,}08526,$$

luego el área buscada es:

$$A_{ob} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{9}{4} - 3\, lg\, 2\right] = \frac{0{,}08526}{1/\sqrt{3}} = 0{,}14766:$$

restando *0,14766* de *0,21650*, obtenemos el área del recinto cuyos puntos determinan triángulos acutángulos que es:

$$A_{ac} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,[3\, lg\, 2 - 2] = 0{,}06884,$$

por tanto, la probabilidad de obtener triángulos obtusángulos en el triángulo central es:

$$P_{ob} = \frac{0{,}14766}{0{,}21650} = 0{,}682,$$

y la de los acutángulos es:

$$P_{ac} = \frac{0{,}06884}{0{,}21650} = 0{,}318;$$

si consideramos el triángulo total resulta:

$$P_{ob} = 9/4 - 3\,lg\,2 = 0{,}17055$$

$$P_{ac} = 3\,lg\,2 - 2 = 0{,}07945$$

b) *Normalización esférica* (Fig. 8).

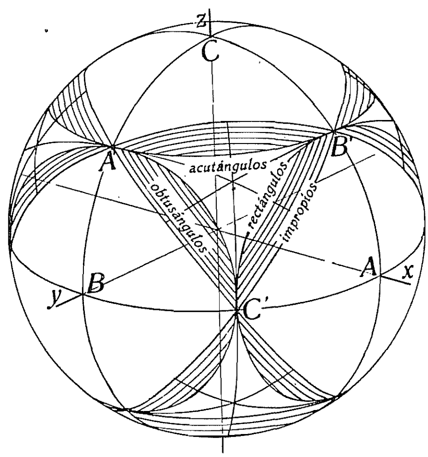


Fig. 8

Consideremos el octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ donde se encuentran los puntos que determinan triángulos de lados positivos; de todos los puntos del octante sólo los interiores al triángulo esférico $A'\,B'\,C'$ cuyos lados son las intersecciones de la esfera con los planos $a + b - c = 0$, $a - b + c = 0$, $-a + b + c = 0$, determinan triángulos; los situados sobre los lados de dicho triángulo dan triángulos límites; los que determinan triángulos rectángulos están situados en las intersecciones de la esfera $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ con los conos $c^2 = a^2 + b^2$, $b^2 = a^2 + c^2$, $a^2 = b^2 + c^2$; los triángulos obtusángulos están determinados por los puntos comprendidos entre dichas intersecciones y los arcos de círculo máximo cuyos puntos dan los triángulos límites, y los restantes definen los triángulos acutángulos.

El área del octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es:

$$A = \frac{\pi}{2} = 1{,}57079$$

Hallemos el área del triángulo esférico $A'\,B'\,C'$ cuyos puntos determinan triángulos; para ello calculemos el área de los tres triángulos esféricos restantes cuyos puntos no dan triángulos y tenemos:

$$\cos\ c' = \cos a/2 \,.\, \cos b/2 = \cos 45^{\circ} \,.\, \cos 45^{\circ} = 1/2$$

$$\cos A' = tg\, b/2 \,.\, \cot c' = 0{,}57735$$

$$A' = B' = 54^{\circ}\, 43'\, 56''$$

$$E = C' + A' + B' - 180^{\circ} = (90^{\circ} + 2.54^{\circ}\, 43'\, 56'' - 180^{\circ}) =$$

$$= 19^{\circ}\ 27'\, 52'' = 70072''$$

$$S = E_r = 0{,}33972,$$

luego el área de los tres triángulos es *1,01916*, y la de la superficie buscada es:

$$1{,}57079 - 1{,}01916 = 0{,}55163.$$

Por tanto la probabilidad de que exista triángulo dentro del triángulo $A'\,B'\,C'$ es *1* y si consideramos el triángulo total resulta:

$$P_t = \frac{0{,}55163}{1{,}57079} = 0{,}351.$$

El área de la superficie cuyos puntos determinan triángulos acutángulos la obtenemos calculando el área de los tres cuartos de casquete de altura $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ que es $\frac{3}{4}\left[2\pi\frac{(2-\sqrt{2})}{2}\right]=$ $\frac{3\pi}{4}(2-\sqrt{2})=0{,}46008$ y restándola del área del octante:

$$A_{ac}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}(2-\sqrt{2})=\frac{\pi}{4}(2\sqrt{2}-4)=0{,}19054.$$

Si al área de los tres cuartos de casquete le restamos la de los tres triángulos cuyos puntos no dan triángulos, obtenemos el área del recinto donde se encuentran los puntos que determinan triángulos obtusángulos que es:

$$A_{ob}=1{,}38025-1{,}01916=0{,}36109,$$

luego, la probabilidad de obtener triángulo acutángulo en el triángulo $A'B'C'$ es:

$$P_{ac}=\frac{0{,}36109}{0{,}55163}=0{,}345$$

y la de obtener triángulo obtusángulo es:

$$P_{ob}=\frac{0{,}36109}{0{,}55163}=0{,}654,$$

pero si consideramos el octante $ABC$ resulta:

$$P_{ac}=0{,}121$$

$$P_{ob}=0{,}230$$

3º. *Método basado en el teorema de Pompeiu.* A cualquier punto del plano corresponde siempre un triángulo; veamos ahora qué clases de triángulos se obtienen con los distintos puntos del plano.

Los puntos de la circunferencia circunscripta dan triángulos límites, es decir, que tienen un lado igual a la suma de los otros dos como lo demuestra M. N. Obrechkoff en el «Bulletin de Mat. et de Ph. pures et appl.» Bucarest (1935-36 p. 4).

Busquemos el lugar de los puntos que determinan triángulos rectángulos, acutángulos y obtusángulos.

Si consideramos los ejes rectangulares $O_1 B$ y $O_1 A$, las coordenadas de los vértices son: $A(l/2,0)$, $B(0, l\sqrt{3}/2)$, $C(-l/2,0)$.

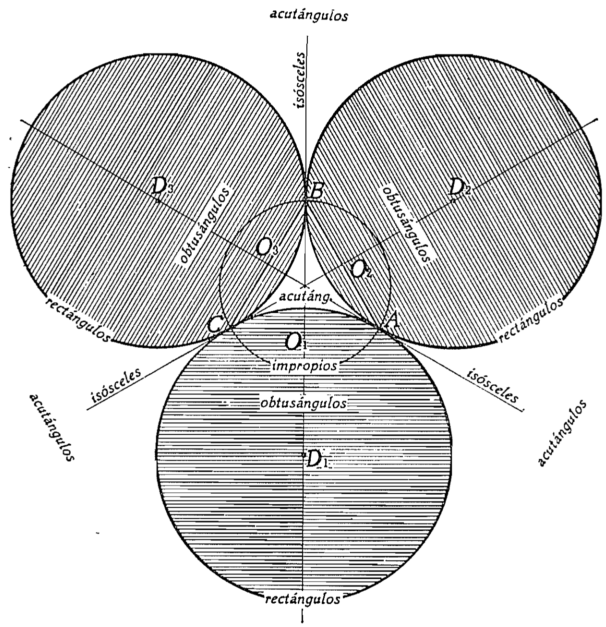


Fig. 9

Según sean los triángulos acutángulos, rectángulos u obtusángulos, debe verificarse que:

$$\overline{IA}^2 + \overline{IC}^2 \gtreqless \overline{IB}^2$$

$$(x - l/2)^2 + y^2 + (x + l/2)^2 + y^2 \gtreqless x^2 + \left(y - \frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$x^2 + \left(y + \frac{l\sqrt{3}}{2}\right) - l^2 \gtreqless 0.$$

Análogamente con los otros dos lados. Encontramos así que los puntos que determinan triángulos rectángulos se hallan sobre las circunferencias de radio $l$ con centro sobre las mediatrices de cada lado y que pasan por los vértices respectivos; los puntos que determinan triángulos obtusángulos y acutángulos son los interiores y exteriores respectivamente a las circunferencias anteriores.

Como con este método a cualquier punto del plano corresponde siempre un triángulo, resulta que si consideramos los puntos del círculo de área $\pi(l/3 \,.\, \sqrt{3})^2 = \frac{\pi}{3} l^2 = l^2 \,.\, 1{,}0472$, la probabilidad de obtener triángulo es: *1*.

El área del recinto a cuyos puntos corresponden triángulos obtusángulos, la obtenemos calculando el área de los tres segmentos circulares de amplitud $60^\circ$ y radio $l$, y la de los tres segmentos de amplitud $120^\circ$ y radio $\frac{l}{3}\sqrt{3}$; luego, el área buscada es:

$$A_{ob} = \frac{l^2}{12}(10\pi - 12\sqrt{3}) = l^2 \,.\, 0{,}8859.$$

La diferencia entre el área del círculo de radio $\frac{l}{3}\sqrt{3}$ y la recién calculada, nos da el área del recinto cuyos puntos representan triángulos acutángulos, y es:

$$A_{ac} = \frac{l^2\pi}{3} - \frac{l^2}{6}(5\pi - 6\sqrt{3}) = \frac{l^2}{6}(6\sqrt{3} - 3\pi) = l^2 \,.\, 0{,}1613$$

Por tanto, la probabilidad de los triángulos obtusángulos es:

$$P_{ob} = \frac{0{,}8859}{1{,}0472} = 0{,}846$$

y la de los acutángulos:

$$P_{ac} = \frac{0{,}1613}{1{,}0472} = 0{,}154$$

Si en vez de considerar los puntos interiores a la circunferencia circunscripta, consideramos los exteriores que determinan triángulos semejantes a los ya considerados, las probabilidades resultan:

$$P_t = 1$$

$$P_{ac} = 1$$

$$P_{ob} = 0$$

Las probabilidades obtenidas con los diversos métodos son:

1°. Poincaré

| $\Delta\ A'B'C'$ | $\Delta\ ABC$ |
|---|---|
| $P_t = 1$ | $P_t = 0{,}250$ |
| $P_{ac} = 0{,}318$ | $P_{ac} = 0{,}079$ |
| $P_{ob} = 0{,}682$ | $P_{ob} = 0{,}171$ |

2°. Study

a) Normalización octaédrica

| | |
|---|---|
| $P_t = 1$ | $P_t = 0{,}250$ |
| $P_{ac} = 0{,}318$ | $P_{ac} = 0{,}079$ |
| $P_{ob} = 0{,}682$ | $P_{ob} = 0{,}171$ |

b) Normalización esférica

| | |
|---|---|
| $P_t = 1$ | $P_t = 0{,}351$ |
| $P_{ac} = 0{,}345$ | $P_{ac} = 0{,}121$ |
| $P_{ob} = 0{,}655$ | $P_{ob} = 0{,}230$ |

3°. Pompeiu

| P. int. circunf. | P. ext. circunf. |
|---|---|
| $P_t = 1$ | $P_t = 1$ |
| $P_{ac} = 0{,}154$ | $P_{ac} = 1$ |
| $P_{ob} = 0{,}846$ | $P_{ob} = 0$ |

La coincidencia de los resultados obtenidos al calcular la probabilidad de los triángulos acutángulos y obtusángulos con el método de Poincaré y con el de Study cuando se normaliza con la condición $x + y + z = 1$, se debe a que ambos métodos son equivalentes, pues si bien en el primero se forman los triángulos con las distancias de un punto interior al triángulo equilátero a los lados del mismo, y en el segundo con las coordenadas de un punto del plano $x + y + z = 1$, dichos segmentos son respectivamente proporcionales, luego las áreas de los triángulos obtenidos deben ser también proporcionales y por tanto las probabilidades son iguales.

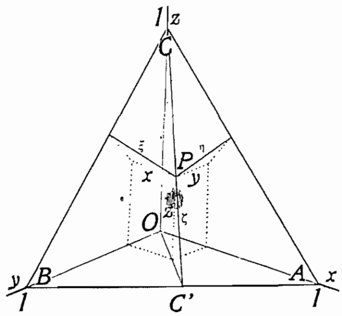


Fig. 10

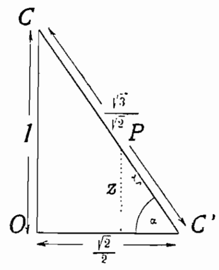


Fig. 11

En efecto, si consideramos como triángulo de Poincaré la cara $x + y + z = 1$ del octaedro y llamamos $\xi$, $\eta$, $\zeta$, las distancias de $P$ a los lados, y $x$, $y$, $z$, las coordenadas del mismo punto, de la semejanza de los tres triángulos rectángulos se deduce:

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{z}{\zeta} = sen\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

por tanto, los segmentos son respectivamente proporcionales.