SOBRE LA PARADOJA DE BERTRAND

por ESTHER FERRARI

Muy conocido es el siguiente problema de Bertrand:

«On trace au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit?».

Teniendo en cuenta que si un triángulo equilátero está inscripto en una circunferencia de radio R, la distancia de sus lados al centro es $R/2$; el problema se puede enunciar así:

Dados dos círculos concéntricos de radios R y $R/2$, si se traza al azar una cuerda en el círculo de radio R ¿cuál es la probabilidad de que la cuerda corte también al otro círculo?

Bertrand dá tres soluciones de este problema, que conducen a tres resultados diferentes, expuestos en casi todos los tratados de probabilidades. La cuestión parecía agotada, pero no hace mucho apareció en la revista de la Academia de Ciencias de Estocolmo una memoria de prestigioso autor (1), cuyas conclusiones son muy discutibles. La crítica de este trabajo y el claro planteamiento del problema constituyen el objeto de este trabajo de seminario, realizado como alumna del Instituto Matemático de la Universidad de Buenos Aires.

Como Bertrand utiliza ciertos principios de simetría que ocultan el concepto, vamos a puntualizar la esencia de su razonamiento, poniendo de manifiesto el significado de probabilidad que es el de *medida* de un conjunto parcial de elementos, respecto de un conjunto total. La medida es, como se sabe, una función aditiva de conjunto, no siendo necesario en este problema postular la aditividad infinita. Según sea el sistema de coordenadas adoptado será distinta la expresión de la medida, la cual tiene, como se sabe (2), la forma

$$\int_A f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

donde $f(\xi, \eta)$ es una función positiva arbitraria.

(1) HENRIK PETRINI, Le paradoxe de Bertrand. Arkiv for matematik, astronomi och fysik. Band 25 A. N° 16. 1936.

(2) H. POINCARÉ. Calcul des probabilités, 2ª edición, pág. 120.

Refiriéndose a la indeterminación originada por esta función arbitraria dice Deltheil: «Para una clase extensa de problemas esta indeterminación desaparece imponiendo la condición siguiente: el resultado del cálculo debe ser invariante para un desplazamiento de conjunto de la figura. Este punto de vista liga las probabilidades geométricas a la *teoría de la medida* de los conjuntos.

Consideremos el círculo de radio $R = 1$ y la cuerda AB:

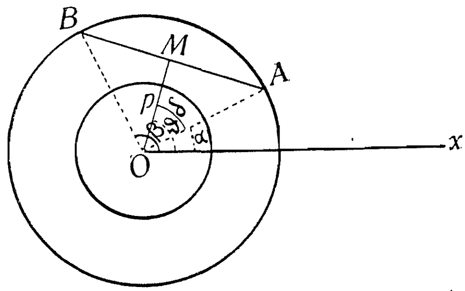

Fig. 1

1.ª Solución: Dice Bertrand [3]:

''Si l'une des extrémités de la corde est connue, ce renseignement ne change pas la probabilité; la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandée.

L'une des extremités de la corde étant connue, la direction doit être réglée par le hasard. Si l'on trace les deux côtés du triangle équilatéral ayant pour sommet le point donné, ils forment entre eux et avec la tangente trois angles de 60º.

La corde pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, doit se trouver dans celui des trois angles qui est compris entre les deux autres. La probabilité pour que le hasard entre trois angles égaux qui peuvent le recevoir le dirige dans celui-là semble par définition égale 1/3''.

Este razonamiento de Bertrand equivale a esto:

Como coordenadas de la cuerda se toman los ángulos polares α y β; y se toma como probabilidad elemental $d\alpha \, . \, d\beta$. El párrafo transcrito, traducido en el lenguaje del cálculo integral, equivale a esto: El punto A puede encontrarse en cualquier punto de la circunferencia. Luego α puede tomar todos los valores comprendidos entre 0 y 2π.

Fijo A, si AB es el lado del triángulo equilátero inscripto $\beta = \alpha + 120^{\circ}$.

---

(3) J. Bertrand. *Calcul des Probabilités.* Paris, 1889; pág. 4.

La probabilidad P de las cuerdas mayores que el lado del triángulo equilátero inscripto, es por consiguiente:

$$P = \frac{\int_0^{2\pi} d\alpha \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} d\beta}{\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta} = \frac{1}{3}$$

2.ª Solución. — Dice Bertrand:

"Si l'on connaît la direction de la corde, ce renseignement ne change pas la probabilité; la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence favorable ou défavorable a l'arrivée de l'événement demandé.

La direction de la corde étant donnée, elle doit, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, couper l'un ou l'autre des rayons qui composent le diamètre perpendiculaire, dans la moitié la plus voisine du centre. La probabilité pour qu'il en soit ainsi semble, par définition égale à ½".

Este breve razonamiento equivale a esto:

Como coordenadas de la cuerda tomamos las de la recta, o sea la distancia $p\ (0 \leq p \leq 1)$ y el ángulo $\Theta\ (0 \leq \Theta \leq 2\pi)$, y como probabilidad elemental se adopta $dp\, d\Theta$.

Si $\overline{OM}$ está comprendido entre 0 y 1/2, la cuerda es mayor que el lado del triángulo equilátero inscripto, luego

$$P = \frac{\int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^{1/2} dp}{\int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^{1} dp} = \frac{1}{2}$$

Hemos procurado interpretar rigurosamente los dos razonamientos de Bertrand, dando expresión analítica a la idea intuitiva encerrada en la frase repetida en ambos: «la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé». Esta frase tiene el siguiente significado analítico: la simetría del círculo reduce el cálculo de la probabilidad de un conjunto definido por dos variables a la de un conjunto definido por una sola variable. El significado estricto de tal razonamiento para todos los casos análogos es éste: *Si al fijar una variable resulta constante la medida del conjunto simplemente infinito así definido, la probabilidad buscada es la misma de este conjunto.* En efecto, la segunda integración equivale en tal caso a multiplicar numerador y denominador por un mismo factor constante y esto no modifica el cociente. En las dos soluciones de Bertrand es aplicable este criterio, pues la primera integral resulta constante en ambos casos y la segunda integración alrededor de la circunferencia equivale, por tanto, a multiplicar numerador y denominador por el factor 2π.

3.ª Solución. — El razonamiento de Bertrand es éste:

''Choisir une corde au hasard, c'est en choisir au hasard le point milieu. Pour que la corde soit plus grande que le côté du triagle équilatéral, il faut et il suffit que le point milieu soit à une distance du centre plus petite que la moitié du rayon, c'est à diré â l'intérieur d' un cercle quatre fois plus petit en surface. Le nombre des points situés dans l'intérieur d'une surface quatre fois moindre est quatre fois moindre. La probabilité pour que la corde dont le milieu est choisi au hasard soit plus grande que le côté du triangle équilatéral semble par définition égale à ¼''.

Traducido en coordenadas equivale a esto: adoptamos como coordenadas, las de su punto medio: radio p y ángulo Θ. Con estas coordenadas adoptamos como medida de un conjunto de cuerdas cuyos puntos medios forman un recinto al área de éste. Por consiguiente la probabilidad elemental es el elemento de área: $p\,d\,p\,d\,\Theta$ y la probabilidad pedida es ésta:

$$P = \frac{\int_0^{1/2} p\,d\,p \int_0^{2\pi} d\,\Theta}{\int_0^{1} p\,d\,p \int_0^{2\pi} d\,\Theta} = \frac{1}{4}$$

Deltheil, en su libro sobre probabilidades geométricas, dice: «Si se pregunta cuál de las tres soluciones de Bertrand es la buena, la respuesta es que las tres son lógicas, pero que en realidad se refieren a tres problemas diferentes, o más exactamente a tres mecanismos diferentes de intervención del azar».

En el primer caso, el azar interviene en la dirección de la cuerda, en el segundo caso en la distancia de la cuerda al centro de la circunferencia y en el tercero en la posición del punto medio.

Justo es reconocer que el propio Bertrand se coloca en un punto de vista análogo cuando dice:

«Entre ces trois réponses; quelle est la véritable?

Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée».

Hemos llegado a las tres soluciones de Bertrand considerando casos particulares de las probabilidades elementales correspondientes. Ya hemos visto que en la expresión general de la probabilidad elemental aparece una función positiva arbitraria de las variables que se adoptan, la cual se determina mediante el grupo de transformaciones que se adopte como básico.

Es así que en el problema de Bertrand, el resultado $P = 1/2$ de la segunda solución se impone (como dice Deltheil) desde el punto de vista de la *medida de las rectas,* y la solución $P = 1/4$ está impuesta por el grupo de los movimientos de los puntos del plano, al sustituir cada cuerda por su punto medio.

En efecto, se ha llegado analíticamente a la 2.ª solución tomando como coordenadas de las cuerdas, las de sus rectas básicas que son invariantes respecto de los movimientos de dichas rectas (4); y a la tercera solución se ha llegado tomando las coordenadas de los puntos medios.

Ahora bien; siendo la cuerda un elemento geométrico distinto de la recta básica, se ve claramente por qué la segunda solución de Bertrand que Deltheil justifica desde el punto de vista de la recta, no debe considerarse como solución estricta del problema de Bertrand, tal como éste lo enunció. Note el lector que Bertrand habla de conjuntos de *cuerdas* y no de *rectas*. Dicha solución corresponde en realidad al siguiente problema: Dados dos círculos concéntricos de radios R y R/2, si se traza al azar una recta, entre todas las que cortan al círculo de radio R ¿cuál es la probabilidad del conjunto de rectas que también cortan al 2.º círculo?

Es muy cierto que cada cuerda está determinada por su recta base, de igual modo que está determinada por su punto medio y también puede determinarse de infinitos otros modos, pero el con-

(4) R. Deltheil, Probabilités géometriques, 1926, pág. 14.

cepto geométrico de medida, o sea de probabilidad, es independiente del concepto aritmético de correspondencia biunívoca.

En efecto, si se adopta el punto medio de cada cuerda como representante de ésta, figuras iguales consideradas como conjuntos de puntos no corresponden a conjuntos iguales de cuerdas, ni a conjuntos iguales de rectas. Así por ejemplo, los conjuntos de rectas que cortan a uno u otro de dos segmentos iguales son congruentes y por tanto tienen probabilidades iguales respecto del grupo de los movimientos del plano. En cambio, los puntos medios de las cuerdas que determinan esas rectas forman conjuntos de área distinta. En la figura se han dibujado las superficies cubiertas por tales conjuntos de puntos medios de las cuerdas que cortan a los segmentos iguales OA y AB; y las áreas de esos recintos no son iguales, sino que una es triple de la otra, a pesar de que los correspondientes conjuntos de rectas son iguales.

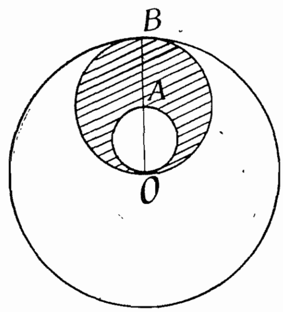

Fig. 2

Esto bastaría si no existiesen otras razones, para afirmar que la única solución aceptada por H. Petrini, que es la tercera de Bertrand, no es legítima.

Es preciso, pues, adoptar coordenadas especiales que no sean de punto ni de recta, sino de la cuerda. Sobre esto y el análisis de la memoria citada, versará nuestra nota próxima.

Instituto de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires.