ENIGMAS DE LA MATEMATICA

I. - El problema de los cuatro colores

La mayoría de los problemas matemáticos que se caracterizan por el contraste entre su aparente simplicidad y la extraordinaria dificultad de su demostración, pertenecen a la teoría de los números. Pero hay uno, tal vez el más simple de ellos, que forma excepción y consiste en un problema geométrico. Es el llamado «*Problema de los cuatro colores*», de enunciado comprensible aun por quienes menos conocimientos poseen de matemáticas, y cuya demostración, sin embargo, no se ha logrado todavía. Nos proponemos dar alguna noticia sobre esta célebre cuestión.

Al parecer fué enunciada en 1850 por De Morgan, pero no fué muy conocida hasta 1878, en que Cayley la presentó a la «London Mathematical Society». Consiste en demostrar: «Cualquier mapa plano compuesto de un número finito de regiones de forma cualquiera se puede siempre colorear con sólo 4 colores distintos de tal manera que no haya dos regiones con frontera común que tengan el mismo color».

Se ha demostrado con relativa simplicidad que bastan 5 colores, pero no se ha logrado rebajar este número a 4 (Véase la bibliografía en «Ph. Franklin, *Scripta Mathematica,* Vol. VI, n°. 3-4, 1939).

Con el gran número de tentativas de demostración se han ido obteniendo varios resultados parciales. Por ejemplo:

1.° Si en cada vértice del mapa concurren un número par de regiones, el mapa se puede colorear con sólo 2 colores.

2.° Si cada región es fronteriza con un número par de las demás, bastan 3 colores para colorear todo el mapa.

3.° Un mapa que contiene a lo sumo una sola región con más de 6 lados, se puede colorear con 4 colores.

Franklin, en el trabajo citado, demuestra también que el problema se puede reducir a estudiar la posibilidad de colorear las aristas (líneas de separación de dos regiones contiguas) de manera que no concurran 2 del mismo color en un mismo vértice; vale entonces: «el problema de los 4 colores equivale al de colorear las aristas con sólo 3 colores».

En vista de la resistencia del problema a su demostración total se ha empezado el camino de demostración por aproximaciones sucesivas. Así en 1922 Franklin demostró que todo mapa con un número de regiones igual o menor que 25 se podía colorear con 4 colores. Reynolds en 1927 aumentó este número a 27 y muy recientemente, en 1940, Winn lo ha extendido a 35. Es decir, actualmente el problema de los 4 colores está demostrado para mapas que posean hasta 35 regiones. La posibilidad de dar un contraejemplo que demuestre que el problema no es cierto aparece de esta manera muy poco probable, dada la complejidad de los mapas con tal número de regiones.

También se ha extendido el problema a mapas situados sobre superficies distintas de la esfera o el plano, por ejemplo el toro o en general a la superficie formada por una esfera más p asas. Es sabido que una superficie cerrada que se pueda considerar deformación continua de una esfera con p asas se llama de género p. Si sobre ella se considera un mapa que la cubre completamente y consta de R regiones, A aristas y V vértices, vale la relación de EULER: $V - A + R = 2(1 - p)$. Por ejemplo para la esfera $(p = 0)$ se tiene el teorema de EULER de la geometría elemental. El hecho notable es que para muchas de estas superficies, para $p = 1, 2, 3, 4$, el teorema correspondiente al de los 4 colores se ha demostrado completamente. Así, llamando C_p (*número cromático*) al mínimo número de colores que bastan para colorear cualquier mapa de una superficie cerrada de género p, se ha demostrado que es

$$C_1 = 7, \; C_2 = 8, \; C_3 = 9, \; C_4 = 10$$

Por ejemplo, para el toro $(p = 1)$ bastan 7 colores para colorear cualquier mapa y existen mapas en que este número de colores son necesarios. Queda por demostrar que el número cromático C_0 para las superficies de género 0 es 4.

Las superficies anteriores son «orientables» o «biláteras», es decir, superficies en las que se puede considerar un lado interno y otro externo que no pueden unirse entre sí por una curva que no atraviese a la superficie. Pero también para las superficies «no-orientables» o «uniláteras» más simples se ha resuelto el problema. Estas superficies se obtienen a partir de la «banda de MOEBIUS», que se obtiene, como es sabido, uniendo en sentido inverso dos bordes opuestos de un rectángulo. Si a una esfera se le hacen k agujeros y sus bordes se unen con los de k bandas de MOEBIUS, se obtiene una superficie unilátera cerrada que se dice de género k. Así, imaginando dos bandas de MOEBIUS unidas por sus bordes se tiene la llamada «caperuza» de KLEIN, de género 2. Para estas superficies, que naturalmente no pueden realizarse en el espacio ordinario de 3 dimensiones sin que se atraviesen a sí mismas, se han obtenido los siguientes números cromáticos:

$$C'_1 = C'_2 = 6, \; C'_3 = 7, \; C'_4 = 8, \; C'_6 = 9.$$

Es, pues, una particularidad notable del problema que nos ocupa que se haya resuelto en casos aparentemente más complicados y que sin embargo se ha resistido hasta la fecha la demostración para el caso más simple de la esfera o del plano.

L. A. S.