SOBRE LA PROLONGACION ANALITICA DE LAS SERIES DE DIRICHLET DE DENSIDAD MAXIMA INFINITA

por Sixto Ríos

En las series de Dirichlet de densidad máxima finita es posible determinar una sucesión parcial hiperconvergente en todo el semiplano de holomorfía, según un teorema fundamental de V. Bernstein (1). Este teorema no se generaliza a las series de Dirichlet de densidad máxima infinita, lo que he demostrado yo con el ejemplo de la serie (2)

$$[1] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-sln}$$

que tiene abscisa de convergencia cero y define una función entera; pero no posee ninguna sucesión parcial hiperconvergente más allá del semiplano de convergencia.

Sobre este ejemplo vamos a indicar una generalización del método de hiperconvergencia, que consiste en la descomposición de los términos de la serie en sumandos y reagrupación conveniente de éstos. Tal método que llamaremos de *recomposición* (3) puede dar la prolongación analítica en casos en que falla el método de hiperconvergencia (es decir agrupación directa de términos de la serie dada).

Vamos a demostrar que tal ocurre en el ejemplo de la serie [1].

---

(1) Leçons sur les progrès récents de la théorie des series de Dirichlet (París, 1933, Col. Borel), pág. 141.

(2) Los resultados se encuentran indicados en mi nota "Hiperconvergencia de las series de Dirichlet......." (Rev. de la Un. Mat. Arg. Vol. I, pág. 71) y las demostraciones en mi memoria "Sobre el problema de la hiperconvergencia de las series de Dirichlet, cuyas sucesiones de exponentes poseen densidad máxima infinita" (Rev. de la R. Ac. de Ciencias de Madrid, t. 1940).

(3) En mi nota titulada "Prolungazione analitica per riordinazione" (en curso de publicación en los Rendiconti de la Acc. de Italia) he señalado otro método de prolongación analítica de series de Dirichlet, método de *reordenación,* consistente en la alteración del orden de los términos de la serie.

El término n-ésimo de la serie [1] puede obtenerse agrupando los términos de lugares $2n-2$, $2n-1$ de la serie (4):

$$1 . e^{-(s+1) l1} - 1 . e^{-(s+1) l2} - 1 . e^{-(s+1) l2} + 1 . e^{-(s+1) l3}$$
$$+ 2 e^{-(s+1) l3} - 2 e^{-(s+1) l4} - 2 e^{-(s+1) l4} + 2 e^{-(s+1) l5} + \dots$$

El campo de convergencia de esta serie es el mismo semiplano $R(s) > 0$ de la [1], puesto que el término general tiende a cero.

Ahora bien, si en esta serie agrupamos los términos de cuatro en cuatro consecutivos, obtenemos una serie de polinomios exponenciales, cuyo término general es:

$$P_n(S) = \frac{n+2}{2} \left[e^{-(s+1)\, l\,(n+1)} - e^{-(s+1)\, l\,(n+2)} \right] -$$
$$- \frac{n+2}{2} \left[e^{-(s+1)\, l\,(n+2)} - e^{-(s+1)\, l\,(n+3)} \right]$$

Serie que, según vamos a demostrar, efectúa la prolongación analítica de la dada [1] en la banda $-1 < R(s) < 0$, que no se lograba, según vimos, mediante la aplicación directa del método de hiperconvergencia.

Demostremos, en efecto, que la serie, cuyo término general es $P_n(s)$, converge uniformemente en el interior del semiplano $R(s) > -1$.

Teniendo en cuenta que el primer paréntesis recto es la diferencia de valores de la función $e^{-(s+1)\, l\, \alpha}$ en los puntos $\alpha = n + 2$, $\alpha = n + 1$, se puede aplicar el teorema del valor medio (suponiendo $s + 1$ positivo) y lo mismo al segundo paréntesis recto, con lo que resulta:

$$P_n(s) = \frac{n+2}{2} \left[(s+1)\, e^{-(s+2)\, l\,(n+1+\delta)} \right.$$
$$\left. - (s+1)\, e^{-(s+2)\, l\,(n+1+\delta')} \right]$$

donde δ y δ' son números positivos, comprendidos entre 0 y 1.

(4) Esta es una serie de Dirichlet generalizada: los exponentes no forman una sucesión estrictamente monótona. Las propiedades de estas series están estudiadas en mi nota precitada.

Una nueva aplicación del teorema citado da la acotación:

$$|P_n(s)| < \frac{n+2}{2} |s+1| \cdot |s+2| \cdot e^{-(s+3)\, l\,(n+1)}$$

lo que demuestra la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(s)$ en el interior del semiplano $R(s) > -1$, que es lo que queríamos demostrar.

Un estudio detenido de este método de prolongación analítica, indicado sobre el ejemplo precedente, será objeto de otro trabajo.

TEMAS PROPUESTOS

24. — Demostrar que la curva representada por la función real creciente definida por la serie:

$$x + \sum_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2^{4n} \pi x}{2^{5n}}$$

tiene en cada intervalo infinitos puntos con tangentes paralelas e infinitos puntos de inflexión.

R. P.

25. — Sumar la serie

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!\,(n+1)}$$

R. P.

26. — Dividido un segmento al azar en seis partes, calcular la probabilidad de que con estos segmentos se pueda construir un tetraedro.

Generalización al espacio de n dimensiones.

R.