SOBRE LOS DESARROLLOS FUNCIONALES DE LA FORMA

$$f(x) = \Sigma \frac{c_n x}{x^2 + n^2} \tag{1}$$

por CECILIA MOSSIN KOTTIN

Tema 3º (T. VII, Núm. 1)

Como en todos los desarrollos en serie funcional, cabe abordar dos problemas de dificultad muy diversa: si se supone $f(x)$ expresable en serie de este tipo y se desea calcular los coeficientes c_n esto puede hacerse muy sencillamente por diversos pasos al límite; pero si se da una función analítica cualquiera $f(x)$, no es tan sencillo dar condiciones suficientes para que admita desarrollo de la forma (1) y calcular los coeficientes c_n. En el curso de seminario de la Universidad de Buenos Aires hemos resuelto este problema (que comprende al primero) mediante la transformación de Laplace, como exponemos a continuación.

Supongamos primeramente que la función $f(x)$ sea dada como función transformada de Laplace de la serie convergente $\varphi(t) = \Sigma\, a_m L_m(t)$, donde $L_m(t)$ son los polinomios de Laguerre, cuya expresión es:

$$L_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{m}{k} t^k$$

Es sabido què para cada polinomio $L_m(t)$, su transformada $\psi(x)$ de Laplace está dada por la expresión:

$$\psi(x) = \int_0^\infty L_m(t)\, e^{-tx}\, dt = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^m$$

Pero: ¿será legítimo considerar la función $f(x)$ como serie de las transformadas de los términos de aquella serie? Veamos si la integral

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m L_m(t)\right] dt \tag{2}$$

será igual a la serie de integrales, o lo que es lo mismo, si será válido escribir:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^m \tag{3}$$

Para ello será suficiente que la integral del resto de la serie tienda a 0 para $m \to \infty$

Teniendo presenta la limitación de Szegö para los polinomios de Laguerre: $|L_m(t)| < e^{\frac{t}{2}}$ y verificándose la relación

$$|a_m L_m + a_{m+1} L_{m+1} + \dots| < e^{\frac{t}{2}} [|a_m| + |a_{m+1}| + \dots]$$

si la serie: $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ es absolutamente convergente, se obtiene:

$$|a_m L_m + a_{m+1} L_{m+1} + \dots| < e^{\frac{t}{2}} \varepsilon$$

desde un m en adelante $(m \geqq \mu)$.

Por lo tanto, la integral del resto es menor que

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} e^{\frac{t}{2}} \varepsilon \, dt = \varepsilon \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$$

acotación válida para todo punto real $x > 1/2$ y en el campo complejo, para el semiplano $\mathcal{R}(x) > 1/2$.

Es decir, son equivalentes los desarrollos (2) y (3), siempre que se imponga la condición de la convergencia absoluta de la serie $\sum a_m$, que se expresa fácilmente mediante las derivadas de

$$F(x) = x f(x) = \sum a_m \left(1 - \frac{1}{x}\right)^m .$$

Dada la función analítica $f(x)$ impondremos esta condición previa; pero la transformación $u = l/x$ convierte la serie (3) en la serie $\sum a_m (l - u)^m$, la cual, en virtud de tal hipótesis, converge en el círculo de centro l y radio l; luego la serie (3) converge por lo menos en el semiplano $\mathcal{R}(x) > 1/2$.

Recíprocamente: dada una función $f(x)$ holomorfa en este semiplano, incluso el contorno con el punto ∞, su transformada en u admite en el punto 1 desarrollo absolutamente convergente en el punto $u = o$ y por tanto converge absolutamente la serie Σa_m, quedando expresada $f(x)$ como función determinante, esto es, transformada (L) de la función

$$\varphi(t) = \sum_{o}^{\infty} a_m L_m(t) \tag{4}$$

Si desarrollamos esta función en serie de cosenos en el intervalo $(0, \pi)$

$$\varphi(t) = \sum_{o}^{\infty} c_n . \cos nt \tag{5}$$

y suponemos para mayor sencillez absolutamente convergente la serie de coeficientes, su transformada (L) será una serie (1) con estos mismos coeficientes. El primero de los problemas propuestos se reduce, pues, al cálculo de los coeficientes de Fourier:

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{o}^{\pi} \varphi(t) \cos nt . dt$$

y teniendo en cuenta la identidad entre (4) y (5) resulta la expresión buscada:

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{o}^{\pi} \left\{ \sum_{m=o}^{\infty} a_m \left[\sum_{k=o}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{m}{k} t^k \right] \right\} \cos nt \, dt$$

La integral de la serie es la serie de las integrales, por ser el intervalo finito y la serie uniformemente convergente, pues tiene sus términos menores que los de la serie numérica $e^{\frac{t}{2}} \Sigma |a_m|$, convergente. Luego

$$c_n = \frac{2}{\pi} \sum_{o}^{\infty} a_m \left[\sum_{k=o}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{m}{k} \int_{o}^{\pi} t^k \cos nt \, dt \right]$$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \sum_{m=o}^{\infty} a_m \sum_{k=o}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{m}{k} I_n^k \tag*{[6]}$$

Efectuamos el cálculo de I_n considerando, por ejemplo, el caso *n* impar:

$$I_n^k = \int_0^\pi \cos nt \,.\, t^k \,.\, dt = \frac{\operatorname{sen} nt}{n}\, t^k \Big|_0^\pi - \frac{k}{n} \int_0^\pi \operatorname{sen} nt \,.\, t^{k-1} \,.\, dt$$

$$J_n^{k-1} = \int_0^\pi \operatorname{sen} nt \,.\, t^{k-1} \,.\, dt = -\frac{\cos nt}{n}\, t^{k-1} \Big|_0^\pi + \frac{k-1}{n} \int_0^\pi \cos nt \,.\, t^{k-2} \,.\, dt$$

$$I_n^k = -\frac{k}{n} J_n^{k-1} \qquad\qquad J_n^{k-1} = \frac{\pi^{k-1}}{n} + \frac{k-1}{n} I_n^{k-2}$$

La aplicación reiterada de la integración y la sustitución dá finalmente

$$I_n^k = -\frac{k}{n^2}\pi^{k-1} + \frac{k(k-1)(k-2)}{n^4}\pi^{k-3} - \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{n^6}\pi^{k-5} + \dots$$

Para el cálculo de los últimos términos debemos tomar en cuenta la paridad de k. Obtenemos así finalmente para k par:

$$I_n^k = (-1)^n \frac{k!}{n^2}\left[\frac{\pi^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{\pi^{k-3}}{n^2(k-3)!} + \dots - \frac{\pi}{n^{k-2}\,1!}\right]$$

y para k impar:

$$I_n^k = (-1)^n \frac{k!}{n^2}\left[\frac{\pi^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{\pi^{k-3}}{n^2(k-3)!} + \dots - \frac{\pi^2}{n^{k-3}\,2!}\right]$$

Simbólicamente podemos dar a (6) la forma siguiente:

$$c_n = \frac{2}{\pi}\sum_0^\infty a_m L_m(I) \qquad\qquad a_m = \frac{1}{m!} D^m [x \,.\, f(x)]_{x=1}$$

entendiendo que los exponentes de I se interpretan como índices superiores.

Instituto de Matemáticas, Buenos Aires

NOTA DE RED. — Un estudio del Dr. González Domínguez sobre el primero de los problemas enunciados en la introducción, y otra nota del Prof. Frucht sobre el mismo Tema 3º aparecerán en el próximo número.