REVISTA DE REVISTAS

JUAN BLAQUIER. *Una demostración de los célebres teoremas de Picard.* Anales de la Sociedad científica argentina. T. CXXIX. Abril 1940, p. 145-152.

"La ventaja —dice el autor— de la presente demostración consiste en que, además de ser breve, no utiliza más que las nociones básicas de la teoría de funciones analíticas".

Sin emitir opinión sobre lo que deba entenderse por nociones básicas, entre las cuales incluye el autor al teorema de Bloch, conviene observar, en lo que se refiere a la encomiada brevedad, que si en lugar de suponer conocido este teorema, se sustituye por el de Schottky, más sencillo que aquél, las ocho páginas de la memoria quedan ventajosamente sustituidas por las pocas líneas que necesita Bieberbach en su conocido tratado (t. II, pág. 225) o Dienes en el suyo (pág. 270) para demostrar el teorema general de Picard.

El autor sigue fielmente, con ligeros cambios de notación, la exposición de Montel para el primer teorema y justo es reconocer que alguna de las aclaraciones que le agrega siguiendo a Bieberbach son oportunas, pues tal como está redactado algún párrafo de pág. 116 del libro de Montel algún lector podría confundirse; pero apenas se separa de la guía del libro, para pasar al segundo teorema, comienzan los tropiezos. Mientras dedicó casi media página a desarrollar una breve frase de Montel, que dice más y mejor, y con mayor claridad, ahora salta velozmente por los puntos que exigirían alguna justificación y sale del paso con frases como ésta: "es también regular o polo de primer orden, como no es difícil verlo, para la función $g(z)$" o bien como esta otra: "En virtud de la definición de ésta el punto $z = \infty$ no puede ser polo de $g(z)$". Aunque creemos que no habría sido difícil al autor señalar los pasajes de textos corrientes de los que pueden deducirse fácilmente tales conclusiones, debe señalarse este brusco contraste entre las dos partes de la memoria; sobre todo habiendo anunciado y cumplido hasta en exceso, que su exposición tendría "más detalles que los imprescindibles".

Pero todo esto es materia parva si se compara con el nudo del problema abordado. Es bien sabido que la única dificultad que se presenta al aplicar el razonamiento de Bloch al teorema general de Picard estriba en que mientras el logaritmo de una función entera se puede uniformar, como hace p. ej. Montel en pág. 116, por la sencilla razón de que el campo de monogeneidad es simplemente conexo, en cambio, en el caso del 2º teorema, el entorno del punto del infinito es doblemente conexo y falla completamente aquel procedimiento.

Ahora bien, el teorema de Riemann, que se aplica después, presupone la *uniformidad* de la función y ya en los cursos elementales se dan funciones sencillísimas, no uniformes, para las cuales no se verifica la propiedad.

La conclusión a que llegamos, cualquiera que sea el contenido de las cartas de eminentes matemáticos que a falta de argumentos objetivos exhibe el autor en apoyo de su memoria, es que los dos teoremas de Picard quedan con ella sin demostrar.

C. C. DASSEN. *A propósito de una demostración del segundo teorema de Picard.* Boletín Matemático. Año XIII, págs. 256 - 259.

La memoria que acabamos de comentar fué presentada por su autor a la Academia nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, como candidato a ingreso; y el único académico que en ésta representa desde su fundación o refundición a la ciencia matemática, tuvo que expedir su informe técnico. Pero habiendo declarado en varias ocasiones con ejemplar sinceridad, digna de imitación, su desconocimiento de la teoría de funciones de variable compleja, tuvo que recurrir, como confiesa noblemente, al Dr. Carlos Biggeri ''especialista — según dice el citado académico — en Teoría de Funciones''; quien le facilitó el condenatorio informe solicitado.

El académico informante sobre la memoria objeta que ''al final, se sentaba una afirmación que, de no demostrarla, *dada la índole didáctica del trabajo* (*) resultaba insuficiente la demostración deseada''. A continuación reproduce la contestación del ''especialista en Teoría de Funciones'' quien ''no se limita a contestar escuetamente la consulta, sino que da un teorema general, del cual es un simple corolario la afirmación antedicha''.

Esta nueva aportación del Dr. Biggeri al Análisis, sugiere sin embargo, como todas las suyas, algunas observaciones.

1º El nuevo teorema figura desde remota fecha en textos elementales. Baste citar el viejo Burkhardt, que data del siglo pasado (págs. 97 y 130) como el de Osgood, el de Hurwitz-Courant, el de Bieberbach, etc. En el primer volumen de éste, que contiene los elementos de la teoría hasta tiene el teorema un nombre que lo individualiza y encabeza todo el capítulo, § 5, (pág. 187 de la 1ª edición) que titula: ''Satz von der Gebietstreue''. En su diminuto manual de vulgarización figura ya en la 2ª página.

2º Es muy cierto que casi todos consideran un punto z_0 en el que $f(z)$ holomorfa y demuestran que los puntos homólogos de un entorno de z_0 llenan un entorno de w_0 mientras que el Sr. Biggeri supone que z_0 es un polo y por tanto w_0 es el punto del infinito; pero es imperdonable ignorar la equivalencia entre ambas propiedades, puesto que el exterior de un círculo se transforma en el interior de otro por la función $1/z$. Lo singular del caso es que el autor realiza este cambio de variable y todavía necesita desarrollos en serie para llegar a resultado tan sabido y repetido en todo curso elemental, con la agravante de que solamente lo hace en el caso trivial de polo simple.

3º El caso general de polo múltiple supera al parecer sus fuerzas y sale del trance con una evasiva análoga a las observadas en la memoria precedente, limitándose a decir; ''se trata análogamente haciendo las clásicas sencillas consideraciones complementarias con respecto a las funciones analíticas multiformes que se presentan''. Si el autor no hubiera olvidado al parecer que la función $1/f(z)$ es holomorfa donde la $f(z)$ tiene polo, sea todo lo múltiple que quiera, le habría bastado citar la página de cualquiera de los textos donde está el teorema. Y más decoroso habría sido ahorrarse la nota íntegra, puesto que hasta ese caso de polo, el que trata y el omitido, están liquidados en el texto de Bieberbach (Vol. I, pág. 188) líneas 31 y 32, con 16 palabras justas.

(*) El subrayado es del autor; análoga observación vale para los restantes.

4ª Pero la omisión de la nota que comentamos nos habría privado de una noticia interesante: el Dr. Biggeri afirma rotundamente en pág. 258 (líneas — 7 a — 5) este nuevo resultado, que es lo sensacional de su trabajo:

"Existen dos números positivos $\rho_3 \leqq \rho_2$ y ρ_4 tales que, la función $t = t(z')$ establece entre los círculos $|z'| \leqq \rho_3$ y $|t| \leqq \rho_4$ una correspondencia biunívoca".

Hemos buscado alguna manera de inculpar al tipógrafo, buscando una posible errata, pero indudablemente el Dr. Biggeri ha entendido así el teorema de la función inversa y es preferible no comentarlo; los alumnos medianos de Introducción a la Matemática superior (pues los peores cometen siempre el mismo error al llegar a este punto) formarán su propio juicio y de paso sacarán este sorprendente corolario: toda función analítica es lineal.

5ª El único *lapsus* que han descubierto en la memoria antes reseñada el Dr. Biggeri y el académico firmante, no existe; y huelgan por tanto las ocho páginas impresas que le dedican; en cambio no parecen haber notado la falla capital que inutiliza el trabajo y deja intacto el tema abordado.

CARLOS BIGGERI. *Sobre el segundo teorema de Picard.* — Boletín Matemático, Año XIII, Diciembre de 1940 págs. 291 - 294.

Dice el autor: "El objeto de la presente Nota (a la cual le asignamos simplemente un interés didáctico, en cuanto ella simplifica mucho la deducción del segundo teorema de Picard, del teorema de Landau) es: demostrar el segundo teorema de Picard a partir de una mayoración de tipo algebraico-logarítmico siguiendo la idea de Bloch pero, eso sí, modificándola en parte".

En efecto, mientras Bloch utiliza prudentemente fórmulas algebraicas racionales, para no salir del campo de las funciones uniformes y así llega en solo nueve líneas a demostrar el teorema general de Picard, con elegancia insuperable, el autor de esta nota, pretendiendo mejorar tal obra maestra, prefiere utilizar otra acotación de las que da Bloch con otro objeto; pero como en ella figuran logaritmos y raíces, tropieza en el mismo escollo que la memoria anterior (esto es, la multiformidad de la función) y pretende zafar de la varadura con una frase evasiva: "...la posibilidad de tal uniformación... se demuestra combinando ciertas propiedades de la teoría de funciones".

Es de suponer que si el autor hubiera logrado tal combinación la habría expuesto; sin ella el valor del trabajo es nulo; y en cuanto a la simplificación anunciada, más bien parece una frase de tono humorístico.

NOTA. Ya en prensa este número aparece una nueva memoria del Dr. Dassen en los Anales de la Sociedad científica argentina, (Enero 1941), en que transcribe otro trabajo del Dr. Biggeri relativo al mismo teorema de Picard.

El contenido real de las dos páginas que ocupa se reduce a esto: vuelve a tomar en lugar de la fórmula algebraica de Bloch otra algebraico-logarítmica y vuelve, por tanto, a encallar en el mismo punto de la uniformación, que es el arrecife del problema. Veamos cómo sale del atasco en este nuevo intento.

En pág. 13, nota 3 reconoce que "la solución de tal problema (de la uniformización) es la *única* complicación que se presenta al demostrar el *segundo* teorema *correlativamente* a la forma en que Montel demostró el *primer* teorema, empleando el teorema de Bloch".

Este reconocimiento significa ya un progreso. Después de mucho insistir sobre este punto capital, (hasta seis veces lo hace en el texto, con letra bastardilla para mejor destacarlo) le dedica nada menos que siete largas notas desde pág. 12 a 15; y después de las cinco primeras que son preparatorias, aborda por fin en la nota (6) la demostración de la proposición que fué admitida provisionalmente en el texto, ''*para brevedad de la demostración*''. Es la siguiente:

''$h(z)$ se puede uniformizar en un entorno de $z_0 = \infty$ (o sea $h(\frac{1}{z})$ se ''puede uniformizar en un recinto simplemente conexo que contenga en su interior ''al origen $z = 0$).

''En efecto; si $f(z)$ satisface a las condiciones (que se le imponen para ''demostrar por reducción al absurdo el segundo teorema): a)... b)... c)... ''entonces $h(\frac{1}{z})$ se puede uniformizar en un recinto simplemente conexo que ''contenga en su interior al origen, $z = o$ (es decir, $h(z)$ se puede uniformizar ''en un entorno de $z_0 = \infty$).''

Hasta aquí la demostración consiste en repetir el enunciado; y esto no sería censurable si no repitiera también la singular afirmación de que el trasformado del entorno del punto $z = \infty$, que es como el autor debe saber *doblemente conexo,* resulta por arte de magia *simplemente conexo.* Si así fuera, la cuestión quedaría resuelta inmediatamente como en el primer teorema y queremos hacer al autor la concesión de que es un simple *lapsus* de expresión, pues de creer él mismo lo que afirma, es de suponer que habría sacado partido inmediato para liquidar el tema. Sea descuido o sea algo peor, lo cierto es que el autor repite después una y más veces el mismo dislate.

Prosigamos la demostración anunciada; la cual se reduce a agregar a lo antes copiado: ''lo que se demuestra combinando (laboriosamente) ciertas propiedades de la teoría de funciones; (véase nota séptima)''.

Pasamos a la nota 7ª en busca de la tantas veces prometida ''uniformización'' y allí no hay nada de ella; por el contrario se limita a señalar que en el caso de polo ''es *imposible* uniformizar la función''.

Y aquí termina la memoria, dejando todas cuatro intacto el segundo teorema de Picard a pesar de tan laborioso (y por tanto loable) esfuerzo. Esperemos el quinto intento que según anuncia publicará oportunamente, deseándole más éxito que el de los precedentes, y alguna ventaja visible sobre las sencillas y elegantes demostraciones que figuran en los tratados ya citados.

Siendo negativo el fruto de las cuatro notas examinadas, huelga analizarlas minuciosamente para cosechar errores de menor cuantía; pero hay alguno de tal dimensión que conviene señalarlo para evitar que prospere entre los lectores que no hayan llegado a los cursos elementales de Cálculo: el doctor Biggeri afirma en una y otra memoria, que es una *integral elíptica* la utilizada por Bloch y cuyo cálculo proponemos (T. VII, núm. 3) bajo el nº 10 de las *Cuestiones elementales*:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^2)^{2/3}}$$