SOBRE LA PARADOJA DE BERTRAND

Nota II de Esther Ferrari

En la comunicación de H. Petrini a la Academia de Ciencias de Estocolmo, presentada el 22 de Enero de 1936 por T. Carleman y F. Carlson (*), se afirma que de las tres soluciones dadas por Bertrand la tercera (o sea el valor $\frac{1}{4}$) es la única que debe considerarse como exacta. Petrini modifica la definición clásica de probabilidad discreta para aplicarla a los problemas de probabilidad geométrica de este modo:

''*Modification.* — Dans le calcul de la probabilité géométrique on considère les points, les lignes et les surfaces comme des limites de grandeurs géométriques, qui ont une ou plusieurs dimensions de plus. Par exemple, s'il s'agit des points sur une surface, on s'imagine la surface partagée en un grand nombre fini d'éléments égals, chacun représentant un seul point. Une direction est représentée par un petit angle. De cette manière les cas favorables seront réduits en un nombre fini, et on peut appliquer la définition donnée pour la recherche d'une probabilité approximée. La vraie probabilité est définie comme la limite de cette probabilité approximée, lorsque les éléments considérés deviennent infinement petits. Cette méthode est le plus souvent acceptée, et nous l'emploierons dans la suite''.

Esta modificación es legítima para conjuntos de puntos situados en una superficie, la cual se divide en elementos

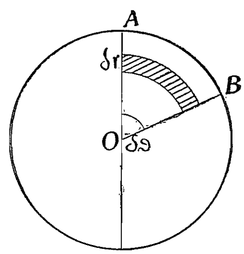

Fig. 1

iguales; pero cuando se trate de rectas, los elementos iguales ya no son trozos de superficie, sino conjuntos de rectas.

(*) Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. Band 25 A. Nº 16.

La primera parte de nuestro trabajo apareció en el Núm. 1 de este mismo vol. VII de la U. M. A.

Habiendo aceptado Petrini la solución prob $= \frac{1}{4}$ trata de hallar las faltas de la primera y de la segunda solución de Bertrand y dice así:

Première solution. — Maintenant nous chercherons la faute de la première solution. Soit le rayon OA du cercle donné partagé par portions δr, égales entre elles. Nous considérons le faisceau des cordes qui sont tirées perpendiculairement à OA, de manière qu'une corde passe par chaque élément δr. En passant à la limite $\delta r = 0$ on aura le faisceau complet qui est perpendiculaire à OA. Puis nous répéterons la même procédé pour un rayon OB, qui fait le petit angle $\delta\vartheta$ avec le rayon OA etc. pour tous les petits angles $\delta\vartheta$ et chaque fois nous trouverons la probabilité cherchée $= \frac{1}{2}$. En passant à la limite nous avons consideré toutes les directions de tous les faisceaux complets et la probabilité reste toujours $= \frac{1}{2}$. C'est le sens dans lequel on aura à comprendre les mots ''pour des raisons de symétrie''.

Antes de seguir copiando, observemos que el sentido dado por Petrini a la frase clásica «por razones de simetría» no es en nuestra opinión correcto. En realidad, lo que según los autores clásicos de probabilidades expresaba este término (como ya hemos visto en la nota enterior) era esto:

Si es:

$$\text{prob} = \frac{\int_{c'} f(x,y) \cdot dx \cdot dy}{\int_{c} f(x,y) \cdot dx \cdot dy} = \frac{\int_{o}^{a} dx \int f(x,y)\, dy}{\int_{o}^{a} dx \int f(x,y)\, dy}$$

$\int f(x,y)\, dy$ para el conjunto de casos favorables es constante $= A$,
» » » » » » posibles » » $= B$,

la probabilidad es igual a $\frac{A}{B}$, prescindiendo de la segunda integración, ya que $\frac{A \cdot a}{B \cdot a} = \frac{A}{B}$.

Prosigue así el artículo que comentamos:

''Mais où est la faute de ce raisonnement? En passant du premier faisceau, qui est perpendiculaire au rayon OA, au second faisceau nous avons omis tous les faisceaux intermédiaires, qui consistent en cordes, dont le nombre est proportionnel à l'aire du secteur AOB, d'après ce que nous venons de démontrer à propos de la troisième solution. Le nombre des cordes omises est donc infiniment plus grand que celui des cordes retenues. Sous cettes circonstances il n'est pas surprenant, qu'en passant à la limite on ne trouvera pas le même résultat que si dès le début on avait considéré les cordes du secteur AOB.

Vemos aquí que cuando Petrini se propone contar las cuerdas, lo hace contando los puntos medios y no las rectas que determinan las cuerdas, como hace Bertrand en este caso. Esto no es correcto, pues ya hemos visto que figuras iguales consideradas como conjuntos de puntos no corresponden a conjuntos iguales de rectas.

Por último dice Petrini:

"La faute est précisément la même que si on avait voulu chercher le rapport des aires des deux cercles concentriques en raisonnant comme ça: "pour des raisons de symétrie il suffit de considérer les éléments de surface, qui se trouvent le long du rayon OA, donc le rapport est $= \frac{1}{2}$".

Ni Bertrand, ni ningún autor clásico, hubiera aplicado tal razonamiento puesto que en este caso la integral respecto de y para cada x es función de x, no constante.

Al tratar de hallar la falta de la segunda solución sigue Petrini utilizando los mismos conceptos; pero como figuras iguales consideradas como conjuntos de puntos no corresponden a conjuntos iguales de cuerdas, según hemos visto repetidas veces, y él sustituye las cuerdas por sus puntos medios, no es extraño que también en este caso Petrini llegue a una conclusión diferente a la que llegó Bertrand. Aun a riesgo de incurrir en excesivas repeticiones, y en vista de la insistencia de Petrini en adoptar el punto medio como representante de la cuerda, como si éste fuera el único modo posible, observemos que éste es solamente uno de los infinitos modos que se pueden elegir.

En efecto, otra forma y más natural, sería determinar la cuerda por su polo. Evidentemente a conjuntos iguales de cuerdas corresponden conjuntos iguales de polos, pero no recíprocamente. Lo mismo exactamente que sucede cuando se adopta el punto medio.

Por ej. si consideramos sobre la prolongación de un radio OA los segmentos iguales AB y BC, los conjuntos de cuerdas que tienen sus polos sobre AB y BC no son congruentes, ni tampoco lo son los conjuntos de rectas correspondientes; es lógico pues que al adoptar como medida del primer conjunto la del segundo resulten probabilidades distintas.

Como el conjunto de polos correspondientes a las cuerdas menores que $\sqrt{3}$ R es la corona de radios R y 2R cuya área es $3\pi R^2$ y la medida del conjunto de polos correspondientes a todas las cuerdas de la circunferencia es infinita, resulta aplicando estos resultados al problema de Bertrand, que la probabilidad de los casos desfavorables es igual a cero.

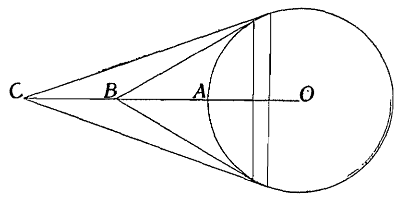

FIG. 2

Por consiguiente la solución del problema de Bertrand sería: prob = 1.

Pasemos ahora a dar la interpretación que creemos justa del problema de Bertrand. Puesto que el conjunto de elementos considerados está formado por cuerdas de la circunferencia y no por rectas del plano, y teniendo en cuenta las conclusiones anteriores, será preciso:

1.º — Adoptar coordenadas de cuerdas.

2.º — Determinar la densidad correspondiente a cada sistema de coordenadas por la condición de invariación respecto del grupo de movimientos que transforma una circunferencia en sí misma, es decir, del grupo de rotaciones alrededor de su centro.

Como coordenadas de las cuerdas podemos adoptar entre otras muchas, las siguientes:

a) Los argumentos α y β de sus extremos.

b) El argumento del origen y el arco positivo subtendido por la cuerda.

c) El arco subtendido por la cuerda y la dirección y sentido de esta que vienen determinados por el argumento del vector de origen 0 perpendicular a la cuerda y dirigida hacia ella.

d) El origen y la longitud de la cuerda.

e) La inclinación de la cuerda.

f) La longitud de la cuerda y su dirección (dada como en c).

Sistema de coordenadas (*a*). — La probabilidad elemental será del tipo $\iint f(\alpha, \beta) \, . \, d\alpha \, . \, d\beta$. Si se efectúa una rotación los nuevos argumentos son: $\alpha' = \alpha + h$, $\beta' = \beta + h$. Será $\iint f(\alpha, \beta) \, . \, d\alpha \, . \, d\beta = \iint f(\alpha', \beta') \, . \, d\alpha' \, . \, d\beta'$ si para todo par de valores se cumple la condición:

$$f(\alpha', \beta') = f(\alpha, \beta) \frac{\delta(\alpha, \beta)}{\delta(\alpha', \beta')}$$

Como es: $\frac{\delta(\alpha, \beta)}{\delta(\alpha', \beta')} = 1$ debe ser: $f(\alpha, \beta) = f(\alpha', \beta')$

Resulta pues que para todos los pares de valores $\alpha' = \alpha + h$, $\beta' = \beta + h$, es decir de diferencia $\beta' - \alpha' = \beta - \alpha$ toma f igual valor, luego esta sólo depende de la diferencia $\beta - \alpha$, es decir es función de $\beta - \alpha$.

$$f(\alpha, \beta) = \varphi(\beta - \alpha)$$

El caso más sencillo se tendrá cuando sea $\varphi = \text{Cte}$.

Ya se calculó ese caso y dió como resultado prob. $= \frac{1}{3}$, que es la primera solución de Bertrand.

Sistemas de coordenadas b, c, d, e, f. — Si consideramos por ej. el sistema d) resulta:

$$\iint F(\alpha, l) \, . \, d\alpha \, . \, dl = \iint F\left(\alpha, 2 \operatorname{sen} \frac{\beta - \alpha}{2}\right) . \, d\alpha \, . \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \, . \, d(\beta - \alpha)$$

En general, cualquiera que sea la segunda coordenada x, función del arco (casos b, c, d, e, f) la probabilidad elemental será del tipo:

$$\iint f(\alpha_1, x) \, . \, d\alpha_1 \, . \, dx \quad ; \qquad \beta - \alpha = x$$

Si se efectúa una rotación resulta: $\alpha'_1 = \alpha_1 + h$, $\quad x' = x$

Si para todo par de valores se cumple la condición:

$$f(\alpha_1, x) = f(\alpha' x') \frac{\delta(\alpha_1, x)}{\delta(\alpha'_1, x')}$$

Como es: $\frac{\delta(\alpha_1, x)}{\delta(\alpha'_1, x')} = 1$ debe ser: $f(\alpha_1, x) = f(\alpha'_1, x')$

Luego f debe ser sólo función de x, puesto que no varía al aumentar a_1. Por tanto: $f(\alpha_1, x) = \varphi(x)$.

Como para el conjunto de casos favorables y posibles los límites de integración son iguales, la probabilidad puede expresarse por un cociente de integrales simples, ya que fijado el origen la integración respecto de la otra coordenada es independiente de aquél, siendo por tanto aplicable el principio de simetría que hemos explicado anteriormente:

$$\text{prob.} = \frac{\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \varphi(x) \, . \, dx}{\int_0^{2\pi} \varphi(x) \, . \, dx}$$

y llamando: $\Phi(x) = \int \varphi(x) \, dx$ resulta:

$$\text{prob.} = \frac{\Phi\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \Phi(0)}{\Phi(2\pi) - \Phi(0)}$$

Siendo Φ una función arbitraria, el problema de Bertrand no tiene solución única.

Cualesquiera que sean las coordenadas adoptadas, la solución más sencilla se obtiene adoptando densidad constante, pero entonces los resultados numéricos dependerán de las coordenadas adoptadas. Así, por ej.: Si se adoptan los sistemas de coordenadas a), b), c), resulta prob $= \frac{1}{3}$; en cambio si adoptamos los sistemas d), e), f) resulta prob $= 0{,}134$.

Deltheil en su libro sobre probabilidades geométricas (*) trata el problema de la determinación de la probabilidad elemental utilizando la teoría de los grupos continuos de transfor-

(*) *Loc. cit.*, pág. 16. Véase también el curso de Rey Pastor sobre *Probabilidades abstractas*.

maciones. El problema de Bertrand corresponde a la categoría de los denominados por Deltheil «cas d'insuffisance», es decir, los casos en que las dos condiciones de la medida (igualdad para conjuntos congruentes y aditividad) dejan subsistir una función arbitraria de una variable, por ser el grupo de movimientos simplemente infinito, mientras que el conjunto de entes considerados es doblemente infinito. Tal acontece como vemos en el problema de Bertrand.

Cabe aún el caso en que las dos condiciones de la medida no solamente no determinan ésta, sino que ni siquiera restringen la indeterminación, como acontece en el caso anterior. Tal sucedería si el problema de las cuerdas lo trasladamos a las cónicas, considerando las cuerdas de una cónica que son secantes de otra cónica interior. La función arbitraria tiene en este caso dos variables independientes.

Instituto de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

TEMAS PROPUESTOS

27. — Transformar en integrales elípticas del tipo de Legendre las propuestas en *Cuestión elemental* Nº. 10. Generalización.

R. P.

28. — Expresar la derivada n-sima de la función compuesta $u^p v^q f(u,v)$ siendo p, q números reales y u, v, funciones de x indefinidamente derivables, mediante las derivadas de $f(u,v)$.

J. Babini.

29. — Determinar el parámetro y la excentricidad de la cónica osculatriz en un punto ordinario de una curva plana.

J. B.

30. — Es sabido que la permutación cíclica (123) se puede descomponer de estos tres modos en producto de dos trasposiciones:

(12) (13), (23) (12) y (13) (23). Obtener la fórmula general del número de descomposiciones de la permutación cíclica (123 . . . n) en producto de n — 1 trasposiciones.

R. Frucht.