DESARROLLO EN SERIE DE LA FUNCION w (z) DEFINIDA POR LA ECUACION

$$w = e^{h\,z\,w}$$

(Tema N° 2. Rev. U. M. A. VII, pág. 26)

El desarrollo pedido es el siguiente:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} h^n z^n = 1 + hz + \frac{3}{2!} h^2 z^2 +$$
$$\frac{4^2}{3!} h^3 z^3 + \frac{5^3}{4!} h^4 z^4 + \ldots$$

*1*ª. *demostración.* Introduciendo la notación abreviada $hz = x$ tenemos que es

$$w = e^{xw}$$

o sea

$$x = \frac{\log. w}{w}$$

Para desarrollar w en serie de potencias de x, nos servimos de la conocida fórmula para la n-sima derivada de una función analítica en el origen

$$\frac{w^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{w\ (x)}{x^{n+1}}\, dx$$

en donde como camino de integración se puede tomar, por ejemplo, una circunferencia $|x| = \varepsilon$ con un radio suficientemente pequeño ε.

En nuestro caso conviene introducir como nueva variable de integración

$$y = \log. w = x\,w$$

obteniendo de esta manera

$$\frac{w^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{(n+1)y}.(1-y)}{y^{n+1}}\, dy$$

en donde es fácil reconocer que la nueva integral se puede extender a lo largo de la circunferencia $|y| = \varepsilon$ (por ser $y = 0$

y $w = 1$ para $x = 0$). Escribiendo dicha integral como diferencia de dos integrales

$$\frac{w^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{(n+1)y}}{y^{n+1}}\,dy - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{(n+1)y}}{y^n}\,dy$$

cada una de estas últimas se puede calcular como una derivada de la función $e^{(n+1)y}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{(n+1)y}}{y^{n+1}}\,dy = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{(n)}\ e^{(n+1)y}}{dy^n}\right]_{y=0} = \frac{1}{n!}\,(n+1)^n$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{(n+1)y}}{y^n}\,dy = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{(n-1)}\ e^{(n+1)y}}{dy^{n-1}}\right]_{y=0} = \frac{1}{(n-1)!}(n+1)^{n-1}$$

Por consiguiente

$$\frac{w^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}(n+1)^n - \frac{1}{(n-1)!}(n+1)^{n-1} =$$

$$\frac{(n+1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}$$

y según el teorema de Taylor:

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(0)}{n!}\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}\,h^n z^n$$

NOTA. — Encontré esta demostración hace varios años, como estudiante de matemáticas, y después descubrí que más o menos la misma se encuentra ya en un artículo publicado por Dziobek en el año 1917 (''Eine Formel des Substitutionstheorie'' en ''Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft''. Vol. 16, pág. 64 y sig.).

2ª. *demostración.* Sustituyendo $hz = x$ y $hzw = f(x)$ la ecuación dada se transforma en la siguiente:

$$f(x) = x\,e^{f(x)}$$

satisfecha por el desarrollo

$$f(x) = \frac{x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!\,2} + \frac{(3x)^3}{3!\,3} + \ldots = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{3^1x^3}{2!} + \frac{4^2x^4}{3!} + \ldots$$

lo que conduce inmediatamente al desarrollo de la función

$$w = 1 + \frac{1}{1!} h z + \frac{3^1}{2!} h^2 z^2 + \frac{4^2}{3!} h^3 z^3 + \frac{5^3}{4!} h^4 z^4 +$$

La demostración del desarrollo indicado para la función f (x) se encuentra en el libro ''G. Polya und G. Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin, 1-25), Band I, Aufgabe III 209, Seite 125 & 301''.

Roberto Frucht

3ª. solución. La serie pedida es

$$w = \sum_{n=0} \frac{[hz(n+1)]^n}{(n+1)!} \text{ convergente para } |z| < \frac{1}{|h|e}$$

pues el criterio del cociente da el límite $|hz|e$.

Para probarlo se hace $z = u e^{-hu}$ y, en un cierto entorno de $u = 0$ será absolutamente convergente la serie

$$w = \sum_{n=0} \frac{[hue^{-hu}(n+1)]^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0} \frac{[hu(n+1)]^n}{(n+1)!} \sum_{m=0} \frac{[hu(n+1)]^m}{m!} (-1)^m e^{hu},$$

y también será absolutamente convergente la serie doble

$$e^{hu} \sum_{m=0} \sum_{n=0} \binom{m+n}{n} \frac{hu^{m+n}}{(m+n)!} (-1)^m (n+1)^{m+n-1}$$

siendo por tanto legítima la permutación de las sumatorias. es decir

$$w = e^{hu} \sum_{p=0} \frac{(hu)^p}{p!} \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} (-1)^{p-n} (n+1)^{p-1} =$$

$$e^{hu} \sum_{p=0} \frac{(hu)^p}{p!} \Delta^p 1^{p-1} = e^{hu}$$

pues $\Delta^p 1^{p-1} = 1$ para $p = 0$ y $\Delta^p 1^{p-1} = 0$ para $p > 0$.

Eliminando u entre $z = ue^{-hu}$; $w = e^{hu}$ se obtiene la ecuación propuesta. La serie arriba dada es única por el teorema de las funciones analíticas implícitas.

J. B.