EL LUGAR GEOMETRICO Y LUGARES DE PUNTOS AREAS EN EL PLANO

Por V. y A. FRAILE y C. CRESPO

(Continuación)

---

3. — *Lugar de los centros de los paralelogramos inscritos en un cuadrilátero dado* (M. A. Longchamps). — Al resolver este problema se ha considerado siempre los paralelogramos de lados paralelos a las diagonales del cuadrilátero. De este modo la solución es el segmento cuyos extremos son los centros de dichas diagonales; pero se comprende que el lugar es más general prescindiendo de tal restricción impuesta por el paralelismo. Entonces se trata de un lugar área.

Sea A B C D el cuadrilátero dado (fig. 4). Tomamos arbitrariamente en los lados A B, A D sendos puntos E, F. A partir

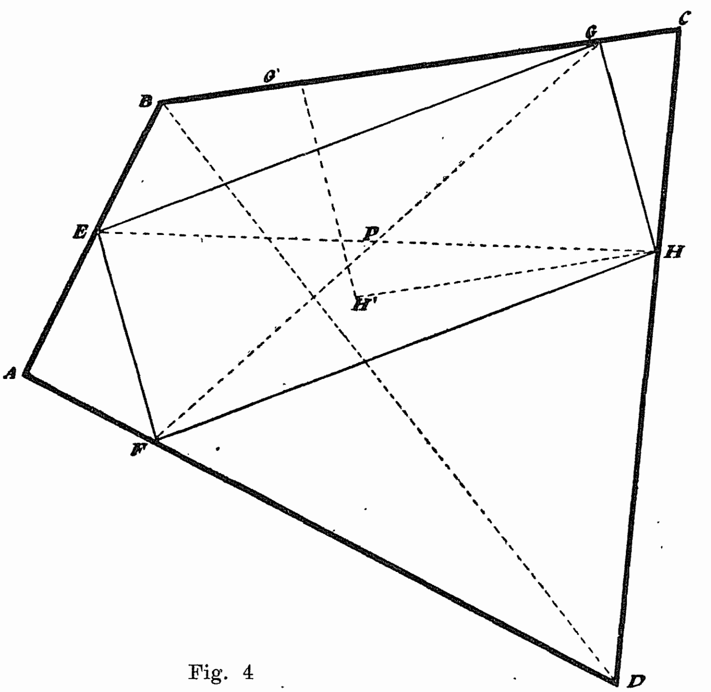

Fig. 4

de un punto cualquiera G' de B C, por ejemplo, tracemos un segmento G' H' igual y paralelo al E F, y por H' la paralela a B C hasta H. El segmento, HG, paralelo e igual a G'H', y el EF determinan, pues, un paralelogramo inscrito en el cuadrilátero dado y, por lo tanto, un punto del lugar. De esta construcción se deduce: 1º. Un punto del lugar queda unívocamente determinado eligiendo arbitrariamente sendos puntos en dos lados adyacentes del cuadrilátero; 2º. Elegidos los puntos anteriores quedan determinados los otros dos en el otro par de lados; 3º. Pueden no existir estos últimos puntos, y, por lo tanto, la elección arbitraria de E y F está acotada.

De todo esto resulta que los entes primitivos del lugar propuesto son cuatro puntos, E, F, G, H, vértices de un paralelogramo, que producen un punto P del lugar. Cada uno de estos cuatro puntos se mueve sobre una línea; pero este movimiento sólo es arbitrario para dos de ellos. El lugar ha de ser, pues, un área, en general. Los lados AB, AD del cuadrilátero dado, o mejor, los *recintos* acotados en ellos, son conjuntos-variables.

Como vemos, no es necesario el paralelismo de BD y EF.

Todo punto del lugar ha de ser centro de dos segmentos (diagonales) inscritos uno en AB y CD (fig. 5) y otro en AD y BC, luego ha de pertenecer a los paralelogramos QMRN y SMTN,

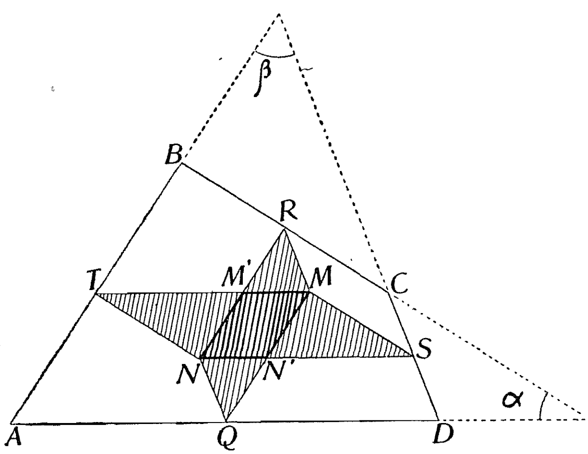

Fig. 5

superficies medias de ambos pares de lados opuestos. El lugar es, por lo tanto, la parte común a dichos paralelogramos. Es fácil ver que esta parte común es otro paralelogramo MM'NN'. N y M son centros, respectivamente, de las diagonales AC y BD del cuadrilátero, y los lados del lugar son paralelos a los A B y A D envolventes del cuadrilátero completo.

Si el cuadrilátero dado es trapecio el lugar degenera en un segmento, y si es paralelogramo, en un punto.

4. — *Lugar de los centros de los segmentos inscritos en una circunferencia y una recta.* — Es, pues, otra superficie media.

Sea O la circunferencia y r la recta (fig. 6). Reconoceremos cuándo un punto P es del lugar trazando la recta simétrica r' de r

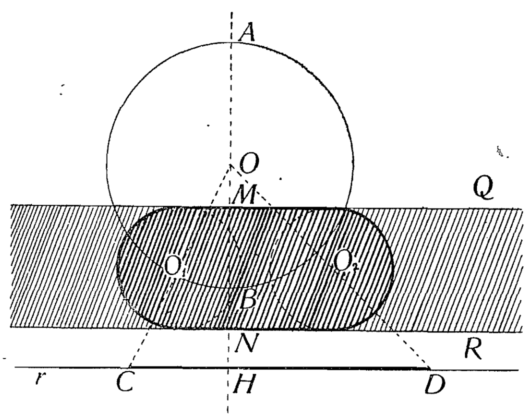

Fig. 6

respecto de P (hágase la figura). Si r' tiene con la circunferencia O puntos propios comunes, P es del lugar, y no lo es en caso contrario, puesto que si F y G son esos puntos comunes, uniéndolos con P y prolongando los segmentos hasta r, ambos segmentos cumplen las condiciones del enunciado.

Las rectas M Q y N R, paralelas a la r, donde M y N son, respectivamente, los centros de A H y B H, limitan este lugar área, que es la franja rayada: las rectas simétricas de r respecto de los puntos de dicha franja cortan o son tangentes a la circunferencia O; y no la cortan las simétricas de r respecto de los demás puntos del plano.

r y O son conjuntos-variables. El sistema de lugares parciales correspondiente a r lo constituyen todas las rectas de esta franja paralelas a r. Y el sistema de los correspondientes a O todas las circunferencias inscritas en dicha franja.

Si en vez de considerar la recta r se trata de un segmento CD, es claro que el lugar será la parte de la franja doblemente rayada, donde las circunferencias O_1, O_2 son las posiciones límites del lugar parcial correspondiente a O.

5. — *Lugar de los centros de los segmentos inscritos en dos circunferencias.*

Sean O_1, O_2 las circunferencias dadas, de radios r_1, r_2 respectivamente. Reconoceremos si un punto P de su plano es o no del lugar trazando la circunferencia O'_1, simétrica de la O_1, por ejemplo, respecto de P. Si O'_1 y O_2 tienen puntos comunes reales, S, T, y son S', T' sus simétricos respecto de P, los segmentos S S', T T' están inscritos en O_1 y O_2, y es P su centro.

Construyamos las circunferencias concéntricas de centro O (fig. 7), punto medio del segmento O_1 O_2, cuyos radios son, respectivamente, $1/2\,(r_1 + r_2)$ y $1/2\,(r_1 - r_2)$. Es fácil probar que las circunferencias simétricas de una de las dadas respecto de los

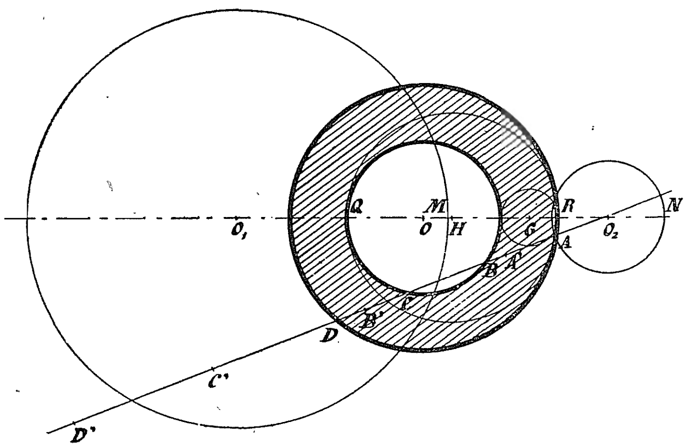

Fig. 7

puntos de la de radio $1/2\,(r_1 + r_2)$ son tangentes exteriormente a la otra; y lo son interiormente si se toma como centros de simetría los puntos de la circunferencia de radio $1/2\,(r_1 - r_2)$. Tracemos una recta cualquiera O_2D' que corte a ambas circunferencias concétricas. Los puntos de intersección son A, B, C, D, y A', B', C', D' los simétricos de O_2 respecto de aquéllos. En virtud de lo dicho, las circunferencias de radio r_2 y centros D' y C' son, respectivamente, tangentes exterior e interiormente a la O_1, con lo cual los puntos del segmento D' C' — y, por igual razón, los de B' A' — son centros de circunferencias de radio r_2 que tienen con la O_1 puntos comunes reales; y no los tienen las circunferencias de radio r_2 cuyos centros no están en los segmentos D' C', B' A', para la recta genérica considerada O_2D'. Por lo tanto, en dicha recta, sólo son puntos del lugar los de los segmentos AB y CD. Y, en definitiva, todo punto de la corona circular rayada es, pues, del lugar, y no lo son los demás puntos del plano. El lugar propuesto es esta corona.

Considerando los segmentos inscritos de extremos M, fijo en O_1, y X, variable en O_2 obtenemos un lugar parcial que es la circunferencia de centro G, inscrita en la corona, y que engendra el lugar total cuando M varía en O_1. Del mismo modo, un lugar parcial correspondiente a la circunferencia O_1 respecto de un punto fijo, N, de la O_2, es la circunferencia de centro H, tangente en Q y R a las de la corona.

6. — El l. g. de las polares de los puntos de la cuerda AB de una cónica φ (fig. 8) respecto de φ es la parte de haz rayada, donde P, vértice del haz, es polo de AB. Este haz acotado de polares es un lugar de rectas, y también lo es de puntos. Basta, para

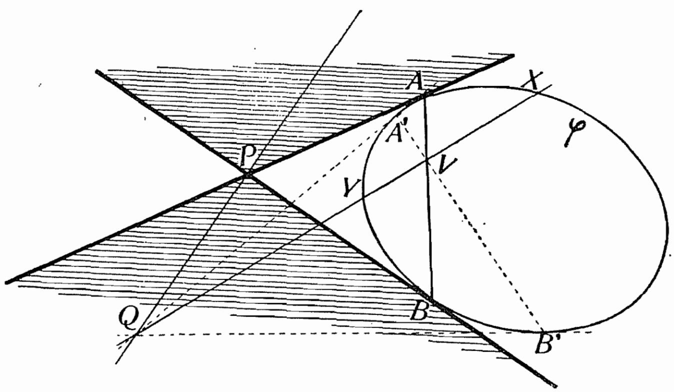

Fig. 8

verlo, enunciarlo así: «Dada una cónica φ y una cuerda AB, tómese *arbitrariamente* dos puntos, uno, X, en uno de los dos arcos en que la cuerda divide a la cónica, y otro, Y, en el otro arco. La recta XY corta en V a la cuerda AB. Lugar de los conjugados armónicos de los puntos V respecto de todos los pares (X, Y)». Todo punto, Q, del lugar ha de pertenecer a la polar de V, y, por ser V de la cuerda A B, dicha polar es del haz acotado.

También puede verse que la condición necesaria y suficiente para que un punto Q sea del lugar es que su polar A' B' respecto de φ corte a la *cuerda* A B, condición que cumplen solamente los puntos del recinto infinito rayado.

Los puntos del lugar quedan unívocamente determinados eligiendo una terna (X V Y); pero sólo es arbitraria la elección de X e Y; es decir, entre las tres líneas a que pertenecen, respectivamente, los puntos de la terna, sólo son conjunto-variables los arcos A X B y A Y B de la cónica dada φ.

(Continuará)

---

y

CUESTIONES DIDACTICAS Y METODOLOGICAS.

Nº 3. — El teorema fundamental de la semejanza de triángulos se demuestra ordinariamente como caso particular del teorema de las transversales (impropiamente llamado teorema de THALES). EUCLIDES, en cambio, (libro VI. Prop. 2) lo demuestra mediante la equivalencia de triángulos.

Analizar y comparar, desde el punto de vista didáctico, los dos caminos para llegar a la demostración de ese mismo teorema.

J. B.

Nº 4. La notación de los múltiplos de un número natural mediante el punto colocado encima de éste a su izquierda, desorienta a los alumnos y los conduce a resultados falsos que son disculpables puesto que este signo funcional, análogo a otros, es único, mientras que para cada función distinta se usan características diferentes. Cuando el alumno escribe p. e.

$$\dot{2} - \dot{2} = 0 \text{ en vez de escribir } \dot{2} - \dot{2} = \dot{2}$$

no comete error más grave del que haría el mismo profesor a quien se preguntase cuánto vale la diferencia f (x) — f (x) si el proponente entendiese por tal la diferencia entre dos funciones cualesquiera representadas genéricamente por la misma letra f. Sometemos la cuestión a la opinión de los profesores que hayan tropezado con táles inconvenientes, para que propongan la solución más adecuada.

M. V.