

REPRESENTACION GRAFICA DE LAS RAICES. IMAGINARIAS DE LA ECUACION DE SEGUNDO GRADO

por JUAN JOSÉ REBELLA (Montevideo)

Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Para obtener una representación gráfica de sus raíces consideremos la función

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (1)$$

la cual representa, como se sabe, una parábola con el eje paralelo al eje y . Las coordenadas del vértice de esta parábola son

$$x_v = -\frac{b}{2a}, \quad y_v = a \frac{4ac - b^2}{4a^2} \quad (2)$$

como se encuentra inmediatamente observando que en el vértice la tangente es horizontal y por tanto la derivada de (1) debe ser cero, o sea $y' = 2ax + b = 0$, de donde se deduce el valor de x_v y sustituyendo en (1) el de y_v .

Las dos raíces de la ecuación de 2.º grado se pueden escribir, por tanto,

$$x = x_v \pm \sqrt{-\frac{y_v}{a}}. \quad (3)$$

Si $y_v < 0$ estas raíces son reales y su representación gráfica consiste simplemente en que son iguales a las distancias del origen de coordenadas a los dos puntos en que la parábola (1) corta al eje x .

Más importante es el caso en que $y_v > 0$, y por tanto las dos raíces (3) son imaginarias. Para obtener también en este caso una representación gráfica de las raíces construyamos la

parábola simétrica de la anterior respecto su vértice (fig. 1); ella cortará al eje x en dos puntos cuyas distancias al origen O

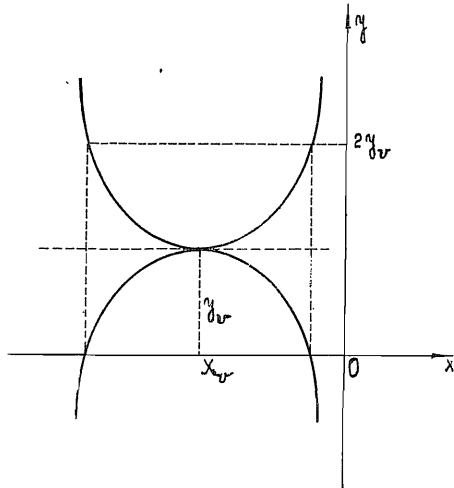


Fig. 1.

se calculan inmediatamente observando que por simetría deben ser iguales a las que se obtienen cortando la parábola primera por la recta $y = 2y_v$. Es, pues,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac + 8ay_v} =$$
$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = x_v \pm \sqrt{\frac{y_v}{a}}. \quad (4)$$

Es decir, en este caso de las raíces imaginarias, si construimos la parábola simétrica de la (1) respecto su vértice, la parte real de las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es la abscisa del vértice de dicha parábola y el coeficiente de i es igual, con signo $+$ o $-$, a la mitad de la cuerda que sobre esta última parábola determina el eje x .