EXTENSION DE LA FUNCION DE DIRICHLET AL CAMPO COMPLEJO

(Tema Nº 15, Vol. VII, pág. 28)

La llamada función de Dirichlet que toma el valor 1 en los puntos racionales y el valor 0 en los irracionales, admite, como es sabido, la siguiente expresión algorítmica

$$D(x) = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} (\cos m!\, \pi x)^{2n} = \lim_{m \to \infty} f_m(x)$$

y pertenece a la 2ª. clase de Baire, como límite de funciones de primera clase y no pertenecer a ella por ser totalmente discontinua. Se trata de extender esta función al campo complejo, es decir, considerar la función $D(z) = \lim_{m \to \infty} f_m(z)$, donde z es un punto cualquiera del plano complejo, estudiando el doble paso al límite y la sucesión de funciones $f_m(z)$.

A tal fin, hacemos $m!\pi = k$ y escribimos

$$w = \cos kz = \frac{1}{2}\left(e^{kzi} + e^{-kzi}\right)$$

o bien, con $\zeta = e^{kzi}$,

$$w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right).$$

Resulta así

$$f_m(z) = \lim_{n \to \infty} w^{2n}, \qquad D(z) = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} w^{2n}.$$

En virtud de esta definición de $f_m(z)$ ella tomará el valor 0 en los puntos z correspondientes a valores w tales que $|w| < 1$, mientras que será ∞ en aquellos en que $|w| > 1$. Además, será 1 en los puntos de la circunferencia $|w| = 1$ que tengan argumento racional respecto de π, no teniendo, en cambio, valor determinado en los de argumento irracional respecto de π.

El problema consiste, pues, en determinar a que puntos del plano z corresponden estos puntos w. Para ello debemos transformar en el plano ζ el círculo $|w| \leqq 1$ del plano w y luego pasar de esa región transformada a su correspondiente en el plano z.

Prácticamente procedemos así: la función de Joukouwski $w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$, transforma circunferencias del haz AB en circunferencias del mismo haz. En particular, la circunferencia del haz de centro i cuya ecuación en coordenadas polares es $\rho^2 - 2\rho \operatorname{sen} \varphi = 1$ se transforma en la circunferencia de centro en el origen y radio 1, pues los vectores $\frac{1}{2}\zeta$ y $\frac{1}{2}\frac{1}{\zeta}$ dan una resultante constantemente igual a 1 como se comprueba fácilmente.

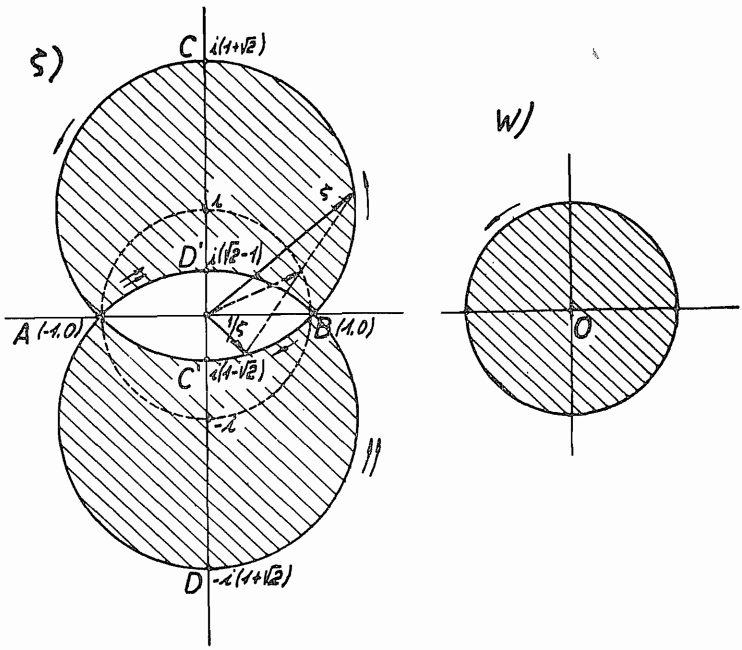

Fig. 1

Se comprende de inmediato que a la circunferencia del haz de centro $-i$, le corresponde también la circunferencia de centro en el origen y radio 1. Recíprocamente, a la circunferencia $|w| = 1$ del plano w, la función inversa $\zeta = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$

hace corresponder en el plano ζ las circunferencias del haz AB de centros i, $-i$.

Además, como al centro $w = 0$ en el plano w, le corresponden los centros i, $-i$ en el plano ζ, el interior de la circunferencia $w = 1$, se transforma en el interior no común de las circunferencias centradas en i, $-i$ (región rayada).

Desde luego, se corresponden las regiones no rayadas y cuando un punto recorre la circunferencia $|w| = 1$ en el sentido directo, sus dos correspondientes en el plano ζ se mueven sobre las circunferencias en el sentido indicado por las flechas, transformándose la semicircunferencia superior del plano w en la circunferencia superior del plano ζ.

Para pasar ahora de ζ a z, introducimos previamente el plano auxiliar $\log \zeta$, es decir, transformamos ζ en $\log \zeta$.

A lo largo de la circunferencia $\rho^2 - 2\rho \operatorname{sen} \varphi = 1$ es $\rho = |\operatorname{sen} \varphi \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi + 1}|$ y por eso, haciendo $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, $\log \zeta = \log \rho + i \varphi$ (con abstracción de un múltiplo de 2π) se representa en la forma indicada en la figura, correspondiendo a la circunferencia del plano ζ la sinusoide a del plano $\log \zeta$. Las zonas rayadas se corresponden, pues el punto $\zeta = i$, se transforma en el plano $\log \zeta$ en el punto $i\dfrac{\pi}{2}$.

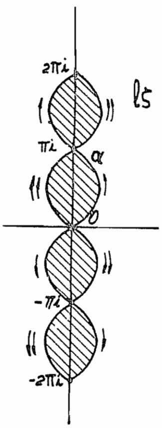

Fig. 2

Debemos pasar, por último, del plano $\log \zeta$ al plano z. Con

$$z = \frac{\log \zeta}{ki} = \frac{\log \zeta}{m!\,\pi i} = \frac{\varphi}{m!\,\pi} - i \frac{1}{m!\,\pi} \log \rho,$$

resulta para $m = 3$, por ejemplo, las representación de la figura. Se corresponden, como es evidente, los interiores, exteriores y contornos entre sí. Tenemos así que la función $f_m(z)$ de primera clase toma tres valores

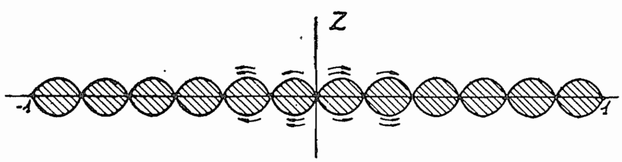

Fig. 3

$f_m(z) = 0$ dentro de los limbos rayados

$= \infty$ fuera de los limbos rayados

$= 1$ en los nodos y en un conjunto denso sobre el contorno (puntos correspondientes en el plano z a los puntos de la circunferencia $|w| = 1$ de argumento racional respecto de π).

Finalmente, cuando $m \to \infty$, aumentan indefinidamente los nodos, conservándose los ya existentes, con lo cual el conjunto variable de limbos tiende a confundirse con el segmento $(-1, 1)$, quedando como conjunto interior a todos los recintos el de los puntos irracionales del intervalo $(-1, 1)$. Considerando las infinitas determinaciones de $\log \zeta$, resulta en conclusión que la función D(z) vale 1 y 0 en los puntos del eje real e ∞ en el resto del plano. La función real de dos valores se convierte, por tanto, en una de tres, resultado al que se puede llegar más brevemente sin necesidad del estudio que hemos hecho de las funciones $f_m(z)$, creyendo interpretar así el tema propuesto.

Félix Eduardo Herrera

Otra solución.

Si descomponemos $\cos z$ en su parte real e imaginaria tendremos, siendo $z = x + iy$,

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$$

y su módulo será

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sh}^2 y.}$$

Teniendo en cuenta las fórmulas

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x, \qquad \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - 1$$

obtenemos

$$|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1 + \cos^2 x.}$$

Aplicando esta fórmula a $m!\pi z$ tendremos

$$|(\cos m!\pi z)^{2n}| = (\operatorname{ch}^2 m!\pi y - 1 + \cos^2 m!\pi x)^n.$$

Como para todo $y \neq 0$ existe un m_0 tal que $\operatorname{ch}^2 m!\pi y > 2$, para todo $m > m_0$ será

$$|\cos m!\pi z| > 1$$

y por tanto, si $m > m_0$

$$\lim_{n \to \infty} |(\cos m!\pi z)^{2n}| = +\infty,$$

luego

$$|\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} (\cos m!\pi z)^{2n}| = +\infty$$

o sea, que si $y \neq 0$, es decir, si z no es real, obtenemos el punto del infinito del plano complejo. Si $y = 0$, se obtiene la función de Dirichlet en el campo real.

Manuel Balanzat

TEMAS PROPUESTOS

39. — Determinar los órdenes de multiplicidad de los diversos puntos de la curva de Peano.

40. — Desarrollar en serie de potencias de x la función:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x \,.\, \operatorname{sen} \alpha}{1 + x \,.\, \cos \alpha}$$

y generalizar el método.

41. — Resolver la ecuación funcional:

$$\frac{f(x^m)}{f(x)} = m \,.\, x^{m-1}.$$