CUESTIONES DIDACTICAS Y METODOLOGICAS

SOBRE UN TEOREMA DE MÁXIMO Y MÍNIMO

Es conocida la dificultad con que suele tropezarse para demostrar rigurosamente el útil teorema de que un producto de factores reales de suma constante es máximo cuando todos los factores son iguales, si se quiere prescindir de los teoremas de existencia de máximos y mínimos de la Teoría de funciones reales de varias variables, aún no estudiadas en los cursos elementales.

Vamos aquí a recordar el elegante método seguido en esta cuestión por Bartrina y Capella, antiguo profesor del Instituto de 2ª enseñanza de Barcelona y contenido en su excelente ''Aritmética universal'', dando también una interesante aplicación del teorema para la introducción del número e.

El teorema mencionado es cierto para dos factores, pues basta considerar el producto

$$(m-x)\,.\,(m+x)=m^2-x^2$$

de suma constante $2m$ y que es máximo cuando $x=0$.

Supuesto el teorema cierto para $n-1$ factores, vamos a demostrarlo para n factores $abc\ldots\, l$ de suma

$$a+b+c+\ldots+l=s$$

y cuya media aritmética es $m=s/n$.

Si no son todos los factores iguales a m, habrá algún $a<m$ y algún otro $b>m$; entonces, siendo p y q números positivos pongamos $a=m-p$, $b=m+q$ y sustituyamos el producto $ab=(m-p).(m+q)$, cuyos factores suman $2m-p+q$, por el de igual suma

$$m\,(m-p+q)=ab+pq>ab\,,$$

es decir, será $\qquad abc\ldots l<m\,(m-p+q)\ldots l,$

en que los n factores de ambos miembros tienen la misma suma s.

Por haber supuesto el teorema cierto para $n-l$ factores, es

$$(m-p+q)\,c\,\ldots\,l\leqq m^{n-1}$$

por lo que podemos escribir para el producto de los n factores *desiguales* dados:

$$abc\ldots l<m^n$$

como queríamos demostrar.

La aplicación de este teorema a demostrar la monotonía del par de sucesiones convergentes por las que puede introducirse el número e:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

es inmediata y sencillísima.

La desigualdad que establece es creciente la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ puede escribirse

$$1.\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

en que tenemos $n+1$ factores en cada miembro de suma $n+2$, siendo iguales los del segundo.

La sucesión decreciente establecida por la desigualdad

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

puede escribirse, considerando los valores recíprocos :

$$1.\left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

en que tenemos $n+1$ factores en cada miembro de suma n, siendo también iguales los del segundo.

Recordemos finalmente que ambas sucesiones son "contiguas" porque la diferencia

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \frac{1}{n} \leqq \frac{4}{n}$$

puede hacerse tan pequeña como se quiera.

P. P. C.

QUE DEBE HACERSE PARA EL ADELANTO DE LA MATEMATICA EN LA ARGENTINA (1)

Publicamos a continuación, parcialmente, el *Comentario de los informes y resumen general*, redactado por el Doctor JUAN T. LEWIS, a raíz de las respuestas recibidas en la encuesta promovida por la Asociación Argentina para el progreso de las ciencias.

Al final hemos agregado el informe del profesor GEORGE D. BIRKHOFF, de la Universidad de Harward, matemático de renombre mundial que hace poco nos visitara.

Preguntar a un hombre de ciencia cuál es la importancia de la ciencia que él cultiva, sería una ingenuidad tan grande como la de inquirir de un enamorado la belleza de la amada. La matemática con ese "algo de semijuego y de semirreligiosidad" al decir de Spranger, recordado por Babini, ejerce esta atracción sobre sus cultores con singular poderío. De estos informes sobre "lo que debe hacerse para el adelanto de la matemática en la Argentina" se desprende la devoción que por ella tienen los matemáticos. Y es bueno haberles hecho esta pregunta, pues nadie mejor que quienes están imbuídos de un espíritu tan fervoroso para hallar los medios de difundir el amor a esta ciencia, de hacerla resplandecer con mayor brillo y de convertirla en una fuente más rica de nuevas verdades.

La matemática es en primer término un precioso instrumento, auxiliar indispensable en el estudio de los fenómenos de la naturaleza y de uso tan

---

(1) Ver este mismo volumen, p. 143.