LEMA DE PINCHERLE Y LEMA DE BOREL

por JULIO REY PASTOR

1. Sabida es la discrepancia de criterio entre los autores al denominar la sencilla propiedad dada por Borel en 1894 en el caso más simple, y completada en 1903 por el mismo, que permite sustituir por una familia finita los infinitos entornos arbitrariamente dados de los puntos de un conjunto completo o cerrado en el espacio E_n.

Menos conocido es el teorema de tipo análogo dado por Pincherle mucho antes, pues data de 1881 (*), reproducido en su obra sobre funciones analíticas (p. 23), que suele considerarse equivalente al de Borel (**), y que dice así:

Dado un dominio D supongamos que cada punto x esté cubierto por un círculo C tal que todos los puntos de éste tengan una cierta propiedad Q_x relativa a x. Evidentemente, existe un máximo círculo C_x de centro x e interior a C, cuyos puntos tienen la propiedad Q_x. Consideremos, pues, cada punto x de D con su correspondiente entorno circular C_x de centro x y sean r_x sus radios. El lema de Pincherle dice: *el extremo inferior de los números r_x no es nulo*. Por tanto, son todos ellos superiores a un número positivo r. (*Funz. anal.* pág. 23).

2. Antes de seguir adelante salta a la vista que sin algunas aclaraciones y restricciones sería inexacto enunciado tan amplio. Basta suponer, por ejemplo, este caso sencillo: Tener un punto z la propiedad Q_x respecto del punto x significa cumplir la condición:

$$|z-x|<|x| \text{ si es } x \neq 0; \text{ o bien, si } x=0, \text{ significa: } |z|<1.$$

(*) *Sopra alcuni sviluppi in serie* - Mem. Accad. Bologna IV. 3 (1881) nota de pág. 154 (colección inasequible).

(**) Así por ej. dice TONELLI en su *Calcolo delle variazioni* I, pág. 111. ''Este teoerma —el de BOREL— fué dado bajo otra forma por S. PINCHERLE''.

SEVERI en sus *Lezioni di Analisi* I dice: ''El teorema fué encontrado substancialmente bajo forma bien distinta por PINCHERLE (1881)''.

Todos los puntos z que tienen tal propiedad forman, pues, el círculo de centro x cuyo radio es $r_x = |x|$ si es $x \neq 0$ y el círculo de radio 1 si es $x = 0$, luego el extremo inferior de r_x, en contra de lo afirmado en el lema, es 0.

Si el dominio D es, por ejemplo, el círculo de centro O, y radio $1/2$, es claro que basta el solo entorno C_0 de O para cubrir D, pero esto no autoriza a sustituir con C_0 a los demás entornos, pues los puntos de este círculo C_0 tienen la propiedad Q_0, pero no la Q_x en cuanto se tomen exteriores a C_x.

Aquí reside el malentendido de la demostración dada en «Funzioni analitiche», pág. 23, que se reduce a esto: si hubiese radios infinitamente pequeños, los centros tendrían un punto de acumulación el cual estaría cubierto por un cierto entorno C_0 (por pertenecer al conjunto) y dentro de ese entorno quedarían los círculos desde uno en adelante, en contradicción con la supuesta ampliación de los mismos.

Salta a la vista que tal ampliación del entorno de cada punto x no habría sido legítima, con puntos del círculo C_0, pues éstos tienen la propiedad Q_0, pero no tendrán en general la Q_x; y la demostración queda invalidada.

3. La idea del eminente analista italiano fué la de generalizar el razonamiento usado por Heine para demostrar la continuidad uniforme de una función continua en todo intervalo completo; en este caso la propiedad Q_x del punto z (según la terminología de Pincherle) sería ésta $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$ y si el círculo C_x está contenido en el círculo C_0, se verificará

$$|f(z) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ luego } |f(z) - f(x)| < 2\varepsilon,$$

siendo inoperante este coeficiente 2, puesto que ε puede tomarse arbitrariamente pequeño. Es, por tanto, legítimo decir *en este caso* que la propiedad Q_0 lleva consigo la propiedad Q_x, aunque con un coeficiente 2, no esencial, como sabemos. Esta observación tiene carácter general: y resulta: el lema de Pincherle conserva su validez si la propiedad expresada por el símbolo $z = Q(x)$ verifica esta condición triangular:

$$\text{Si } z = Q(x_0) \text{ y } x = Q(x_0) \text{ es } z = Q(x).$$

Es fácil ver que esta propiedad triangular lleva consigo la continuidad de r_x(*); pues si el punto x se mueve un segmento d hasta el x', se tiene:

$$r_{x'} \geqq r_x - d \qquad r_x \geqq r_{x'} - d \qquad \text{de donde} \qquad |r_{x'} - r_x| \leqq d$$

y por el teorema de Bolzano Weierstrass, tiene un mínimo positivo. En algunos casos puede ser útil este criterio. Tal sucede, por ejemplo, al aplicar su lema como hace en pág. 71 de la obra citada a la convergencia uniforme de una sucesión de funciones en un dominio simplemente conexo; aplicación que se podría justificar demostrando, como es fácil, la continuidad de r_x, propiedad que hace legítima la aplicación del lema, como acabamos de probar; pero será más sencillo adoptar el lema modificado, como luego veremos.

4. Ejemplo instructivo donde se ven las condiciones de aplicación del lema de Pincherle es la demostración en que modifica la dada por Goursat del teorema de Cauchy sobre las integrales complejas sin exigir la continuidad de $f'(z)$. En este caso, la propiedad Q_x del punto z es está:

$$\left| \frac{f(z)-f(x)}{z-x} - f'(x) \right| < \varepsilon \tag{1}$$

que define un cierto círculo de centro x y radio r_x dentro del cual se verifica. Aunque este círculo sea interior a otro mayor C_0 de centro x_0, no puede ampliarse; pues aunque los nuevos puntos z interiores al círculo C_0 tienen la propiedad Q_{x0}, no hay razón para que también tengan la Q_x. Cabe, pues, a priori, que dentro del círculo C_0 haya círculos c_x de radios indefinidamente pequeños. Esta posibilidad queda excluída si se supone la continuidad de $f'(z)$, que lleva consigo la continuidad de r_x; pero

(*) Es precisamente este método el seguido por LÜROTH (1873), y otros para la demostración del teorema de HEINE. Se demuestra fácilmente que el máximo círculo tal que $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$, tiene radio que es función continua de x; por tanto, tiene un mínimo positivo por el teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS y el teorema queda demostrado.

Fué probablemente éste el punto de partida de PINCHERLE para su generalización.

precisamente el objeto del teorema de Goursat es demostrar esa continuidad. En consecuencia, la demostración dada en «Funzioni analitiche», pág. 95, no es rigurosa, pues en este caso no es aplicable el lema.

Si a pesar de todo se sustituye cada entorno por otro concéntrico mayor, contenido en otro entorno de centro x_0, resultará ciertamente un extremo inferior $r = \inf. r_x > 0$; pero los puntos z quedarán relacionados por (1) con x_0 y no con x, como afirma el lema.

Si se reticula el plano en cuadrados de lado $r = \inf. r_x$, como se hace en el pasaje citado, no resulta, pues, como dice allí: «*dentro de cada cuadrado* q_k *existe un punto* x *para el cual se verifica* (1) *cualquiera que sea el punto* z *del cuadrado y en particular del contorno de* q_k» sino que resulta esto otro: «los puntos z de cada cuadrado satisfacen a (1) respecto de un cierto punto x que puede pertenecer a otro cuadrado»; y por tanto, no pudiendo acotar superiormente las distancias $|z - x|$ queda invalidada la demostración.

5. Veamos ahora el diverso alcance del lema de Pincherle, convenientemente depurado, y el de Borel, aunque en muchos casos prestan análogo servicio. Expresando geométricamente la idea esencial del primero, renunciando al carácter funcional que le dió su autor y en forma algo más general, se reduciría a esto la parte admisible del mismo:

Lema modificado de Pincherle.

Si cada punto de un conjunto completo tiene al menos un entorno de forma cualquiera y es r_x *el radio del máximo círculo (esfera en* E_n*) de centro* x *contenido en alguno de los entornos (o sea la mayor de las distancias de* x *a los contornos de los entornos que lo contienen) es* $\inf. r_x > 0$.

No demuestra, pues, como el lema de Borel, la existencia de una familia *finita* de entornos, ni tampoco de ésta se deduce inmediatamente el lema de Pincherle; pero uno y otro caracterizan los conjuntos completos y en cada caso será preferible el uno al otro. Así, por ej., el teorema de Heine en el espacio E_n $(n > 1)$ que con el lema de Borel exige algunas consideraciones topológicas, es trivial aplicación del lema de Pincherle modificado como arriba hemos propuesto, pues cada punto x

es centro de una esfera máxima tal que $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$ para cada punto z interior a ella; y en virtud del lema todos sus radios son superiores a un número $r > 0$, luego en todo par de puntos que disten menos de r el incremento es menor que ε, pues cada uno está dentro de la esfera de radio r con centro en el otro.

Nótese que esta demostración vale para cualquier espacio abstracto métrico, mientras que el lema de Borel es ineficaz.

Hay otro tipo de problemas en que también ofrece ventaja el lema de Pincherle, modificado como hemos dicho, sobre el de Borel que es preferido por todos los autores. Si cada punto x de un conjunto completo tiene un entorno con una propiedad independiente del punto y se sustituyen todos estos entornos por las esferas de radio $r = \text{inf. } r_x$, resulta un recinto de contorno paralelo al de C, que en muchos problemas puede ofrecer ventajas sobre el recinto de forma indeterminada y no susceptible de construcción, que existe, en virtud del lema de Borel.

En cambio, para demostrar, como es preciso en la teoría de la medida, que la suma de longitudes de infinitos segmentos que cubren $[a, b]$ es mayor que $b - a$, conviene el lema de Borel y no el de Pincherle.

6. Establecido el diverso alcance de las dos proposiciones, no podemos adoptar la denominación de «teorema de Pincherle-Borel», propuesta por Tonelli. Por otra parte, la omisión lamentable de la fecunda idea de Pincherle, en el magnífico artículo sobre la teoría de conjuntos de la inciclopedia Teubner (IIC9a), es un reflejo del olvido en que ha caído esta proposición, que esperamos habrá de ser muy útil, si se restringe su alcance como hemos hecho.

La asociación del nombre de Heine al de Borel para designar el lema de la selección de entornos fué debida a Schoenflies, que después se rectificó; pero no obstante ha sido inertemente seguida por muchos autores. Más bien habría que asociar el nombre de Heine con el de Pincherle en el lema que éste enunció, inspirándose en la demostración de aquél, publicada en 1872. Son igualmente objetables algunas denominaciones del ya citado teorema de la continuidad uniforme, que algunos atribuyen a Cantor(*), colega de Heine en Halle; en todo caso, ya en 1854 explicaba ese teorema Lejeune-Dirichlet en sus lecciones de Berlín, de las cuales no tuvo quizás conocimiento Heine; en su memoria se propone solamente, según dice, exponer los trabajos de Weierstrass y Cantor; pero es probable que esa propiedad, a la cual llegó después de algunos titubeos, sea propia. Sea como quiera, él fué el primero en publicarla en 1870 y demostrarla en 1872; y sin datos seguros en contra no es justo regateársela, como no sea para asignársela a Dirichlet.

Tampoco debe disminuirse el mérito de Borel por haber descubierto una verdad fecunda, aunque restringida a conjuntos numerables de entornos; observar, como hicieron Young (1902) y Lebesgue (1904) que vale para familias no numerables (**) y extenderla a conjuntos completos en espacios cada vez más amplios, como hicieron el citado Young (1902), Borel (1903), Riesz (1905), etc., era ya tarea sencilla. La denominación de «teorema de Borel-Lebesgue», adoptada por Montel y seguida por otros, no parece, pues, justificada en los cursos de Análisis. Solamente en la teoría general de espacios abstractos se impone la distinción entre la propiedad (B) y la $(B-L)$, aunque ésta segunda denominación implica una de las frecuentes injusticias a que estamos acostumbrados.

Volviendo al tema de esta modesta nota, su título revela claramente nuestro criterio sobre la denominación más adecuada de ambos lemas, basada en el estudio directo de los textos originales.

Buenos Aires, diciembre 1942.

Nota. — Debemos a la gentileza de nuestro buen amigo el Dr. Sparn, secretario de la Academia de Ciencias de Córdoba, la copia del enunciado primitivo dado por Pincherle en su memoria ya citada, existente en aquella valiosa biblioteca, y llega a tiempo para agregarla a las pruebas paginadas.

(*) Así p. ej. Dini, Vallée-Poussin, etc. Algunas afirmaciones hechas en la edición alemana de Dini-Lüroth, pág. 63 no son exactas.

(**) Debe tenerse en cuenta que la restricción de la numerabilidad, impuesta por Borel, es probablemente debida a su posición filosófica bien conocida y al deseo de dar una demostración constructiva (como lo es, hasta cierto punto, la dada en su tesis de 1894) más bien que a inadvertencia sobre el alcance del teorema, que Young y Lebesgue pudieron señalar más libremente por no estar atados a la misma amurallada posición principista.

"Se ad ogni punto x di un campo connesso C o del contorno corrisponde un valore ed uno solo della quantitá X, e ad ogni x corrisponde un tale intorno che i valori di $|X|$ corrispondenti ai punti dell'intorno abbiano un limite inferiore diverso da zero, si potrá assegnare un numero positivo M e diverso da zero, tale che per tutto il campo C sia $|X| > M$."

El lector observará inmediatamente que este enunciado restringido es correcto y se deduce inmediatamente del lema de Borel en cualquier espacio métrico, lo que no acontece con el lema modificado que hemos propuesto. Quede a cargo del lector comprobar la ventaja que ofrece éste al aplicarlo a las diversas cuestiones en que suele hacerse uso del lema de Borel.

20 marzo 1943.

CUESTIONES ELEMENTALES

17. Calcular el determinante de Vandermonde sustituyendo las potencias por factoriales de diferencia d, con igual base y grado que los de las potencias.

18. — Dados dos planos y un punto P no situado en ellos, se consideran todas las superficies esféricas que pasan por este punto P y son tangentes a los dos planos. Se pide el lugar geométrico de los puntos de contacto y el estudio del cono de vértice P que forman los radios de dichas esferas.

(Este problema fué propuesto en 1877 en el último curso de bachillerato francés y el alumno Enrique Bergson, que entonces contaba 17 años, dió una solución elegante).

19. — Resolver las ecuaciones siguientes:

$$x\,! + 1 = (x+1)^2 \qquad\qquad x^x - x = 4\,x\,!.$$

20. Calcular las integrales siguientes:

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax.\ \operatorname{sen} bx.\ \operatorname{sen} cx \frac{dx}{x}$$

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax.\ \operatorname{sen} bx.\ \cos cx.\ \frac{dx}{x}$$

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax.\ \cos bx.\ \cos cx.\ \frac{dx}{x}$$

siendo a, b, c números reales cualesquiera. Discusión.