TEMA RESUELTO

38. *Demostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\left(1+n+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3!}+\ldots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right)=\frac{1}{2}.$$

S.

Solución. Integrando reiteradamente por partes se obtiene

$$(1)\qquad I_n=\int_n^{\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt=e^{-n}\left(1+n+\frac{n^2}{2}+\cdots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n^n}{n!}\right).$$

Como para n tendiendo a infinito los términos de la forma $e^{-n}\dfrac{n^m}{m!}$ tienen por límite cero, para resolver el problema basta demostrar que tiende a $^1/_2$ sea la expresión (1) o cualquier otra que difiera de ella en un número finito de los términos mencionados.

Con el cambio de variable $t=\sqrt{n}z+n$, la (1) se convierte en

$$(2)\qquad I_n=\frac{e^{-n}\,n^n\sqrt{n}}{n!}\int_0^{\infty} e^{-z\sqrt{n}}\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^n dz$$

y como por la fórmula de *Stirling* se tiene que

$$(3)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n}\,n^n\sqrt{n}}{n!}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

bastará demostrar que

$$(4)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-z\sqrt{n}+n\log\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)}\,dz=\frac{1}{2}.$$

Para ello escribiremos el exponente de la e con los tres primeros términos del desarrollo en serie de Mac-Laurin y su resto, obteniendo

$$(5) \qquad \varphi(z)=e^{-z\sqrt{n}+n\log\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)}=e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{n z^3}{3(\sqrt{n}+\eta)^3}} \quad (0<\eta<z),$$

y se tiene entonces, evidentemente

$$(6) \qquad e^{-\frac{z^2}{2}}<\varphi(z)<e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3\sqrt{n}}}.$$

Se observa también que la expresión

$$\varphi(z)\,e^z=e^{-z(\sqrt{n}-1)+n\log\left(1+\frac{z}{\sqrt{n}}\right)}$$

es monótona decreciente a partir del máximo en $z=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}$; en particular si $n\geqq 4$, para $z\geqq 2$; por tanto, siendo $M>2$ se tiene

$$(7) \qquad \int_M^\infty \varphi(z)\,dz=\int_M^\infty \varphi(z)\,e^z e^{-z}\,dz<\varphi(M)\,e^M\int_M^\infty e^{-z}\,dz=\varphi(M).$$

En base a la (6) se puede escribir entonces

$$(8) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_M^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_M^\infty \varphi(z)\,dz<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{M^3}{3\sqrt{n}}}\,e^{-\frac{M^2}{2}}$$

$$(9) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^M e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^M \varphi(z)\,dz<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{M^3}{3\sqrt{n}}}\int_0^M e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

y puesto que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^M e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz=\frac{1}{2},$$

al sumar ordenadamente las desigualdades (8) y (9) resulta

$$(10) \qquad \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \varphi(z)\, dz < e^{\frac{M^3}{3\sqrt{n}}} \left[\frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2} \right].$$

Dado un ε arbitrariamente pequeño, se puede elegir M de modo que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{M^2}{2}} < \varepsilon,$$

y luego elegir n tal que

$$e^{\frac{M^3}{3\sqrt{n}}} < 1 + \varepsilon,$$

y siendo $\varepsilon < 1$, como cota superior en (10) sè tiene

$$\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)(1 + \varepsilon) < \frac{1}{2} + 2\varepsilon.$$

Por tanto, finalmente

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \varphi(z)\, dz < \frac{1}{2} + 2\varepsilon$$

lo cual equivale a la (4) y por tanto queda el problema resuelto.

J. Barral Souto