

TEOREMA DE JORDAN PARA LAS VARIEDADES POLIEDRICAS CERRADAS

por J. REY PASTOR

El interesante artículo del profesor Beppo Levi en las «*Mathematicae Notae*», ha puesto de actualidad el viejo problema de la división del plano por una curva cerrada de Jordan y por ende la generalización de Brouwer y Lebesgue para el espacio E_n , cuyas demostraciones no pueden considerarse como satisfactorias, por presentar puntos oscuros a través de su largo desarrollo. Entendiendo que el principio de economía de pensamiento aconseja preferir aquellas demostraciones de Geometría plana que señalan el camino para extenderlas a los espacios pluridimensionales, expusimos hace años en nuestros cursos una demostración del teorema de Jordan para curvas planas que podría extenderse a E_n . Mucho más sencillo es naturalmente el caso de polígonos planos, para los cuales dimos una breve demostración que sin dificultad se extiende a las variedades poliédricas cerradas de cualquier número de dimensiones; y al informarse de ellas el profesor Levi nos hizo el honor de sugerirnos su publicación.

Existiendo, como es sabido, demostraciones del teorema general relativo a las variedades curvas, que presuponen conocida la demostración para las variedades poliédricas, y no siendo satisfactorias las existentes, será quizás útil acceder a esta exhumación de nuestros viejos apuntes de clase, por si sugieren el camino para abordar el teorema general de Brouwer y Lebesgue.

Quienes crean problema demasiado sencillo el abordado en esta nota y supongan la existencia de alguna satisfactoria solución ya incorporada a los textos, harán bien en estudiar las nada simples ni breves demostraciones de *B. Levi* en *Math. Notae* (1941) o la de *H. Hahn* en *Monatshefte* (1908) relativas al caso del polígono plano, problema que exige ya, como reconoce el propio Hahn, «einen recht langwierigen, recht kunstvollen Beweis^(*). En cuanto al caso tridimensional, la dificul-

(*) *Krise und Neuaufbau in den Exakten Wissenschaften*, Wien 1933. Die *Krise der Anschauung*, pág. 57.

tad sube de punto, como subraya el propio Hahn, quien no alude siquiera al de E^n , naturalmente más complicado, y por ello prefieren los autores citados al pie(*) detenerse en el caso tridimensional. Conviene advertir que la demostración que damos para E^n no presupone la del plano; pero hemos antepuesto ésta por conveniencia didáctica, dado el origen de esta nota.

Poligonales cerradas en E_2

Tracemos por todos los vértices paralelas a una misma dirección, distinta de las de todos los lados, la cual adoptaremos como dirección del eje x ; y sean $y = y_i$ ($y_1 < y_2 < \dots < y_n$) las ecuaciones de estas rectas. Cada lado AB de la poligonal tiene sus extremos en dos de estas rectas, e introduciendo vértices intermedios puede suponerse que cada dos vértices consecutivos de la poligonal están en rectas consecutivas.

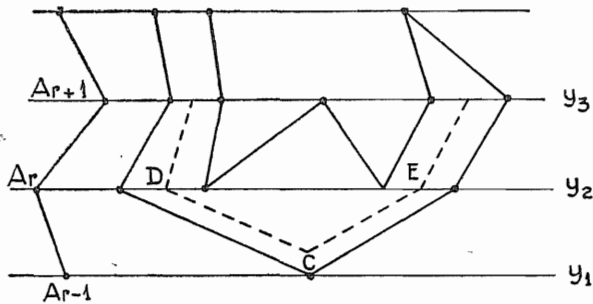


Fig. 1

Los dos lados $A_{r-1}A_r$ y A_rA_{r+1} que concurren en el vértice A_r pueden ocupar una de estas posiciones:

- a) Están separados por la recta en que está A_r , es decir, A_{r-1}, A_{r+1} pertenecen uno a la recta anterior y otro a la posterior.

(*) Una demostración, muy larga y minuciosa para el caso de tres dimensiones, dió LENNES, *Amer. Journ. of Math.*, 33 (1911) pág. 50-55; otra es de VEULEN, *Trans. Amer. Math. Soc.* 14 (1913) p. 65-72. Finalmente. LILLY HAHN en *Monatshefte Math. Phys.* 25 (1914) p. 303-320.

b) A_{r-1} y A_{r+1} están en la recta anterior o ambos en la posterior.

Cada dos rectas consecutivas $y=y_r$, $y=y_{r-1}$, limitan una zona, dividida en trapecios y triángulos por los lados que tienen sus vértices en ellas, más dos semizonas infinitas; los tres tipos pueden incluirse bajo el nombre genérico de *trapecios*.

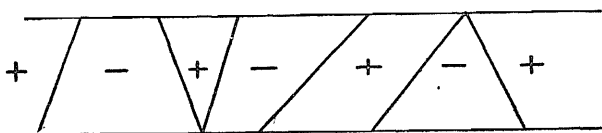


Fig. 2

Como toda poligonal cerrada es cortada en número par de puntos por cada secante que no pase por ningún vértice, resulta *impar* el número de estos trapecios; y si se atribuye signo $+$ a uno de los trapecios infinitos, dando alternativamente los signos $-+$ a los trapecios sucesivos, resultará signo $+$ en el otro trapecio infinito.

Estos signos afectan también a los segmentos de las rectas y_r , pero no a los lados de la poligonal, cada uno de los cuales es común a dos trapecios de signo distinto.

Veamos que a cada segmento de las rectas y_r corresponde el mismo signo, partiendo de la zona $y_{r-1}y_r$ o de la $y_r y_{r+1}$.

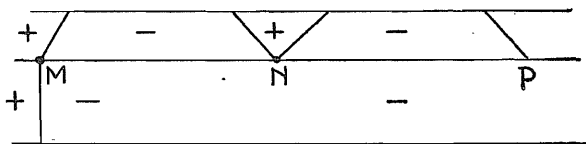


Fig. 3

En los segmentos infinitos este signo es $+$ en ambas; suponiendo a cordes los signos hasta llegar a un vértice M del tipo a) los trapecios siguientes tienen signo opuesto a los precedentes y por tanto iguales entre sí.

Si el vértice es de tipo b) como el N de la figura, en una de las zonas los segmentos MN y NP pertenecen al mismo trapecio, mientras en la otra hay un triángulo intermedio

de vértice N , que produce dos cambios de signo y por tanto el segmento NP tiene en los dos trapecios colindantes el mismo signo que el MN .

Puesto que cada trapecio de una zona es colindante por cada base (una sola en el caso de triángulo) con otro trapecio, la suma de ambos es un recinto.

Prescindiendo de los puntos de la poligonal quedan, pues, los puntos del plano clasificados en dos conjuntos: X^+ suma de los trapecios de signo $+$ (a los que agregamos los puntos exteriores a todas las zonas) y el conjunto X^- , suma de los trapecios de signo $-$. Veamos que ambos son conexos. Esto resulta como consecuencia de tener un solo contorno; pero es preferible no presuponer nada de la teoría de conjuntos, salvo las definiciones primeras para no salir del campo de la geometría elemental.

Dados dos trapecios cualesquiera de signo $-$, sea $A_r A_{r+1}$ un lado de la poligonal perteneciente a uno y $A_{s-1} A_s$ un lado perteneciente al otro. Estos dos lados dividen a la poligonal cerrada en dos poligonales parciales abiertas. Sea una de ellas:

$$P = A_r A_{r+1} A_{r+2} \dots A_{s-1} A_s$$

y por cada vértice de éstos, de clase a), hay un segmento con signo $-$, el cual es por tanto común a dos trapecios contiguos. Si el vértice es de tipo b) y los dos segmentos que parten de él tienen signo $+$, el lado opuesto en el triángulo a que pertenece tiene signo $-$.

El primer caso se presenta en la fig. 3, y el segundo en la fig. 4.

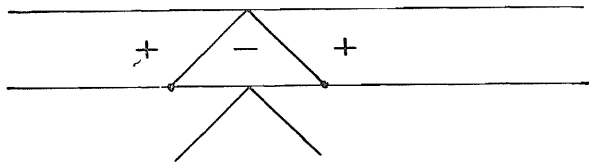


Fig. 4

En ambos casos, la suma de los trapecios contiguos a los lados de dicha poligonal P es, por inducción, un recinto co-

nexo, X^- , al cual pertenecen los dos trapecios arbitrariamente dados.

Igualmente resulta la conexión del conjunto $X^+ (*)$.

Nota: Todavía cabe no utilizar siquiera el concepto de recinto, pues elegido un punto interior a cada trapecio y unido con los puntos medios de sus bases resulta una poligonal perteneciente al conjunto X^- cuyos extremos son dos puntos prefijados de este conjunto.

Solamente al llegar a un triángulo de signo — es preciso modificar levemente la construcción uniendo el punto interior C , con los puntos medios de los segmentos extremos de la base opuesta como se indica en la figura primera.

Hipersuperficies poliedricas cerradas de E_n

Como todo poliedro de cualquier número de dimensiones se puede descomponer en *simples* (**), podemos suponer que la hipersuperficie poliédrica S^{n-1} tiene caras simples, esto es poliedros P^{n-1} de n vértices. Así por ejemplo las caras de las superficies poliédricas de E^3 serán triángulos.

Elijamos un eje x no paralelo a ninguna de estas caras y proyectemos S^{n-1} en esa dirección sobre el E^{n-1} perpendicular a X_n . La proyección de cada $(n-1)$ -cara es otro $(n-1)$ -simple, pero dentro de él o en su contorno puede haber proyecciones A'_r de otros vértices A_r no pertenecientes a esa $(n-1)$ -cara y en ambos casos adoptamos como nuevos vértices de P los puntos de la $(n-1)$ -cara que tiene esas mismas proyecciones A'_r .

Así logramos que las proyecciones de las $(n-1)$ -caras sean $(n-1)$ -simples tales que dos cualesquiera carecen de puntos comunes; o sólo tienen comunes varios vértices y el simple de contorno que éstos determinan; o bien coinciden.

Consideremos uno de los espacios prismáticos Q^n proyectante de una $(n-1)$ -cara c_1 que también lo es de otras c_2, c_3, \dots, c_{2p} ($p \geq 1$), puesto que siendo cerrada la hipersuperficie P_{n-1} , cada recta la corte en un número par de puntos.

(*) Quizás pueda parecer preferible otro método que después seguimos en el caso E_n ; en la duda exponemos ambos.

(**) Recordemos que un *poliedro simple* o brevemente, un *simple* en E_n es el poliedro que tiene $n+1$ vértices linealmente independientes. Sus $(n+1)$ caras son los simples que determinan los diversos grupos de n vértices.

Dos de estas caras c_r carecen de puntos comunes o bien tienen un vértice o dos y el segmento que determinan, o 3 y el triángulo que forman, etc.; y a lo más tienen común un $(n-2)$ -simple, siendo el vértice restante distinto en ambas. En todo caso carecen de puntos comunes interiores y si las ecuaciones de los $(n-1)$ -planos que los contienen son: $x_n = A$; $x_n = B$ (*) la inequación $A \leq x_n \leq B$ (o bien \geq) representa un recinto parcial del espacio prismático Q^n .

Este queda así descompuesto por los simples C_1, C_2, \dots, C_{2p} en $(2p-1)$ prismas finitos, más dos prismas infinitos.

Asignaremos a estos prismas infinitos signo $+$ y a los prismas finitos intermedios signos alternados, $-, +, -, +, \dots, -$.

Las caras laterales de este n -espacio prismático Q^n son a su vez $(n-1)$ -espacios prismáticos Q^{n-1} que están divididos por los $(n-2)$ simples de contorno de las caras C_r en $(n-1)$ prismas de los cuales son finitos los $(2p-1)$ intermedios e infinitos los dos extremos.

Consideremos dos n -espacios prismáticos Q^n, Q^m colindantes con un mismo $(n-1)$ -espacio prismático Q^{n-1} .

Los dos n -prismas infinitos Q^n, Q^m correspondientes al sentido $X_n \rightarrow -\infty$ tienen signo $+$ e inducen por tanto signo $+$ en el $(n-1)$ -prisma infinito común Q^{n-1} , pero es preciso distinguir dos casos al llegar al primer simple C^{n-2} sección de Q^{n-1} , según las posiciones de los dos simples $C^{n-1}; C'^{n-1}$ que forman las caras colindantes con él.

I) El n -simo vértice de C^{n-1} y el n -simo de C'^{n-1} no pertenecientes a C_1^{n-2} están en distintas rectas proyectantes, es decir, los simples C^{n-1}, C'^{n-1} están en distinto espacio prismático Q^n, Q^m .

II) Dichos n -simos vértices están en el mismo rayo proyectante, o sea: los simples C^{n-1}, C'^{n-1} son secciones del mismo espacio prismático Q^n .

En el caso I, los segundos prismas Q_2, Q_2^m colindantes por $C_1^{n-1}, C_1'^{n-1}$ con los Q_1^n, Q_1^m que tienen signo $+$, tienen ambos signos $-$, es decir, inducen el mismo signo en el segundo $(n-2)$ -prisma Q_2^{n-2} que es común a ambos $(n-1)$ -prismas Q_2^{n-1}, Q_2^{m-1} .

(*) A y B son funciones lineales de x_1, x_2, \dots, x_{n-1} .

En el caso II el segundo n -prisma Q_2 tiene bases C_1^{n-1} , $C_1'^{n-1}$ que por estar fuera del espacio prismático Q^n no interrumpen la continuidad del primer prisma de éste, el cual tiene signo $+$ y por tanto induce en Q_2^{n-1} signo $+$; mientras que en Q^n el prisma Q_2^n limitado por C_1^{n-1} ; $C_1'^{n-1}$ tiene signo $-$ que no influye en los prismas de Q^{n-1} , por no tener en él cara de dimensión $n-1$ y es el siguiente Q_3^n con signo $+$ el que induce signo $+$ en Q_2^{n-1} , lo mismo que partiendo de Q^n .

Como el razonamiento es recurrente resulta que si hay coherencia de signos inducidos hasta Q_r^{n-1} , la hay también en el siguiente Q_{r+1}^{n-1} y por tanto en todos.

Veamos ahora que los prismas finitos de signo $-$ forman un recinto si se incluyen los puntos de los prismas Q_r^{n-1} comunes, pero se excluyen los puntos de las caras C_r^{n-1} . Tal conjunto está formado desde luego, por puntos interiores y falta probar su conexión.

Observamos ante todo que cada prisma tiene como bases dos caras C_r^{n-1} , C_s^{n-1} de S^{n-1} y recíprocamente cada cara es base de un solo prisma con signo $-$.

Dos caras contiguas con una C_r^{n-2} común, determinan un solo prisma (caso II) o bien dos prismas con una cara C_r^{n-1} (caso I).

En ambos casos, la suma de prismas cuyas bases son caras contiguas de S^{n-1} forman conjunto conexo.

Como todo prisma tiene una cara de S^{n-1} y dos caras cualesquiera de S^{n-1} pueden considerarse como primera y última de una cadena de caras contiguas, cada una con la siguiente, resulta que la suma de todos los prismas provistos de signo $-$ es un conjunto conexo que se llama *interior a S^{n-1}* . Y análogamente la suma de los que llevan signo $+$ más el conjunto complementario del espacio prismático ΣQ_r^n forma un conjunto conexo que se llama *exterior a S^{n-1}* .