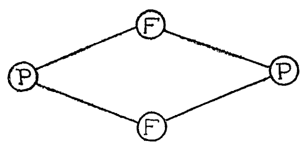
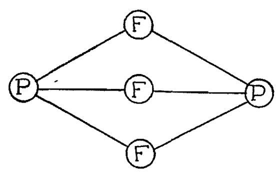
13. *Es bien conocido el problema llamado de los tres pueblos y las tres fuentes: Dados tres puntos A, B, C y otros tres A', B', C', del mismo plano, es imposible trazar desde cada uno de los primeros a cada uno de los segundos un arco tal que los nueve arcos no se corten en ningún punto distinto de los seis dados. Se propone demostrar que en la superficie tórica y también en el plano proyectivo y en el anillo de Moebius, el problema tiene siempre solución. ¿Qué sucede si en vez de la segunda terna se da una cuaterna A', B', C', D'?*

Solución. — Es sencilla la demostración de que el ya clásico problema es imposible en el campo euclídeo; en efecto, liguemos dos pueblos y dos fuentes:

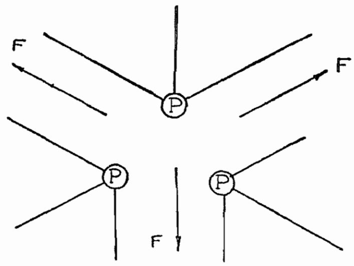


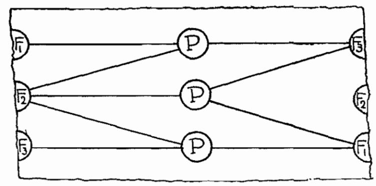


con esta operación ha quedado dividido el plano en dos zonas: 1 y 2. La situación del pueblo y fuente restantes ofrece dos posibilidades: colocar un pueblo (fuente) en 1 y la fuente (pueblo) en 2, en cuyo caso es posible unirlos a los ya existentes, mas no entre sí; y disponerlos, pueblo y fuente, en una misma región (1 ó 2 indistintamente). Para ello unamos primero la fuente a los dos pueblos, el plano ha quedado subdividido en tres regiones, cada una de las cuales tiene comunicación sólo con dos fuentes, por lo que en cualquiera de los tres recintos que pongamos el pueblo restante siempre quedará en la imposibilidad de unirse con una fuente.

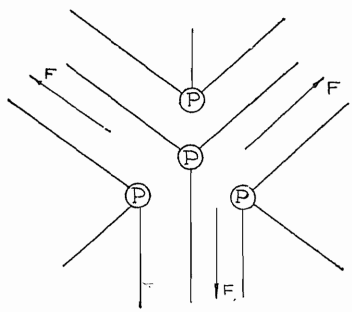
Siendo la superficie esférica bilátera, al igual que el plano euclídeo, el problema planteado sobre ella carece igualmente de solución.

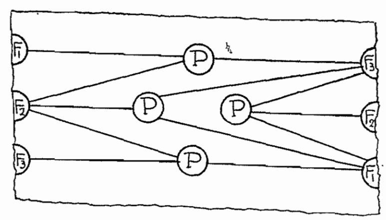
En cambio, en las superficies uniláteras, como el plano proyectivo, o el anillo de Moebius es posible cumplir con las condiciones del enunciado, como se ve en las siguientes figuras.





El mismo enunciado admite solución en las superficies uniláteras nombradas aún para cuatro pueblos (fuentes) y tres fuentes (pueblos).





Para cuatro pueblos y cuatro fuentes deja de ser posible el problema tanto en el campo proyectivo como en el anillo de Moebius, pero la demostración de este hecho (así como también para el caso cinco y tres) dará tema, junto a otras cuestiones, para un futuro artículo.

Juan C. Grimberg