REPRESENTACIONES DE UN RING RELACIONADO CON EL SPIN 1

por GUILLERMO KNIE

La emanación de Dirac describe partículas de spin 1/2, 0 y 1 (1).

En el primer caso los 4 símbolos α que intervienen en ella, son anticonmutativos. En el segundo y tercer caso ellos determinan un álgebra más complicada. Cambiando su denominación en β, las β satisfacen la regla de conmutación:

$$(1) \qquad \beta_l \beta_m \beta_n + \beta_n \beta_m \beta_l = \beta_l \delta_{nm} + \beta_n \delta_{lm}.$$

El número máximo de símbolos que satisfacen entre ellos esta regla, es 5(2) (según *Schrödinger*). Ellos determinan lo que en álgebra se llama, un ring de 136 miembros (3). Si se limita el número de elementos básicos a 4, el número de miembros linealmente independientes se reduce a 126. Partiendo de tres símbolos básicos especiales que son los tres componentes del spin 1, se obtiene un subring de 10 miembros (4). Mi intención es demostrar que eligiendo tres β cualesquiera que no sean componentes del spin 1, es decir, que no satisfagan las relaciones

$$(2) \qquad \beta_1 \beta_2 - \beta_2 \beta_3 = i \beta_3 \quad \text{y cíclicamente}$$

se obtiene un subring más general que el subring del spin 1, de manera que tenemos ahora el sistema

$$136, \qquad 126, \qquad 35, \qquad 10.$$

Cada uno de estos 4 miembros significa el número de miembros de un ring que es subring del anterior. El número y el grado de las representaciones que ellos admiten es diferente

(1) Prescindiendo de un factor i en el término de masa.

(2) GUILLERMO KNIE, Monografías físico-matemáticas Nº 1: *Algebra del spin.*

(3) Compare también: SAKATA y TAKETANI, *Proc. Math. Phys. Soc. Jap.* 22, 1940.

(4) GUILLERMO KNIE, *Revista Electrotécnica,* Noviembre de 1943.

y depende, pues, del número de elementos básicos. En el último caso había 2 representaciones irreducibles del grado $r=1$ y $r=3$ resp. Este caso se obtendrá ahora por especialización del anterior.

Partimos, pues, de

$$\beta_1, \ \beta_2, \ \beta_3$$

que satisfacen sólamente las relaciones (1). Para construir todos los productos linealmente independientes, es conveniente, considerar también los cuadrados $\beta_1^2 \ \beta_2^2 \ \beta_3^2$, porque ellos tienen propiedades de conmutatividad muy sencillos.

De (1) obtenemos por especialización de índices:

$$\beta_1 \beta_2^2 + \beta_2^2 \beta_1 = \beta_1$$

multiplicando a la derecha resp. a la izquierda por β_1 e igualando, se obtiene:

$$\beta_1^2 \beta_2^2 = \beta_2^2 \beta_1^2 \tag{3}$$

Los β_k^2 son, pues, conmutativos (e idempotentes).

Además conmutan con el producto de dos β de diferentes índices. Por ej.: De (1) obtenemos:

$$\beta_1 \ \beta_2 \beta_3 + \beta_3 \beta_2 \beta_1 = 0 \qquad \text{o}$$

$$\beta_1^2 \beta_2 \beta_3 + \beta_1 \beta_3 \ \beta_2 \beta_1 = 0.$$

Como

$$\beta_1 \ \beta_3 \beta_2 + \beta_2 \beta_3 \beta_1 = 0$$

resulta por substitución:

$$\beta_1^2 \beta_2 \beta_3 = \beta_2 \beta_3 \beta_1^2 \tag{4}$$

Más favorable todavía que los β_k^2 resulta el uso de la combinación $\eta_k = 2\beta_k^2 - 1$.

Pues los η_k además de conservar las dos propiedades mencionadas de los β_k^2 poseen propiedades de conmutación sencillas con los β_k. Tenemos

$$\beta_l \eta_k = \beta_l (2\beta_k^2 - 1)$$

$$\eta_k \beta_l = (2\beta_k^2 - 1)\beta_l .$$

Pero sumando, resulta

(5) $$\beta_l \eta_k + \eta_k \beta_l = 0 \qquad \text{por } (1).$$

Además tenemos

(6) $$\left\{\begin{array}{lll} \beta_l \eta_l = \eta_l \beta_l = \beta_l & a) & \text{y} \\ \eta_l^2 = 1 & b) & \text{por } (1) \\ \eta_l \eta_m = \eta_l \eta_m & c) & \\ \eta_l \beta_m \beta_n = \beta_m \beta_n \eta_l & d) & \text{por } (3) \text{ y } (4). \end{array}\right.$$

Las propiedades enumeradas de los η_l hacen suponer que estos símbolos se pueden utilizar con ventaja para la obtención de todos los elementos del ring y la construcción del centro, es decir, de los elementos conmutables con todos los elementos del ring. Formamos, pues, productos de los β_k entre ellos, de los η_k entre ellos y productos de los β_k con los η_k. El número de productos linealmente independientes es $12+7+15$. Si agregamos $\eta_k^2=1$ obtenemos 35 términos. El término $\eta_k \eta_l \eta_m$ es del más alto grado en β_k (grado 6). Todos los demás productos se dejan reducir a combinaciones lineales de estos 35 términos. Procedemos ahora a la construcción del centro. Los términos conmutables con todos los demás — si prescindimos de la unidad — han de ser con toda seguridad las combinaciones simétricas de los η_k o están estrechamente relacionados con ellas. Basta considerar:

(7) $$\begin{aligned} S_1 &= \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \\ S_2 &= \eta_1 \eta_2 + \eta_2 \eta_3 + \eta_3 \eta_1 \\ S_3 &= \eta_1 \eta_2 \eta_3 . \end{aligned}$$

Encontramos fácilmente:

$$\beta_k S_1 \neq S_1 \beta_k$$

$$\beta_k S_2 \neq S_2 \beta_k$$

$$\beta_k S_3 \neq S_3 \beta_k$$

Luego S_3 pertenece al centro. Una segunda posibilidad es una combinación lineal de S_1 y S_2:

$$S_1 + c S_2.$$

Basta probar con β_1 debido a la simetría de los S. Tenemos

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) &= (\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)\, \beta_1 = (\eta_1 - \eta_1 \eta_2 - \eta_1 \eta_3)\, \beta_1 \\ \beta_1 (\eta_1 \eta_2 + \eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_3) &= (-\eta_1 \eta_2 - \eta_1 \eta_3 + \eta_2 \eta_3)\, \beta_1 = \\ &= (-\eta_2 - \eta_3 + \eta_2 \eta_3)\, \beta_1 \end{aligned}\right\} \text{por (6)}.$$

Restando se obtiene: $\beta_1(S_1 - S_2) = (S_1 - S_2)\beta_1$.

Luego $S_1 - S_2$ pertenece al centro. Una tercera posibilidad no existe. El centro está formado, pues, de [5]

$$S_3,\ S_1 - S_2 \text{ y de la unidad.}$$

Luego hay tres representaciones. Si sus dimensiones son r_1, r_2 y r_3, debe ser

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 35 \tag{8}$$

según un teorema bien conocido. De esto resulta de manera unívoca:

$$r_1 = 5 \qquad r_2 = 3 \qquad r_3 = 1.$$

Existe, pues, una representación en 5 dimensiones, una en tres y una representación trivial unidimensional. En cuanto a la forma de estas representaciones [6], prescindiendo de un factor i están relacionadas con los elementos básicos de las rotaciones infinitesimales en tres resp. 5 dimensiones.

En tres dimensiones una rotación infinitesimal está dada por

---

(5) Si 4 o 5 β_k sirven de elementos básicos para formar el ring, $S_1 - S_3$ pertenecen también al centro, extendiéndose en este caso la numeración, hasta la cifra 4 resp. 5. Lo mismo se puede decir de S_3 para 5 β_k. Porque $\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5$ conmuta con β_k. Pero para 4 de las β_k hay una diferencia. Como $\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4$ anticonmuta con β_k debe ser completada por otra combinación. Se ve fácilmente que $\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 - \eta_1 \eta_2 \eta_3 - \eta_2 \eta_3 \eta_4 - \eta_3 \eta_4 \eta_1 - \eta_4 \eta_1 \eta_2 = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 (\mathrm{I} - \sum_\mu \eta_\mu)$ satisface la exigencia de conmutabilidad. Al correr β_k de la izquierda a la derecha, dos expresiones son intercambiadas, las demás no varían

(6) Vea también G. Knie, *Nuevas teorías físicas* (en prensa).

$$\begin{aligned} dx_1 &= bx_3 - cx_2 \\ dx_2 &= cx_1 - ax_3 \\ dx_3 &= ax_2 - tx_1 \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Se obtienen tres elementos básicos de este grupo triparamétrico, eligiendo

$$\begin{aligned} a=1, \quad b=0, \quad c=0 \\ a=0, \quad b=1, \quad c=0 \\ a=0, \quad b=0, \quad c=1. \end{aligned}$$

Coordinando las tres filas y columnas de un sistema de matrices a las coordenadas x_1, x_2, x_3 se obtiene la representación: (después de multiplicar por i)

$$\beta_1 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & i & \cdot \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & i \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -i & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & -i & \cdot \\ i & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \tag{10}$$

y análogamente en cinco dimensiones.

El caso especial: $\beta_3 = i\,(\beta_1\,\beta_2 - \beta_2\,\beta_1)$ (7) (11)

produce una reducción en el número de términos independientes de 35 a 10 y del centro de 3 a 2. Se tiene ahora:

$$S_3 = -1$$

equivalente a la unidad.

El número de representaciones irreducibles ahora es 2 y

$$3^2 + 1^2 = 10.$$

$S_1 - S_2$ se puede reemplazar por $S_1 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$

$$\sim \beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 + \beta_3{}^2$$

debido a la relación

$$2\,(\beta_1{}^2\,\beta_2{}^2 + \beta_1{}^2\,\beta_3{}^2 + \beta_2{}^2\,\beta_3{}^2) = \beta_1{}^2 + \beta_2{}^2 + \beta_3{}^2$$

consecuencia de (11) y de las relaciones cíclicas resultantes de (11).

Buenos Aires, septiembre 1943.

---

(7) Tratado por mí en *Revista Electrotécnica*, octubre 1943.