UNA DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE DESARGUES, EXTENDIDO AL CASO DE UNA TRANSVERSAL, NO SECANTE A LA CONICA

por ELÍAS A. DE CESARE

Recuérdese, que una involución Ω_p, se dice que es armónica, con una proyectividad π, no involutoria, si Ω_p, es armónica, con la involución Ω, unida para π [1].

Sea la proyectividad no involutoria

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \tag{1}$$

siendo Ω, su involución unida. Llamando en π, pares de puntos asociados, a los pares de la forma $(A\,B')$, $(A'\,B)$, formemos la involución

$$\Omega_p \equiv \begin{pmatrix} A & B' & A' & B \\ B' & A & B & A' \end{pmatrix} \tag{2}$$

en que sean conjugados, dos pares de elementos asociados en π.

Definida la Ω_p, llamemos D' al conjugado de C, en Ω_p, es decir sea:

$$\Omega_p\, C \equiv D'. \tag{3}$$

Por la (1), se podrá determinar el elemento D, tal que:

$$\pi^{-1}\, D' = D$$

o lo que es lo mismo

$$\pi\, D \equiv D' \tag{4}$$

---

(1) Véase: F. SEVERI, *Complementi di Geometria Proiettiva.* Zanichelli, Bologna, 1906, pág. 119.

De (1) y (4) resulta:

$$ABCD \;\overline{\wedge}\; A'B'C'D'$$

o también

$$ABCD \;\overline{\wedge}\; B'A'D'C'.$$

Existe así una proyectividad

$$\pi_1 \equiv \begin{pmatrix} A & B & C \\ B' & A' & D' \end{pmatrix} \tag{5}$$

tal que:

$$\pi_1 D \equiv C'. \tag{6}$$

Teniendo en cuenta (2), (3), resulta

$$\pi_1 \equiv \Omega_p$$

por tener tres pares de elementos homólogos comunes; y teniendo en cuenta la (6), resulta que D, C', son elementos conjugados en Ω_p.

Se puede así escribir:

$$\Omega_p \equiv \begin{pmatrix} B' & A & B & A' & D' & C & D & C' \\ A & B' & A' & B & C & D' & C' & D \end{pmatrix}. \tag{7}$$

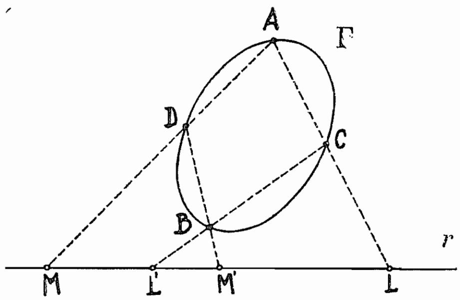
Transformando la π, mediante la Ω_p, sale [1]

$$\Omega_p \,.\, \pi\, \Omega_p^{-1} \equiv \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \end{pmatrix} = \pi^{-1}.$$

Por lo tanto, la Ω_p, transformará a la Ω, en Ω^{-1}, y como Ω, es involutoria, es decir $\Omega \equiv \Omega^{-1}$, resulta, que la Ω_p transforma en sí misma, a la Ω. En otros términos, Ω y Ω_p, son permutables, y esto significa decir, que los elementos dobles imaginarios de Ω, son conjugados en Ω_p.

(²) Las transformaciones deben efectuarse en el orden Ω_p^{-1}, π, Ω_p.

Consideremos un cuadrángulo completo $A\,B\,C\,D$, inscripto, en la cónica Γ, y sea r, una recta de su plano, no secante a Γ.



Consideremos a Γ, engendrada, por los haces de rayos con centro en A y B, y llamemos $\pi \equiv \pi_{BA}$ la proyectividad que resulta sobre r, cortando primero el haz con centro en A, y luego el haz con centro en B. Siendo $L \equiv A\,C\,.\,r$; $L' \equiv BC\,.\,r$, $M \equiv AD\,.\,r$; $M' \equiv B\,D\,.\,r$, será $\pi\,L \equiv L'$ y $\pi\,M \equiv M'$.

Se tendrá pues:

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} L & L'' & M & M'' & \dots \\ L' & L & M' & M & \dots \end{pmatrix} \qquad (p)$$

Si L_1, es el conjugado armónico de L, respecto de L', L'' y del mismo modo M_1, conjugado armónico de M, respecto de M', M'', será:

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} L & L_1 & M & M_1 \\ L_1 & L & M_1 & M \end{pmatrix}$$

la involución unida de la π, involución que define, los puntos dobles imaginarios, según los cuales, la r, corta a la Γ.

Formemos una involución Ω_p de la π; se tiene:

$$\Omega_p \equiv \begin{pmatrix} M' & L & M & L' \\ L & M' & L' & M \end{pmatrix} \qquad (p')$$

ésta involución, será armónica, con Ω, es decir, los elementos dobles imaginarios de Ω, son conjugados en Ω_p.

Pero la Ω_p, no es sino, la involución, que sobre r, determinan los pares de lados opuestos, del cuadrángulo completo $A\,B\,C\,D$. Podemos entonces, formular la proposición:

Los pares de puntos imaginarios, comunes a la r *y a* Γ, *son conjugados, en la involución, que los pares de lados opuestos, de un cuadrángulo completo inscripto en la cónica, determinan sobre la misma recta.*

Buenos Aires, julio 1943.

TEMAS PROPUESTOS

47. - Se llaman curvas-D de una superficie aquellas cuya esfera osculatriz en cada punto es tangente a la superficie. Se pide estudiar las curvas-D sobre un cono de revolución.

L. A. Santaló