ECUACION FUNCIONAL
$f(x^m) : f(x) = ax$

por SERGIO SISPÁNOV

Generalizando la ecuación funcional

$$\frac{f(x^m)}{f(x)} = m \, . \, x^{m-1}$$

propuesta en el número 5 de Vol. VIII (tema 41) nos ocuparemos de la ecuación

$$f(x^m) : f(x) = ax^{\alpha}. \qquad (1)$$

Supongamos, primero, que la variable x y las constantes $a, m,$ son positivas, y que además $m \neq 1$.

Aplicando la sustitución

$$f(x) = x^{\frac{\alpha}{m-1}} \varphi(x), \qquad (2)$$

reducimos la ecuación (1) a la forma

$$\varphi(x^m) : \varphi(x) = a.$$

Haciendo luego

$$x = e^{e^{y \ln m}}, \qquad \varphi(x) = e^{\psi(y)}, \qquad (3)$$

vamos a tener sucesivamente

$$x^m = e^{e^{(y+1) \ln m}}, \qquad \varphi(x^m) = e^{\psi(y+1)}, \qquad a = e^{\ln a}$$

y la ecuación anterior se convierte en

$$e^{\psi(y+1) - \psi(y)} = e^{\ln a},$$

en donde e es la base de los logaritmos naturales.

La última relación nos conduce evidentemente a la siguiente ecuación a diferencias finitas:

$$\Delta\psi(y) = \psi(y+1) - \psi(y) = \ln a.$$

Con auxilio de una sumación inmediata llegamos a la fórmula

$$\psi(y) = y \ln a + \ln C. \tag{4}$$

La letra C, representa una constante arbitraria de sumación, si la función $\psi(y)$ es analítica para todos los valores finitos de y.

En el caso más general de que dicha función no estuviese sometida a ninguna condición, C representaría una función arbitraria de la forma

$$C(y-[y]),$$

en donde, según la notación de *Gauss*, el símbolo $[y]$ significa la parte entera de la variable y. De manera que el argumento se convierte en la siguiente identidad entre potencias de base y límites

$$0 \leqq y - [y] < 1.$$

Volviendo a la segunda de las relaciones (3) podemos reemplazar $\psi(y)$ por su expresión (4), lo que nos da

$$\varphi(x) = C(e^y)^{\ln a}.$$

Tomando logaritmos naturales de ambos miembros de la primera de las mismas igualdades (3), resulta

$$\ln x = e^{y \ln m},$$

de donde

$$e^y = (\ln x)^{\frac{1}{\ln m}}. \tag{5}$$

La sustitución de este resultado en la expresión para $\varphi(x)$ recién hallada, conduce a la fórmula

$$\varphi(x) = C(\ln x)^{\frac{\ln a}{\ln m}}.$$

Ahora, la relación (2) suministra la expresión para la función buscada $f(x)$

$$f(x) = C\, x^{\frac{\alpha}{m-1}} \, (ln\, x)^{\frac{ln\, a}{ln\, m}}. \tag{6}$$

Según lo expuesto anteriormente, la letra C representa aquí una constante arbitraria, o bien, en el caso más general, puede ser una función arbitraria del argumento

$$y - [y],$$

en donde, de conformidad con la relación (5),

$$y = \frac{ln(ln\, x)}{ln\, m}.$$

Hagamos algunas observaciones respecto a la fórmula (6). El exponente

$$\frac{ln\, a}{ln\, m}$$

no depende de la base en la cual se toman los logaritmos y es igual a $\log_m a$.

En lugar de los logaritmos naturales que figuran en (6) pueden escribirse logaritmos en cualquier otra base; el efecto producido por el cambio de la base se neutraliza multiplicando C por un factor constante convenientemente elegido.

A fin de evitar valores complejos para $f(x)$ que pueden obtenerse cuando $0 < x < 1$ y $ln\, x$ es negativo, podría emplearse la fórmula

$$f(x) = C\, x^{\frac{\alpha}{m-1}} \, |ln\, x|^{\frac{ln\, a}{ln\, m}}, \tag{7}$$

que se deduce de la fórmula (6) reemplazando en ella C por

$$C(-1)^{\frac{ln\, a}{ln\, m}}.$$

En la misma ocasión, se practicarían las sustituciones

$$x = e^{-e^{y\, ln\, m}}, \qquad \varphi(x) = e^{-\psi(y)}$$

en lugar de las sustituciones (3), si se quisiera tener para la variable auxiliar y valores reales.

Las igualdades (6) y (7) suministran para $f(x)$ valores reales también en el caso de que sean las constantes a y m, ambas negativas, si la razón

$$\frac{ln\, a}{ln\, m}$$

es real.

En conclusión, consideremos algunos casos excepcionales.

Si $m=1$, la ecuación (1) se convierte en una identidad, cuando $a=1$, $\alpha=0$; y no admite soluciones, cuando no se cumple con una de estas condiciones.

Si $m=0$ y $a \neq 0$, se obtiene

$$f(x)=\frac{f(1)}{a}\,.\,x^{-\alpha},$$

desempeñando el factor

$$\frac{f(1)}{a}$$

el papel de una constante arbitraria.

Si $m=0$ y $a=0$, la ecuación se reduce a la igualdad

$$f(1)=0.$$

En el caso particular que figura en el enunciado del problema se tendrán

$$a=m, \qquad \alpha=m-1,$$

y por consiguiente

$$f(x)=C\,x\,ln\,x.$$

Asunción, Paraguay.
26 de Enero de 1943.