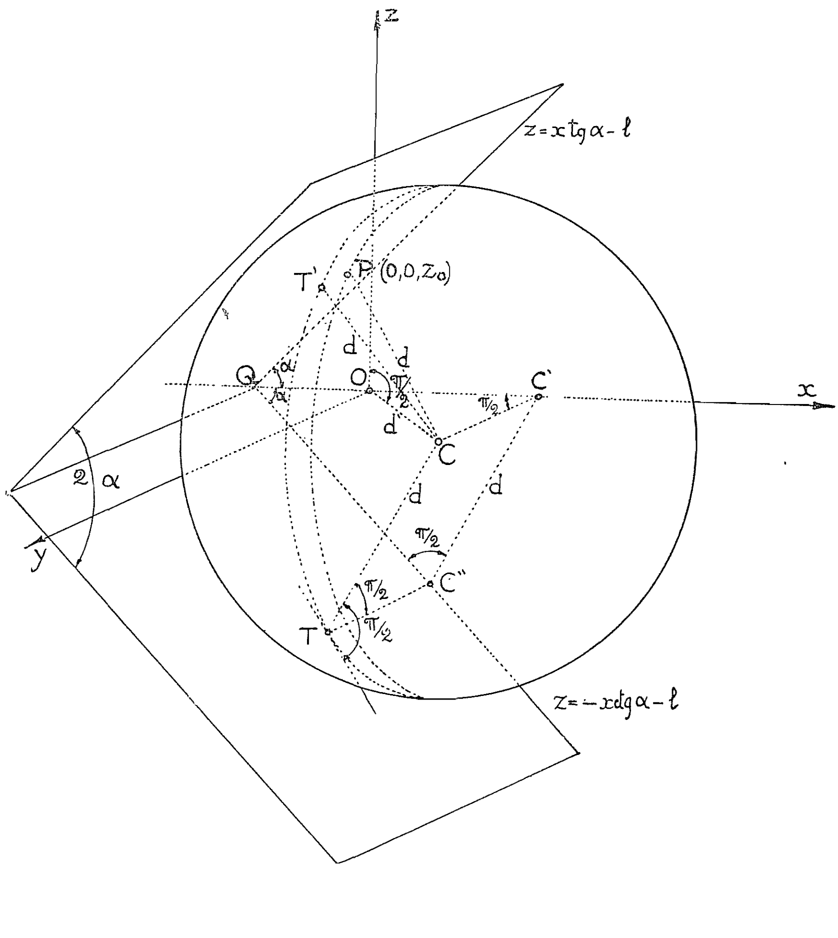
CUESTIONES ELEMENTALES RESUELTAS

18. — Dados dos planos y un punto P no situado en ellos, se consideran todas las superficies esféricas que pasan por este punto P y son tangentes a los dos planos. Se pide el lugar geométrico de los puntos de contacto y el estudio del cono de vértice P que forman los radios de dichas esferas.

Solución: 1.º) Caso general: Los planos se cortan según el ángulo diedro 2α (tomamos aquél en que está situado P); adoptamos como ejes coordenados los que tienen por centro la proyección de P sobre el bisector de 2α, eje y la recta paralela a la intersección de los planos dados, eje z el que contiene a P y eje x la recta normal a las anteriores.

Sea C un centro de esfera que cumpla las condiciones pedidas: $CT = CT' = CP = d$ y tendremos (ver la figura):



En $\triangle O C C'$ rectángulo en C' es $d'^2 = x^2 + y^2$
En $\triangle O P C$ » » O es $d'^2 = d^2 - z_0^2$
En $\triangle Q C' C''$ » » C'' es $d^2 = (l + x)^2 \operatorname{sen}^2\alpha$

siendo $l = O Q$. Deducimos:

$$x^2 + y^2 = (l + x)^2 \operatorname{sen}^2\alpha - z_0^2.$$

La ecuación del lugar de los centros de las esferas que cumplen el enunciado es por lo tanto:

$$[1] \left\{ \begin{array}{l} x^2 \cos^2\alpha + y^2 - 2 l x \operatorname{sen}^2\alpha - l^2 \operatorname{sen}^2\alpha + z_0^2 = 0 \\ z = 0. \end{array} \right.$$

Curva plana de segundo grado

A) El lugar de los puntos de tangencia de las esferas y los planos dados será proyección de la [1]; para obtenerla multiplicamos x por $\cos\alpha$:

$$[2] \quad x^2 \cos^4\alpha + y^2 - 2 l x \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha - l^2 \operatorname{sen}^2\alpha + z_0^2 = 0.$$

El .determinante cuadrático vale:

$$\triangle = - \cos^4\alpha \text{, es decir, } \triangle < 0$$

para cualquier valor de α; la curva es siempre tipo elipse.

El determinante cúbico vale:

$$A = z_0^2 \cos^4\alpha - l^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha$$

distinto en general de cero, y que toma ese valor (ecuación con un solo punto real) cuando:

a] $\alpha = 0$; los dos planos coinciden y el punto está contenido en ellos. (Por el planteo resulta necesariamente $z_0 = 0$).

b] $\alpha \neq 0$ $z_0 = l \operatorname{tg} \alpha$; el punto está sobre uno de los planos.

c] La [2] nunca puede llegar a ser circunferencia, pues debería ser $\cos^4\alpha = 1$, o sea, $\alpha = 0$ caso a] ya considerado.

d] si $l = 0$; $z_0 = 0$ (necesariamente, dado el planteo; si $z_0 \neq 0$ daríamos un giro de 90^o al sistema de ejes y tendríamos $z_0 = 0$, $l \neq 0$) y la curva degenera en un punto.

e] si $z_0 = 0$, $l \neq 0$ obtenemos una elipse como en el caso general.

B) Estudio del cono de vértice P que forman los radios de las esferas:

La ecuación del cono en el sistema de ejes de origen trasladado a P es:

$$x^2 \cos^2\alpha + y^2 + 2\, l\, x\, z \,\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{z_0} - l^2 z^2 \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{z_0^2} + z^2 = 0.$$

que no es un cono de revolución salvo que:

a′] $\alpha = 0$ caso a] anterior en que el cono degenera en infinitas rectas coincidentes normales a los planos en P.

b′] $\alpha \neq 0, \dfrac{z_0}{l} = \operatorname{tg}\alpha$. El punto P está sobre uno de los planos y el cono degenera en una recta normal al mismo en P.

c′] si $z_0 = 0$. El cono degenera en el plano bisector a los dados.

d′] si $z_0 = 0$; $l = 0$ no existe cono.

2.º) Casos particulares no considerados por la ecuación.

A) Los planos dados son paralelos y el punto P es interior a ellos (está en el semiespacio respecto a cada plano que contiene al otro).

El lugar de los puntos de tangencia es una circunferencia. El cono es de revolución.

a] si $d_1 = d_2$ el cono es el plano equidistante de los dados.

b] si $d_1 = 0$ el cono se reduce a una recta y la circunferencia a un punto. c] $d_1 = d_2 = 0$ ya fué considerado.

B) Los planos dados son paralelos y P no es interior a ellos ni contenido en uno de ellos.

a] $d_3 \neq 0$. No existe solución, a menos que se tome como tal la siguiente: La esfera degenera en un plano paralelo a los dados, la circunferencia es la impropia y el cono es la recta que pasa por P y es normal a los planos dados.

b]. $d_3 = 0$. La curva de contacto de las esferas con los planos coincidentes es todo el plano, las generatrices son todas las rectas que pasan por P y los centros de las esferas describen un paraboloide de revolución de centro P y directriz los planos coincidentes.

Juan Carlos Grimberg