# SOBRE UNA ECUACION DIFERENCIAL DE 2º ORDEN

por Sergio Sispánov

Hemos propuesto en el Nº. 1 de este volumen (tema 42) encontrar la integral intermediaria, con una constante, de la ecuación diferencial de 2º. orden

$$\left(ln\frac{1+y'}{y'}\right)' = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y},$$

a que se reduce el problema sobre las ecuaciones diferenciales análogas a las de *Clairaut,* y de 3er. grado con respecto a la variable dependiente $y$. Su integral se presenta también en el problema sobre las oscilaciones amortiguadas, poniendo de relieve una relación que existe entre ambas cuestiones tan diferentes a primera vista.

He aquí la resolución: Restando y agregando al segundo miembro de la ecuación la fracción

$$\frac{y'}{x+y}$$

lo representamos bajo la forma

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1+y'}{x+y}+\frac{y'}{x+y}$$

o lo que es lo mismo

$$(ln\, x)'+\frac{1}{y}-[ln(x+y)]'+\frac{y'}{x+y}.$$

Reconcentrando en el primer miembro los términos con logartimos podemos escribir la ecuación propuesta del siguiente modo

$$\left[ln\,\frac{(x+y)\,(1+y')}{xy'}\right]' = \frac{1}{y}+\frac{y'}{x+y}.$$

Efectuando la división indicada en el primer miembro y reduciendo a común denominador los términos del segundo miembro, vamos a tener

$$\left[ln\left(1+\frac{x+y+yy'}{xy'}\right)\right]' = \frac{x+y+yy'}{y\,(x+y)}.$$

Ahora vemos que ambos miembros se convierten en 0, si

$$x+y+yy'=0. \qquad (1)$$

La ecuación homogénea a que se llegó, puede integrarse mediante la sustitución

$$y = xz$$

que conduce al siguiente resultado

$$ln\, x + \int \frac{z\,.\,dz}{z^2+z+1} = \text{const.} \qquad (2)$$

Efectuando de diferentes maneras el cálculo de la cuadratura que figura en el primer miembro, se obtienen distintas formas de la integral buscada.

1er. método. Haciendo uso de la fórmula

$$\int \frac{z\,.\,dz}{z^2+z+1} = \frac{1}{2}\, ln\,(z^2+z+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tng} \frac{2z+1}{\sqrt{3}}$$

sin dificultad encontramos

$$x = \frac{C e^{\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tng} \frac{2z+1}{\sqrt{3}}}}{\sqrt{z^2+z+1}}.$$

$$y = \frac{C z e^{\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tng} \frac{2z+1}{\sqrt{3}}}}{\sqrt{z^2+z+1}}.$$

2o. método. Si, antes de la integración, la función subintegral se descompone en sumandos, resulta

$$\int \frac{z\,.\,dz}{z^2+z+1} = \frac{1}{\omega-\omega^2}\left(\omega \int \frac{dz}{z-\omega} - \omega^2 \int \frac{dz}{z-\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega-\omega^2}\, ln\, \frac{(z-\omega)^{\omega}}{(z-\omega^2)^{\omega^2}},$$

siendo

$$\omega = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \quad \text{y} \quad \omega^2 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$$

raíces primitivas de la unidad de 3er. grado.

Sustituyendo este resultado en la ecuación (2) vamos a tener

$$ln \frac{[x(z-\omega)]^{\omega}}{[x(z-\omega^2)]^{\omega^2}} = ln\, c,$$

en donde $c$ es una constante.

Recordando que $xz$ es igual a $y$, podemos escribir

$$\frac{(y-\omega x)^{\omega}}{(y-\omega^2 x)^{\omega^2}} = c.$$

La última relación se verifica idénticamente haciendo

$$y - \omega x = c_1 t^{\omega^2}, \qquad y - \omega^2 x = c_2 t^{\omega},$$

en donde $c_1, c_2$ son nuevas constantes y $t$ es nueva variable auxiliar.

Despejando $x$ e $y$ se obtienen las fórmulas

$$x = \frac{c_2 t^{\omega} - c_1 t^{\omega^2}}{\omega - \omega^2}, \qquad y = \frac{c_2 \omega t^{\omega} - c_1 \omega^2 t^{\omega^2}}{\omega - \omega^2}$$

Si se pone ahora

$$c_2 = (\omega - \omega^2) \,.\, C_1 \quad \text{y} \quad -c_1 = (\omega - \omega^2) \,.\, C_2,$$

resultan finalmente

$$\left\{ \begin{aligned} x &= C_1 \,.\, t^{\omega} + C_2 \,.\, t^{\omega^2} \\ y &= C_1 \,.\, \omega t^{\omega} + C_2 \,.\, \omega^2 t^{\omega^2}. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Es muy fácil comprobar que la integral (3), que aparentemente depende de dos constantes y en realidad de una sola, verifica a la ecuación (1).

En efecto, diferenciando las relaciones (3) vamos a tener

$$dx = (C_1\,\omega\,t^{\omega} + C_2\,\omega\,t^{\omega^2})\frac{dt}{t} \qquad , \qquad dy = (C_1\,\omega^2\,t^{\omega} + C_2\,\omega^2\,t^{\omega^2})\frac{dt}{t}$$

y por consiguiente

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{C_1\omega^2\,t^{\omega} + C_2\omega t^{\omega^2}}{C_1\omega t^{\omega} + C_2\omega^2 t^{\omega^2}}.$$

El denominador de la última expresión es igual a $y$. De manera que

$$y\,y' = C_1\,\omega^2\,t^{\omega} + C_2\,\omega\,t^{\omega^2}.$$

Sumando ordenadamente las fórmulas (3) con la recién obtenida resulta

$$x + y + y\,y' = (1 + \omega + \omega^2)\,.\,(C_1\,t^{\omega} + C_2\,t^{\omega^2})$$

y como

$$1 + \omega + \omega^2 = 0,$$

entonces

$$x + y + y\,y' = 0.$$

3er. método. Para el cálculo de la cuadratura que figura en la ecuación (2) pueden emplearse también funciones trigonométricas. Con este objeto representemos dicha cuadratura bajo la forma

$$\int \frac{z\,.\,dz}{(z+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$$

Si se introduce la nueva variable $\varphi$ por la fórmula

$$z + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cot\varphi,$$

la cuadratura anterior se convierte en

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\cot\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}\varphi-ln\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

Sustituyendo este resultado en la relación (2) y teniendo en cuenta que $y$ es igual a $xz$ hallamos sin dificultad

$$\left\{\begin{aligned} x&=C\,e^{-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}}\,\mathrm{sen}\,\varphi\\ y&=C\,e^{-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}}\,\mathrm{sen}\left(\varphi+\frac{2}{3}\pi\right).\end{aligned}\right. \tag{4}$$

La integral obtenida podría deducirse directamente de la forma (3) reemplazando en ella $t^{\omega}$ y $t^{\omega^2}$ por las expresiones

$$t^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,ln\,t\right)\pm i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,ln\,t\right)\right]$$

a las que son iguales respectivamente, en virtud de las fórmulas de *Euler*.

Haciendo luego

$$-C_1=C_2=\frac{i}{2}\,C \qquad \text{y} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}\,ln\,t=\varphi$$

se llegaría a la forma (4).

En conclusión hagamos constar que la integral general de la ecuación propuesta con dos constantes arbitrarias depende de una ecuación diferencial de *Abel* no integrable por cuadraturas.

Las relaciones (4) nos indican que a las variables $x$ e $y$ se les puede considerar como coordenadas cartesianas de un punto material $M(x, y)$ que participa en dos movimientos vibratorios armónicos amortiguados, perpendiculares entre sí. De suerte que los diagramas de la integral obtenida forman un caso particular de las curvas de *Lissajous.*

Si los períodos de oscilaciones y sus decrementos logarítmicos son iguales, dichas curvas tienen ecuaciones

$$\left\{\begin{aligned} x&=A\,e^{-k\tau}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\tau+\alpha\right)\\ y&=B\,e^{-k\tau}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\tau+\beta\right)\end{aligned}\right. \tag{5}$$

siendo $A$ y $B$ amplitudes máximas de las oscilaciones, $\alpha$ y $\beta$

fases iniciales de las mismas, $T$, período común de las oscilaciones, $kT$ su decremento logarítmico, y $\tau$ el tiempo (fig. 1).

En el momento inicial del tiempo $\tau = 0$ el móvil sale de una posición $M_0(x_0, y_0)$ de coordenadas

$$x_0 = A \operatorname{sen} \alpha, \qquad y_0 = B \operatorname{sen} \beta,$$

engendrando, luego, una espiral con el punto asintótico 0.

Dicha espiral es logarítmica, si $A = B$ y además $\beta - \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ Si la diferencia de fases $\beta - \alpha$ se hace igual a 0 o a $\pm \pi$, las oscilaciones se efectúan a lo largo de una recta. La trayectoria se convierte en una elipse, cuando $k = 0$, pero $\beta - \alpha$ no es igual ni a 0, ni a $\pm \pi$.

Se sabe que las ecuaciones (5) determinan el movimiento de un punto material $M$ bajo la influencia de una fuerza de atracción $F$ hacia un centro fijo $O$, proporcional a la distancia $r = OM$ del móvil a este centro. Se supone, además, que la resistencia $f$ del medio es proporcional a la velocidad $w$ del móvil y tiene la dirección diametralmente opuesta a $w$.

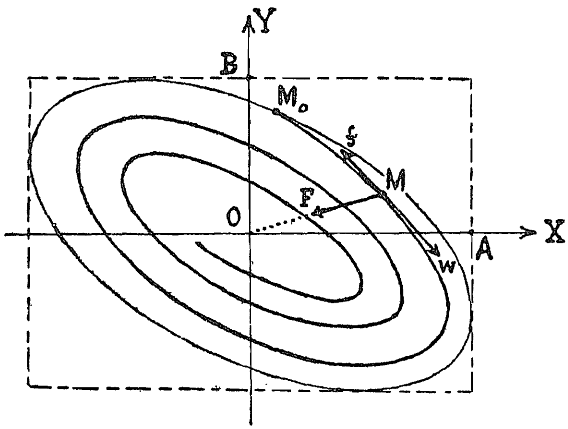


fig. 1.

La integral (4) es un caso particular de las integrales (5) que se caracteriza, evidentemente, por los siguientes valores de los elementos que determinan el movimiento:

$$A = B = C;\ T = 2\pi,\ k = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \alpha = 0,\ \beta = \frac{2}{3}\pi;\ \tau = \varphi.$$

Asunción, Paraguay.