CUESTIONES ELEMENTALES RESUELTAS

11. — *Divididos en* n *partes iguales cada uno de los ángulos de un cuadrilátero estudiar la naturaleza de los cuadriláteros que forman las rectas de división tomada una por cada vértice. Casos particulares.*

Solución. — Sea $A' B' C' D'$ el cuadrilátero formado por las rectas que separan de cada ángulo su parte n-sima. Como se vé en la figura el ángulo A' es exterior al triángulo $A A' D$ y por tanto

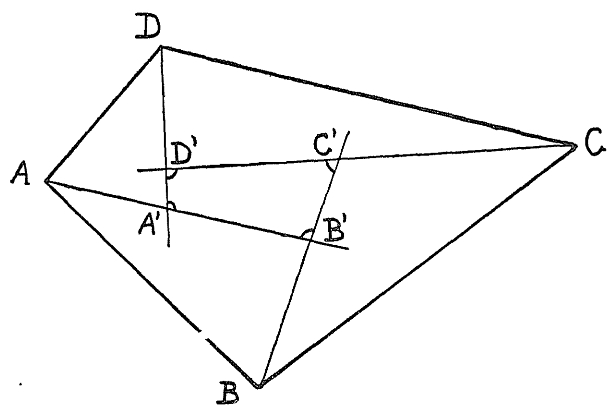
$$A' = \pi - \frac{n-1}{n} A - \frac{1}{n} D.$$

Análogamente

$$B' = \pi - \frac{n-1}{n} B - \frac{1}{n} A$$

$$C' = \pi - \frac{n-1}{n} C - \frac{1}{n} B$$

$$D' = \pi - \frac{n-1}{n} D - \frac{1}{n} C.$$



De estas relaciones se deducen las siguientes propiedades:

a) Si $ABCD$ es inscriptible, los ángulos opuestos son suplementarios, y por tanto $A' + C' = \pi$, es decir, $A' B' C' D'$ es también inscriptible.

b) Si $n=2$, $A'+C'=\pi$, o sea, $A'B'C'D'$ resulta inscriptible.

c) Si $ABCD$ es un paralelogramo, resulta $A'=C'$, $B'=D'$, es decir, también $A'B'C'D'$ es un paralelogramo.

d) Si $ABCD$ es un rectángulo, resulta $A'=B'=C'=D'=$ $=\frac{\pi}{2}$, luego $A'B'C'D'$ también es un rectángulo.

e) Si $ABCD$ es un cuadrado, según lo anterior, $A'B'C'D'$ es desde luego un rectángulo, pero además se observa que

$$BC'=BC\cos\frac{B}{n}\quad,\quad AB'=AB\cos\frac{A}{n}$$

$$BB'=AB\operatorname{sen}\frac{A}{n}\quad,\quad AA'=AD\operatorname{sen}\frac{D}{n},$$

de las primeras igualdades se deduce $BC'=AB'$ y de las segundas $BB'=AA'$ y por substracción resulta $B'C'=A'B'$. Por tanto: si $ABCD$ es un cuadrado, también $A'B'C'D'$ es un cuadrado.

Andrés Valeiras
(Alumno del Instituto N. del Profesorado
de Buenos Aires)

21. *En la revista Mathematical Monthly (vol. 44) se calcula el* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)^x$ *diciendo que por ser* $x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ *equivalente a la unidad, el límite es e. Aunque en este caso particular el resultado es cierto, el razonamiento es erróneo. Buscar ejemplos en que tal razonamiento conduzca a resultados falsos y calcular correctamente el límite propuesto.*

Solución. Sea $\delta(x)$ infinitésimo; siguiendo el razonamiento del enunciado sería

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\delta(x)+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

pero en realidad es

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\delta(x)+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{x\delta(x)+1}}\right)^x=e^{1+\lim x\delta(x)},$$

que sólo es igual a e para el caso en que $\delta(x)$ sea infinitésimo de orden superior a $\frac{1}{x}$.

Apliquemos este resultado al ejercicio propuesto. Es

$$x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{3!\,x^2} + \frac{1}{5!\,x^4} - \ldots$$

Luego en este caso, la función $\delta(x)$ es infinitésimo de segundo orden y el límite buscado resulta efectivamente e. Pero si en vez de sen $\frac{1}{x}$ se pone, por ejemplo, $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ resulta el límite $\sqrt{e}$.

Otra solución directa del mismo problema se obtiene aplicando la regla de L'Hospital, de la manera siguiente. Haciendo $x = \frac{1}{z}$ y tomando logaritmos, el límite buscado, aplicando sucesivamente la regla de l'Hospital, es el antilogaritmo de

$$\lim_{z \to 0} \frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z} + z\right)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} z}{z} + z} \left(\frac{z \cos z - \operatorname{sen} z}{z^2} + 1\right)$$

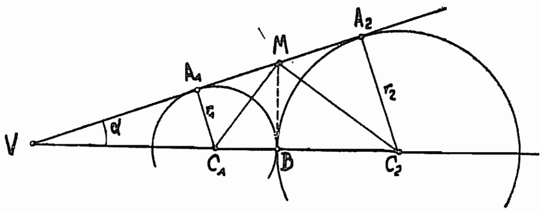
$$= \lim_{z \to 0} \frac{-z \operatorname{sen} z + 2z}{\operatorname{sen} z + z \cos z + 3z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{-z \cos z - \operatorname{sen} z + 2}{2 \cos z - z \operatorname{sen} z + 6z} = 1$$

y por tanto si el límite del logaritmo es 1, el límite buscado es e.

Andrés Valeiras
Alumno del Instituto N. del Profesorado
de Buenos Aires

23. *Si en un ángulo triedro se inscribe una sucesión de esferas tal que cada una toque a la precedente, ¿qué relacion existe entre los radios de dos esferas consecutivas?*

Solución. Evidentemente los centros de todas estas esferas están sobre la recta lugar geométrico de los puntos que equidistan de las tres caras del triedro. Tracemos por esta recta un plano normal a una de las caras del triedro; la intersección será una recta tangente a todas las esferas. La sección de todas las esferas por este plano nos dará, pues, la figura formada por una sucesión de círculos tangentes como indica la figura.



En la figura vemos que MC_1 y MC_2 son las bisectrices interior y exterior respectivamente correspondientes al vértice M del triángulo VMB. Por tanto: los centros C_1 y C_2 de dos esferas consecutivas son conjugados armónicos respecto del vértice V y del punto de contacto B de las esferas.

Por otra parte, llamando α al ángulo que forma la recta VC_2 de los centros con la tangente común VA_2, se tiene, por semejanza de triángulos

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{VC_1}{VC_1+r_1+r_2}$$

o bien, poniendo $VC_1=\frac{r_1}{\text{sen}\,\alpha}$,

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{r_1}{r_1+(r_1+r_2)\text{sen}\,\alpha},$$

de donde se deduce fácilmente

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{1-\text{sen}\,\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha},$$

que es la relación buscada.

El ángulo α, que es el ángulo que la bisectriz del triedro forma con cada una de las caras del mismo se puede calcular fácilmente en función de los datos del triedro, ya sea analítica o trigonométricamente.

Faiwel Goldszein
(Alumno de Ingeniería)
Buenos Aires