COMUNICACIONES

E. COROMINAS. *Sobre la teoría de la derivación.* (Sesión del 7 de Octubre de 1941).

Estos resultados, así como la teoría correspondiente, se escinden en dos ramas: la teoría de la derivación de Peano y la teoría correlativa que estudia las derivadas de Riemann-Schwarz. Según la definición de Peano las derivadas vienen definidas por la fórmula

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+0(h^n)$$

y según Riemann-Schwarz son simples límites de diferencias divididas. La derivada ordinaria y la derivada simétrica son ejemplos de derivadas de Riemann-Schwarz de primer orden y la schwarziana

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$$

es un ejemplo de derivada de segundo orden. Cuando definimos la diferencial como la parte principal del incremento y a su vez la derivada como cociente de diferenciales, utilizamos la definición de Peano, mientras que, definiéndola como límite del cociente incremental, utilizamos la definición de Riemann-Schwarz; es sabido, sin embargo, que las dos definiciones son equivalentes. En cuanto se pasa al segundo orden, derivada ordinaria, derivada de Peano y derivadas de Riemann-Schwarz son conceptos bien distintos, ya que la derivada ordinaria es generalizada por la de Peano y ésta a su vez por la multitud de derivadas de Riemann-Schwarz que se puedan dar. Para las derivadas de Peano en otras comunicaciones se enunciaron todos los teoremas clásicos del cálculo diferencial; luego la única propiedad que se pierde en la derivada de Peano es la que se origina en su definición, que en vez de obtenerse a partir de la derivada anterior se obtiene directamente de la función. Denjoy estudió bajo qué condiciones se conserva, en las derivadas de Peano, esta propiedad de las derivadas ordinarias, dando el teorema fundamental de que cuando el resto que es de la forma

$$0(h^n)=h^n\,\varepsilon(x_0,h)\quad(\varepsilon(x_0,h)\to 0 \text{ para } h\to 0)$$

es uniformemente acotado, todas las derivadas hasta el orden n son ordinarias salvo eventualmente la última (orden n) de la cual nada se puede afirmar. El Dr. Corominas ha demostrado sucesivamente que la acotación uniforme del resto equivale a la de $f^{(n)}(x)$ y que, en estas mismas hipótesis del teorema de Denjoy, $f^{(n)}(x)$ también es derivada ordinaria. Así, pues, para las familias de funciones de derivadas acotadas el algoritmo de Peano no da ninguna ampliación a los conceptos clásicos, tan solo *puede* generalizar la derivada para la familia de funciones de derivadas (Peano) no acotadas. Con todo ello queda aclarada cuál es la naturaleza intrínseca de la generalización de Peano. Todavía se puede disminuir la hipótesis, sustituyendo la acotación de $f^{(n)}(x)$ por la acotación en un solo sentido, es decir, superior o inferior. Las aplicaciones de este teorema central son múltiples y variadas.

En la teoría de Riemann-Schwarz los resultados son los siguientes:

1º.) Basta que exista

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h' \to 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h')}{h-h'}$$

(h y $h' > 0$ tendiendo simultáneamente a cero siendo funciones continuas de una variable única) para que exista derivada lateral a la derecha. Así, por ejemplo, si existe el límite de

$$\frac{f(x_0+mh)-f(x_0-nh)}{(m-n)h}$$

($m \neq n$ y los dos positivos) para h tendiendo a cero por la derecha y por la izquierda, existe también derivada ordinaria. El enunciado sigue siendo cierto cuando m y n son de distinto signo y valor absoluto, mientras que cuando $m = -n$ obtenemos la derivada simétrica

$$\frac{f(x_0+mh)-f(x_0-mh)}{2mh}$$

en la cual, al cambiar h en $-h$ obtenemos la misma expresión. Con ello queda bien claro que la derivada simétrica puede generalizar la ordinaria, como en efecto así sucede, y que ésta es la única generalización de la derivada ordinaria como límite de la pendiente de cuerdas de extremos infinitamente próximos al punto (h positiva y negativa). Es interesante recalcar que los infinitésimos h y h' no pueden ser equivalentes, pues en este caso es fácil demostrar que en vez de generalizar restringimos el concepto de derivada, ya que puede existir la derivada ordinaria sin que exista aquella.

2º.) Cuando existe el límite, para $h \longrightarrow 0$ de la diferencia dividida tomada en los puntos

$$(h, kh, k^2h, \ldots, k^nh) \qquad (1 > k > 0)$$

entonces para cada h_1 $(kh < h_1 < h)$

la fórmula de Peano

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'_{h_1}(x_0)\, h + \frac{f''_{h_1}(x_0)}{2!} h^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}{}_{h_1}(x_0)}{(n-1)!} + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + 0(h^n)$$

es cierta para la sucesión de puntos

$$\{ x_0 + h_1 k^i \} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Las derivadas intermedias, de la primera a la de orden $n-1$ dependen de la sucesión elegida o sea de h_1, siendo funciones continuas de ella. Por el procedimiento transfinito de cadena de intervalos de Lebesgue, se demuestra que para las funciones sin puntos angulosos las derivadas 2ª. y 3ª. de este tipo, cumplen el teorema de Ricci y por tanto el teorema fundamental del cálculo integral. El concepto de punto anguloso para la derivada de tercer orden, es una generalización del concepto ordinario.

F. Toranzos. *Sobre la generación proyectiva de las hipercuádricas en el espacio de Hilbert.* (Sesión del 10 de Julio de 1943).

Continuando un trabajo explicado en otra reunión de la U. M. A., el autor se propone encontrar un criterio general para engendrar proyectivamente las hipercuádricas en el espacio de Hilbert. En la exposición anterior se dieron criterios no generales.

Se utiliza para realizar el objetivo propuesto, un teorema de Vitali, en el que se prueba que cualquier proyectividad puede obtenerse por el producto de tres proyectividades simples, una de primera clase (traslación), otra de segunda (afinidad) y otra de tercera (homología). Aplicando esto se obtiene la expresión analítica de la proyectividad más general. Se definen las hipercuádricas, como las transformadas de una esfera mediante la proyectividad general. Finalmente se compara esta definición con otra algebraica que resultaría de considerar las hipercuádricas como formas cuadráticas.

F. E. HERRERA. *Determinación del salto de una función.* (Sesión del 10 de Julio de 1943).

El problema ha sido abordado entre otros por Fejér, Sidon, Csillag, Lukács y Sasz, que dieron métodos particulares para la determinación del salto.

El autor, siguiendo a Titchmarsh, que ha dado un teorema general sobre integrales singulares exigiendo determinadas condiciones al núcleo, da un teorema semejante para la determinación del salto generalizado D_x, a saber:

Si $K(t,\lambda)$ es un núcleo integrable en el sentido de Lebesgue respecto de t en el intervalo $(0,B)$ para cualquier valor de λ tal que:

$$(1) \qquad |K(t,\lambda)| \leqq C_1 \lambda \qquad \text{para} \quad t \leqq \frac{1}{\lambda}$$

$$(2) \qquad |t^{1+\beta} K(t,\lambda)| \leqq \frac{C_2}{\lambda^{\beta}} \qquad \text{para} \quad t > \frac{1}{\lambda}$$

con $\beta \geqq 0$ cualquiera que sea λ (pero con la convención de reemplazar cuando $\beta = 0$, λ^0 por $\lg \lambda$) y si $f(t)$ es una función periódica de período $2B$, integrable Lebesgue entre $-B$ y $+B$, se verifica en todo punto donde exista un número D_x con la propiedad:

$$(3) \qquad \int_0^t |f(x+u) - f(x-u) - D_x|\, du = 0(t)$$

que:

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\ \frac{1}{A}\int_0^B K(t,\lambda)\,[f(x+t)-f(x-t)]\,dt = D_x$$

con

$$A = \overline{\lim_{\lambda\to\infty}} \int_0^B K(t,\lambda)\,dt.$$

El teorema contiene como casos particulares resultados obtenidos por Sidon, Lukács y Sasz que consideran núcleos $K(t,\lambda)$ especiales.

Tales núcleos presentan la característica común de que $\int_0^B |K(t,\lambda)|\,dt$ permanece acotada cuando $\lambda\to\infty$.

La circunstancia de que el primer método dado para la determinación del salto (debido a Fejér), conduce a un núcleo tal que la integral de su módulo crece indefinidamente cuando λ tiende a ∞, induce a investigar bajo qué condiciones es posible seguir obteniendo aquél a partir de (4) mediante núcleos $K(t,\lambda)$ de los cuales la integral $\int_0^B |K(t,\lambda)|\,dt$ no está acotada cuando $\lambda\to\infty$, aunque sí lo está $\int_0^B K(t,\lambda)\,dt$.

Resulta así que si $K(t,\lambda)$ es tal que $|K(t,\lambda)| \leqq C_1\lambda^{1+\alpha}$ para $t \leqq \frac{1}{\lambda}$; $|t^{1+\beta} K(t,\lambda)| \leqq C_2$ para $t > \frac{1}{\lambda}$ y además para todo δ fijo $\int_\delta^B K(t,\lambda)\,\{f(x+t)-f(x-t)-D_x\}\,dt \to 0$ cuando $\lambda\to\infty$, sigue verificándose (4) en todo punto donde existe un número D_x tal que:

$$\int_0^t |f(x+u)-f(x-u)-D_x|\,dt = 0(t^{1+\gamma}) \tag{5}$$

con $\gamma > 0$ cualquiera y $0 \leqq \alpha \leqq \gamma$, $0 \leqq \beta < \gamma$.

Si la función $f(t)$ es de variación acotada, (5) se verifica en casi todos los puntos con $D_x = 0$ y $\gamma < 1$ cualquiera.

A. Calderón. *Sobre la convergencia de desarrollos de Fourier.* (Sesión del 10 de Julio de 1943).

En este trabajo se generalizan los teoremas de convergencia de los desarrollos de Fourier en serie trigonométrica a los desarrollos en serie de funciones $\alpha_i(P)$ de una familia ortonormal cualquiera.

Para ello se transforman las sumas parciales de la serie en una integral singular donde aparece un núcleo del tipo

$$\sum_1^m \alpha_i(P) \,.\, \alpha_i(Q)$$

— análogo al de la integral de Dirichlet $\dfrac{\operatorname{sen}[(m+{}^1/_2)(x-y)]}{2 \operatorname{sen} {}^1/_2(x+y)}$

— y se buscan propiedades del mismo necesarias y suficientes para la convergencia. Utilizando teoremas conocidos se llega a los resultados siguientes: Para que converja el desarrollo de toda función continua es necesario y suficiente que

$$\lim_{m \to \infty} \int_\varepsilon \sum_1^m \alpha_i(P) \,.\, \alpha_i(Q) \,.\, dP = \begin{cases} 0 \text{ si el entorno } \varepsilon \text{ no contiene } Q \\ 1 \text{ si } \varepsilon \text{ contiene } Q \end{cases}$$

donde ε es un entorno cualquiera del recinto R donde están definidas las funciones, y que:

$$\int_R \left| \sum_1^m \alpha_i(P) \,.\, \alpha_i(Q) \right| dP < A \quad \text{para todo } m.$$

Para los casos en que no se verifica esto último se enuncia otra condición de expresión menos breve, que asegura la convergencia de los desarrollos de funciones continuas con derivada continua, y los de funciones continuas de variación acotada de una variable.