SOBRE EL LEMA DE PINCHERLE

Extracto de una carta dirigida al Prof. J. Rey Pastor

. . . .

He leído con gran detenimiento su interesante nota sobre el «Lema de Pincherle y lema de Borel» aparecida en la Revista de la U. M. A., nº. I, vol. IX, (1943), p. 29 y siguiendo la incitación al lector con que acaba, me permito enviarle unas cuantas acotaciones sobre el tema.

Desde luego quedan ya señaladas por Vd. las incorrecciones contenidas en la «Teoria delle funzioni analitiche» de S. Pincherle (Bologna, 1922); para corregirlas debidamente es necesario entrar en el siempre espinoso problema de la idea matriz que presumiblemente haya inspirado al autor.

El teorema de la pág. 23 de su obra citada expresa: Dado un recinto finito y compleo D, si a cada uno de sus puntos x corresponde un círculo γ, al cual es interior, cada uno de cuyos puntos satisface una cierta propiedad Q_x respecto de x; entonces «existe un número $r > 0$ tal que para cada punto x de D se verifica la propiedad Q_x dentro del círculo de centro x y radio r».

Dado el enunciado correcto de dicho autor, que Vd. cita, contenido en su trabajo «Sopra alcuni sviluppi in serie» (Mem. Accad. Bologna, IV, 3, 1881) y de acuerdo con lo que él mismo indica, yo creo que el enunciado anterior debe completarse diciendo que además se supone que la propiedad Q_x cumple la condición:

(α): *Para todo x_0 del recinto completo D que se considera, el extremo inferior de los radios r_x, correspondientes a los puntos x de un cierto entorno de x_0, es distinto de cero.*

Desde luego r_x es el radio del máximo círculo C_x de centro x, cuyos puntos tienen la propiedad Q_x relativa a x; la comprobación del cumplimiento de la propiedad (α) será más fácil hacerla refiriéndola a un cierto entorno de x_0 que a todo el C_{x_0}.

Entonces el lema así modificado de Pincherle se demuestra bien sea como inmediata aplicación del lema de Borel, el cual es posterior al de Pincherle, o bien por aplicación también casi inmediata del teorema de Weierstrass citado en la objetada demostración de Pincherle, teorema que demuestra la existencia de un punto en cuyo entorno el extremo inferior de r_x es el mismo que en todo el recinto.

En este caso r_x no necesita ser función continua de x y tampoco necesita ser accesible su extremo inferior r en el recinto completo D; pero aun así, por el teorema dicho, existe en D un punto v tal que para todo entorno de v, el extremo inferior de r_x para los puntos de este entorno sigue siendo r; en efecto, esto es inmediato si r es accesible en el punto v de D, y si r es inaccesible, será punto de acumulación de valores r_x para los que sus correspondientes x tendrán en el recinto completo D un punto de acumulacción v. Basta entonces aplicar a v la condición (α) para que el lema de Pincherle quede demostrado. La parte de la demostración de la obra citada de Pincherle en que interviene el círculo C_v es como Vd. indica errónea, pero e ncambio subsiste la consecuencia de la pág. 24 de la obra de Pincherle referente al reticulado, consecuencia que habría de omitirse resrespecto a la proposición que Vd. titula «Lema modificado de Pincherle».

El lema de Pincherle es consecuencia del lema de Borel, pero en cambio, el ejemplo que Vd. da al principio de su nota prueba que en ciertos casos en que es aplicable el lema de Borel, no lo es el de Pincherle.

El olvido en que ha caído el lema de Pincherle lo considero bastante justo, porque la comprobación del cumplimiento de la condición (α) dificulta y en muchos casos impide su aplicación.

La condición (α) se comprueba en la aplicación del lema al teorema de continuidad uniforme sobre un conjunto completo, no tan solo como consecuencia inmediata de la continuidad de r_x en dicho caso, como Vd. ya indica, sino también por el siguiente sencillo razonamiento:

La condición Q_x que han de cumplir los puntos z del entorno C_x de x es la de continuidad

$$(1) \qquad |f(z)-f(x)|<\varepsilon.$$

Sea E el entorno circular de x_0 en que se cumple

$$(2) \qquad |f(z)-f(x_0)|<\frac{3}{2},$$

todos cuyos puntos pertenecen a C_{x_0}. Sea E_1 el entorno circular de x_0 con radio mitad del de E.

Todo par de puntos z y x de E cumplen (1); por tanto E_1 pertenece a todos los C_x de los puntos x de E_1 y para éste se cumple la condición (α).

En cambio el lema de Pincherle no es aplicable al teorema de Goursat-Cauchy y por tanto la demostración de la pág. 95 de la obra citada de Pincherle queda también invalidada, no porque deje de subsistir la consecuencia de la pág. 24 citada anteriormente referente al reticulado, sino por no poder comprobar a priori el cumplimiento de la condición (α). En efecto, este cumplimiento equivale a la uniformidad de derivación y ésta no puede deducirse directamente de la existencia de la derivada en cada punto, porque entonces el mismo razonamiento sería válido para el caso de función de una variable real, definida en un conjunto completo y derivable en cada punto; es bien sabido que en este caso la condición necesaria y suficiente para que el cociente incremental tienda uniformemente a su límite es que la derivada sea continua, lo que no siempre ocurre (*).

A este respecto puede observarse que también para el caso de una variable real puede aplicarse el razonamiento clásico del teorema de Goursat en lo referente al reticulado y por tanto de la condición

$$(3) \qquad \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f'(z_0)\right|<\varepsilon$$

para cualquier z_0 del conjunto completo D, puede deducirse que dado ε puede escogerse un reticulado tal que en cada una de sus mallas exista *un* punto z_0 para el que subsiste (3), siendo z un punnto cualquiera de la malla correspondiente; ello nos dice que son plenamente incorrectas las palabras: «This means, substantially, that de function es *uniformly differentiable* throughout the interior of C» contenidas en la pág. 76 de la 1ª edición de la

(*) Véase v. g. C. J. de la Vallée Poussin, Anlyse infinitésimale. Vol. 1, pág. 69.

reputada obra «The Theory of Functions», de E. C. Titchmarsh, (Oxford, 1932). Precisamente Goursat antes de dar su demostración definitiva, dió otra en que suponía que la función fuese uniformemente derivable, lo que no era gran progreso, ya que entonces era inmediata la continuidad de la derivada por demostración clásica de la teoría de funciones reales y entonces ya podía aplicarse el razonamiento de Riemann.

Es muy natural que el lema de Pincherle se muestre impotente para demostrar el teorema de Goursat-Cauchy, por ser aquel consecuencia del lema de Borel, el que tampoco puede aplicarse en su forma clásica a la demostración de dicho teorema: así vemos que por ejemplo P. Dienes en su obra «The Taylor Series», (Oxford, 1931), a pesar de haber introducido anteriormente el lema de Borel, ha de aplicar (pág. 209) la demostración clásica de Goursat.

Ciertas obras, tal como el «Modern Analysis» de E. T. Whittaker y G. N. Watson (4ª. ed., Cambridge, 1927, pág. 53), traen el que allí llaman lema modificado de Heine-Borel, según enunciado dado por H. F. Baker (Proc. Lond. Math. Soc. (2), I, 1903, pág. 24) y que en esencia no es más que el método de Goursat enunciado en forma general. Este lema modificado de Borel tiene la ventaja de poder aplicarse no tan solo en los casos en que tan útil se muestra el dado por Borel, sino también en el importante teorema de Goursat-Cauchy.

En resumen: el lema dado realmente por Pincherle, el que Vd. propone como lema modificado de Pincherle, el lema de Borel y el llamado lema modificado de Borel (y que aquí sí sería justo llamar de Goursat-Borel) son cuatro proposiciones bien distintas y de las cuales la primera es la menos importante y con menor trascendencia, a pesar de todas las exageradas ponderaciones italianas.

San Juan 23 de Julio de 1943.

Pedro Pi Calleja