CUESTIONES ELEMENTALES RESUELTAS

20. *Demostrar que si a, b, c son positivos y $a > b + c$ es:*

$$\text{I)} \quad \int_0^\infty \operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{II)} \quad \int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \cos cx \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2} b,$$

$$\text{III)} \quad \int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx \frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{2} bc,$$

IV) *Calcular los valores de estas integrales si es $a < b + c$.*

Solución. I) Por ser $a > b + c$ es $a - b > c$; luego, transformando el producto de senos y cosenos, obtenemos una suma de senos, siendo

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx \frac{dx}{x} = \int_0^\infty [\operatorname{sen}(a+b+c)\, x +$$
$$\operatorname{sen}(a+b-c)\, x + \operatorname{sen}(a-b+c)\, x + \operatorname{sen}(a-b-c)\, x] \frac{dx}{x}.$$

Calculando la integral del primer sumando obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(a+b+c)x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(a+b+c)x}{(a+b+c)x} d(a+b+c)\, x$$

y como cuando $x = 0$, es $(a+b+c)\, x = 0$ y para $x \to \infty$, también $(a+b+c)\, x \to \infty$, en virtud del teorema de Dirichlet que dice que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(a+b+c)x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Razonando análogamente para los demás sumandos, obtenemos

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx \,\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\,.\,4\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

II) Transformando el producto en sumas, obtenemos

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \cos cx \,\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}\int_0^\infty [\cos (a-b+c)\, x +$$

$$\cos (a-b-c)\, x - \cos (a+b+c)\, x - \cos (a+b-c)\, x]\,\frac{dx}{x^2}$$

y si integramos por partes, designando la suma entre corchetes por Σ_c se obtiene

$$[-\frac{1}{4}\,\frac{1}{x}\,\Sigma_c]_0^\infty + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1}{x}\, d\Sigma_c = [-\frac{1}{x}\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \cos cx]_0^\infty +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1}{x}\, d\Sigma_c$$

y como $\lim -\frac{1}{x}\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \cos cx = 0$ tanto para $x \to 0$ como para $x \to \infty$, el valor de la integral se reduce a

$$\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1}{x}\, d\Sigma_c = \frac{1}{4}\int_0^\infty [(a+b+c)\operatorname{sen}(a+b+c)\, x +$$

$$(a+b-c)\operatorname{sen}(a+b-c)\, x - (a-b+c)\operatorname{sen}(a-b+c)\, x -$$

$$-(a-b-c)\operatorname{sen}(a-b-c)\, x]\,\frac{dx}{x}$$

y razonando como en la primera parte, su valor es

$$\frac{1}{4}\,[(a+b+c)+(a+b-c)-(a-b+c)-(a-b-c)]\,\frac{\pi}{2}$$

o sea

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \cos cx \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2} b.$$

III. Transformando el producto en sumas se tiene

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} [\operatorname{sen}(a-b+c)x - \operatorname{sen}(a-b-c)x$$
$$- \operatorname{sen}(a+b+c)x + \operatorname{sen}(a+b-c)x] \frac{dx}{x^3}.$$

Integrando por partes y designando por Σ_s la suma contenida en el paréntesis, obtenemos

$$[-\frac{1}{8} \frac{1}{x^2} \Sigma_s]_0^{\infty} + \frac{1}{8} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} d\Sigma_s$$
$$= [-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx]_0^{\infty} + \frac{1}{8} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} d\Sigma_s.$$

Por ser $\lim -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx = 0$ para $x \longrightarrow 0$ y para $x \longrightarrow \infty$ el valor de la integral se reduce al del segundo término, o sea,

$$\frac{1}{8} \int_0^{\infty} [(a-b+c)\cos(a-b+c)x - (a-b-c)\cos(a-b-c)x$$
$$-(a+b+c)\cos(a+b+c)x + (a+b-c)\cos(a+b-c)x] \frac{dx}{x^2}.$$

Calculando la integral del primer sumando, se tiene

$$\frac{1}{8}(a-b+c) \int_0^{\infty} \cos(a-b+c)x \frac{dx}{x^2} =$$
$$[-\frac{1}{8}(a-b+c) \frac{1}{x} \cos(a-b+c)x]_0^{\infty}$$
$$-\frac{1}{8}(a-b+c)^2 \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(a-b+c)x \frac{dx}{x}.$$

Recordando que la última integral vale $\frac{\pi}{2}$ y generalizando el resultado para los demás sumandos, el valor de la integral está dado por

$$\Big| -\frac{1}{8}\frac{1}{x}[(a-b+c)\cos(a-b+c)\,x-(a-b-c)\cos(a-b-c)x$$

$$-(a+b+c)\cos(a+b+c)\,x+(a+b-c)\cos(a+b-c)\,x]\Big|_0^{\infty}$$

$$-\frac{1}{8}[(a-b+c)^2-(a-b-c)^2-(a+b+c)^2$$

$$+(a+b-c)^2]\frac{\pi}{2}.$$

Como el límite del primer término es 0 tanto para $x \to 0$ como para $x \to \infty$, el valor de la integral estará dado por el segundo, o sea

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx \frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{2}\, bc.$$

IV. Supongamos ahora $a < b + c$.

a) Transformando el producto de cosenos en suma, obtenemos

$$\operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} ax \,[\cos(b+c)\,x - \cos(b-c)\,x].$$

Se nos presentan ahora dos posibilidades en relación con las constantes a, b y c.

1º. $a > b - c$. En este caso es

$$\operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx = \frac{1}{4}[\operatorname{sen}(a+b+c)\,x - \operatorname{sen}(b+c-a)\,x +$$

$$+\operatorname{sen}(a+b-c)\,x + \operatorname{sen}(b-a-c)\,x]$$

y en consecuencia, según se calculó en el primer caso, será

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx \, \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4}.$$

2º. $a < b - c$. En este caso es

$$\operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx = \frac{1}{4} [\operatorname{sen} (a+b+c) x -$$

$$- \operatorname{sen} (b+c-a) x + \operatorname{sen} (a+b-c) x - \operatorname{sen} (b-a-c) x]$$

y por tanto

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx \, \frac{dx}{x} = 0.$$

b) En este segundo caso, el resultado de transformar en suma es independiente de las relaciones entre a, b, c, luego el valor de la integral es, como habíamos calculado, $\frac{\pi}{2} b$.

c) En la tercera expresión, tenemos que

$$\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} ax [\cos (b-c) x - \cos (b+c) x].$$

Se presentan ahora dos posibilidades:

1º. $a > b - c$. En este caso se tiene

$$\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx = \frac{1}{4} [\operatorname{sen} (a+b-c) \; x + \operatorname{sen} (a-b+c) x -$$

$$\operatorname{sen} (a+b+c) x + \operatorname{sen} (b+c-a) x)]$$

y como en el caso $a > b + c$, el valor de la integral es

$$\Bigg| -\frac{1}{8} \frac{1}{x} [(a+b-c) \cos (a+b-c) x + (a-b+c) \cos (a-b+c) x$$

$$- (a+b+c) \cos (a+b+c) x +$$

$$(b+c-a)\cos(b+c-a)\,x]\Big|_0^\infty - \frac{1}{8}[(a+b-c)^2+(a-b+c)^2-$$

$$(a+b+c)^2+(b+c-a)^2]\frac{\pi}{2},$$

y como el límite del primer término es 0 tanto para $x \longrightarrow 0$ como para $x \longrightarrow \infty$ el valor de la integral es

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{4}[2ab+2ac+2ab-a^2-b^2-c^2]\frac{\pi}{2}.$$

2º. $a < b - c$. En este caso

$$\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx = \frac{1}{4}[\operatorname{sen}(a+b-c)\,x - \operatorname{sen}(b-c-a)\,x -$$

$$-\operatorname{sen}(a+b+c)\,x + \operatorname{sen}(b+c-a)\,x].$$

En consecuencia, el valor de la integral es

$$\Big| -\frac{1}{8}\,\frac{1}{x}[(a+b-c)\cos(a+b-c)\,x -$$

$$-(b-c-a)\cos(b-c-a)-$$

$$(a+b+c)\cos(a+b+c)\,x + (b+c-a)\cos(b+c-a)\,x]\Big|_0^\infty -$$

$$-\frac{1}{8}[(a+b-c)^2-(b-c-a)^2-(a+b+c)^2+(b+c-a)^2]\frac{\pi}{2}$$

o sea

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx \frac{dx}{x^3} = \frac{\pi}{2}ac.$$

Es interesante generalizar estos resultados al caso en que se consideren los integrandos con m factores, siempre que agreguemos en las expresiones hasta ahora vistas únicamente factores cosenos. Sólo consideraremos el caso en que $a > b + c + d + \ldots + m$. Se trata entonces de calcular el valor de las expresiones

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \cos bx \cos cx \cos dx \ldots \cos mx \frac{dx}{x}$$

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \cos cx \cos dx \ldots \cos mx \frac{dx}{x^2}$$

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx \cos dx \ldots \cos mx \frac{dx}{x^3}.$$

En los tres casos, con cada factor coseno que se agrega, al transformar en suma se duplica el número de términos, pero se introduce un factor 1/2, sin cambiar el nombre de las funciones trigonométricas ya obtenidas; luego como el número de términos es en las tres expresiones (al transformarlas en suma) 2^{m-1}, se tiene:

En la primera el valor es $\dfrac{1}{2^{m-1}} 2^{m-1} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

En la segunda, razonando como en el caso de tres factores el valor es $\dfrac{1}{2^{m-1}} \dfrac{\pi}{2} \Sigma k$ designando con Σk la suma de las constantes que figuran en los argumentos obtenidos al transformar en suma, afectados por el signo de la función correspondiente. Pero en Σk se anulan todos los términos excepto el b; luego el valor de la integral es $\dfrac{\pi}{2} b$.

Análogamente, en la tercera, el resultado está dado por

$$\frac{1}{2 \,.\, 2^{m-1}} \Sigma k^2 \,.\, \frac{\pi}{2},$$

pero en Σk^2 se anulan todos los términos excepto bc, luego el valorlor de la integral es

$$\frac{1}{2 \,.\, 2^{m-1}} \,.\, 2^{m-1} \,.\, 2 \,.\, bc \,.\, \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} bc.$$

Estas integrales son un caso particular de una más general,

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} cx \ldots \operatorname{sen} hx \frac{dx}{x^n}$$

donde el número de factores es n.

Integrando sucesivamente por partes y eliminando los primeros términos que se obtienen, pues su límite para $x \longrightarrow 0$ y $x \longrightarrow \infty$ es 0, en su expresión final el valor de la integral estará dado por una expresión del tipo

$$\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{\pi}{2} \Sigma k^{n-1}$$

cualquiera que sea el exponente entero n.

Como en los casos anteriores, en Σk^{n-1} se anulan todos los términos excepto el $bcd \ldots h$, cuyo coeficiente en los 2^{n-1} términos es $(n-1)!$; luego el valor de la integral es

$$\frac{\pi}{2} b\, c\, d \ldots h.$$

Más general aún, si agregamos factores coseno, el valor de la integral no altera, siendo

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \ldots \operatorname{sen} hx \cos lx \cos mx \ldots \cos qx \frac{dx}{x^n} = \frac{\pi}{2} b\, c \ldots h.$$

Andrés Valeiras